ESSA 2011.

I Exercice 1. 6 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat de signaler sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case sur la grille prévue à cet effet (Voir annexe).

Toute réponse juste est comptée $+1$ point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point. Une absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1 Soit z un nombre complexe. Si $\theta = \arg(z)$ alors un argument de $\dfrac{\mathrm{i}}{\overline{z}}$ est :

- A. $\dfrac{\pi}{2} + \theta$.
- B. θ.
- C. $\dfrac{\pi}{2} - \theta$.
- D. $\dfrac{3\pi}{2} + \theta$.

QCM 2 Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2x^3}$.

- A. 0.
- B. $+\infty$.
- C. 1 .
- D. $\dfrac{1}{2}$.

QCM 3 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- A. Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.
- B. Si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = 0$.
- C. Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est une suite positive et convergente vers 0, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.
- D. Si (u_n) converge vers un réel non nul et si la suite (v_n) diverge vers $+\infty$ alors la suite $(u_n \times v_n)$ diverge.

QCM 4 L'ensemble des points $M(x,\, y,\, z)$ de l'espace tel que $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+3k \\ y & = & -1+2k \\ z & = & -3-k \end{array}\right.$

où k est un réel, est :

A. Un point.
B. Une droite.
C. Un plan.
D. Une sphère.

QCM 5 Une solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = 5$ est :

A. $y(x) = 5\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{5}{3}$.
B. $y(x) = 3\mathrm{e}^{5x} - \dfrac{5}{3}$.
C. $y(x) = 5\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{5}{3}$.
D. $y(x) = 3\mathrm{e}^{5x} + \dfrac{5}{3}$.

QCM 6 On considère l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$.

A. $I = 1$.
B. $I = [x \ln x]_1^{\mathrm{e}} + \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x$.
C. $I = \mathrm{e} - 1$.
D. $I = \mathrm{e}$.

Exercice 2. 8 points

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que la fonction f est impaire. Qu'en déduire pour sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$?
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{4}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
4. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $5x + 12y = 0$.

Exercice 3. 6 points

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif sur $[0\ ;\ +\infty[$. On rappelle que la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\ ;\ +\infty[$ a pour densité la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

1. Le mode de X est le réel x pour lequel la densité est maximale. Quel est le mode de X ?
2. La médiane de X est le réel x pour lequel $p(\mathrm{X} \leqslant x) = p(\mathrm{X} \geqslant x)$. Quelle est la médiane de X ?
3. On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On admet que cette durée de vie est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

   Calculer la probabilité des événements suivants :

   (a) La durée de vie du composant est comprise entre 2 et 3 semaines.

   (b) La durée de vie du composant électronique est strictement inférieure à 7 semaines.

   (c) Le composant électronique n'est pas défectueux après 5 semaines de fonctionnement.

ANNEXE EXERCICE n° 1- À RENDRE AVEC LA COPIE

N° question	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				
6				