ESSA 2011.

Exercice 1. 6 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat de signaler sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case sur la grille prévue à cet effet (Voir annexe).

Toute réponse juste est comptée $+1$ point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point. Une absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1 Soit z un nombre complexe. Si $\theta = \arg(z)$ alors un argument de $\dfrac{\mathrm{i}}{\overline{z}}$ est :

A. $\dfrac{\pi}{2} + \theta$.

B. θ.

C. $\dfrac{\pi}{2} - \theta$.

D. $\dfrac{3\pi}{2} + \theta$.

Réponse A.

On a :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{\mathrm{i}}{\overline{z}}\right) &= \arg(\mathrm{i}) - \arg(\overline{z}) \mod 2\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + \arg(z) \mod 2\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + \theta \end{aligned}$$

.

QCM 2 Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2x^3}$.

A. 0.

B. $+\infty$.

C. 1 .

D. $\dfrac{1}{2}$.

Réponse B.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^x}{2x^3} &= \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\right)^3}{2x^3} \\
&= \frac{1}{2\times 3^3}.\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\right)^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^3} \\
&= \frac{1}{2\times 3^3}.\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{\frac{x}{3}}\right)^3
\end{aligned}$$

Or $\frac{\mathrm{e}^X}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, par compositions par des applications continues, on en déduit : $\frac{1}{2\times 3^3}.\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}{\frac{x}{3}}\right)^3 \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

QCM 3 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

A. Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

B. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.

C. Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est une suite positive et convergente vers 0, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

D. Si (u_n) converge vers un réel non nul et si la suite (v_n) diverge vers $+\infty$ alors la suite $(u_n \times v_n)$ diverge.

Réponse D.
C'est un résultat de cours. Les propositions A et B sont des cas d'indéterminées et C est faux.

QCM 4 L'ensemble des points $M(x,\, y,\, z)$ de l'espace tel que $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+3k \\ y &=& -1+2k \\ z &=& -3-k \end{array}\right.$ où k est un réel, est :

A. Un point.

B. Une droite.

C. Un plan.

D. Une sphère.

Réponse B.
La aussi c'est du cours. Il s'agit de la droite passant par $(1, -1, -3)$ et ayant un vecteur directeur de coordonnées $(3, 2, -1)$.

QCM 5 Une solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = 5$ est :

A. $y(x) = 5\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{5}{3}$.

B. $y(x) = 3\mathrm{e}^{5x} - \dfrac{5}{3}$.

C. $y(x) = 5\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{5}{3}$.

D. $y(x) = 3\mathrm{e}^{5x} + \dfrac{5}{3}$.

Réponse C.
L'équation (E) est une équation différentielle normale (le coefficient de y' égale 1).
L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, $(E') : y' - 3y = 0$, est :
$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{3x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
La fonction constante égale à $-\frac{5}{3}$ est une solution particulière.
L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{3x} - \frac{5}{3} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

QCM 6 On considère l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$.

A. $I = 1$.

B. $I = [x \ln x]_1^{\mathrm{e}} + \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x$.

C. $I = \mathrm{e} - 1$.

D. $I = \mathrm{e}$.

Réponse A.

Procédons à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x.\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - [x]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 2. 8 points

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

Déterminons l'ensemble de définition de f.
Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est défini si et seulement si : $\frac{x+1}{x-1} > 0$.
Dressons le tableau de signe de $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

On en déduit :

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

Autrement dit : $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est }]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.}$

2. Montrer que la fonction f est impaire. Qu'en déduire pour sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$?

Étude de la parité de f.

Remarquons tout d'abord que, d'après la question précédente, l'ensemble de définition, $\mathcal{D}_f$, de f est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a les égalités successives :

$$\begin{array}{rcl} f(-x) & = & \frac{1}{4}.(-x) + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) \\ & = & -\frac{1}{4}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ & = & -\frac{1}{4}x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ & = & -f(x) \end{array}$$

On donc démontré que $\boxed{f \text{ est impaire}}$; ce que l'on peut interpréter géométriquement en disant que la courbe représentative de f,
$\boxed{\mathcal{C}_f\text{, admet l'origine du repère comme centre de symétrie.}}$

3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{4}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.

Montrons que Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $+\infty$ et$-\infty$.

Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a : $f(x) - \frac{1}{4} = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Or $\frac{x+1}{x-1} \underset{x+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc, puisque ln est continue, par composition on a : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{x+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.
On a donc démontré que
$\boxed{\Delta \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f.}$

Étudions les positions relatives de Δ et $\mathcal{C}_f$.

Pour cela il suffit d'étudier le signe de la fonction g définie sur $\mathcal{D}_f$ par $g(x) = f(x) - \frac{1}{4}x = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
Soit $x \in]1; +\infty[$. On a les inégalités successivement équivalentes :

$$\begin{array}{rcl} -1 & < & 1 \\ x-1 & < & x+1 \\ 1 & < & \frac{x+1}{x-1} \text{ car x-1>0.} \\ 0 & < & \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \text{ car la fonction ln est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{array}$$

Autrement dit

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ pour les valeurs positives de } x}$

et par symétrie par rapport à l'origine du repère

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessous de } \Delta \text{ pour les valeurs négatives de } x.}$

4. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $5x + 12y = 0$.

Recherchons les points comme décrit.

D'une part le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $a \in \mathcal{D}_f$ est le nombre $f'(a)$. D'autre part comme

$$5x + 12y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{5}{12}x$$

le coefficient directeur de la droite proposée est $-\frac{5}{12}$.
On recherche donc les $a \in \mathcal{D}_f$ tels que $f'(a) = -\frac{5}{12}$.
Déterminons la dérivée de f. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$ et pour tout x dans cet ensemble on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} + \frac{\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2x}{(x-1)^2}\cdot\frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2x}{x^2-1} \end{aligned}$$

Donc a vérifie l'équation : $\frac{1}{4} + \frac{2a}{a^2-1} = -\frac{5}{12}$. Cette équation est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a^2-1} &= -\frac{5}{12} - \frac{1}{4} \\ \frac{2a}{a^2-1} &= -\frac{9}{12} \\ \frac{2a}{a^2-1} &= -\frac{3}{4} \\ \frac{8a}{a^2-1} &= -3 \\ 3a^2 + 8a - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Ce dernier trinôme a pour discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 64 + 36 = 100$. Il admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -9$.

La solution x_1 est à exclure car en dehors du domaine de définition de f.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $5x + 12y = 0$ au point de coordonnées $(-9; f(-9))$.

Exercice 3. 6 points

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif sur $[0\ ;\ +\infty[$. On rappelle que la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\ ;\ +\infty[$ a pour densité la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

1. Le mode de X est le réel x pour lequel la densité est maximale. Quel est le mode de X ?

   Recherche du mode de X.

   Puisque λ est strictement positif, f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Donc le mode de X est 0.

2. La médiane de X est le réel x pour lequel $p(\mathrm{X} \leqslant x) = p(\mathrm{X} \geqslant x)$. Quelle est la médiane de X ?

   Recherche de la médiane $x \in\ [0; +\infty[$ de X.

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) = P(X \geq x) &\Leftrightarrow P(X \leq x) = 1 - P(X < x) \\
&\Leftrightarrow P(X \leq x) = 1 - P(X \leq x) \\
&\Leftrightarrow P(X \leq x) = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-\lambda x} + 1 = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow -\lambda x = \ln\left(\frac{1}{2}\right), \text{ car ln est définie sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\lambda}, \text{ car } \lambda \neq 0.
\end{aligned}$$

La médiane de X est $\frac{\ln 2}{\lambda}$.

3. On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On admet que cette durée de vie est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) La durée de vie du composant est comprise entre 2 et 3 semaines.

   <u>Probabilité d'une durée de vie entre 2 et 3 semaines.</u>

   On a les égalités successives :

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3) &= \int_2^3 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + \mathrm{e} \end{aligned}$$

   La durée de vie du composante est compris entre 2 et 3 semaines avec une probabilité de $-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + \mathrm{e}$.

   (b) La durée de vie du composant électronique est strictement inférieure à 7 semaines.

   <u>Probabilité d'une durée de vie inférieure à 7 semaines.</u>

   On a les égalités successives :

$$\begin{aligned} P(X \leq 7) &= \int_0^7 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}} + 1 \end{aligned}$$

   La durée de vie du composante est inférieure à 7 semaines avec une probabilité de $-\mathrm{e}^{-\frac{7}{2}} + 1$.

   (c) Le composant électronique n'est pas défectueux après 5 semaines de fonctionnement.

   <u>Probabilité d'une durée de vie supérieure à 5 semaines.</u>

   On a les égalités successives :

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - P(X < 5) \\ &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - \int_0^5 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t \\ &= 1 + \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} - 1 \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

La durée de vie du composante est supérieure à 5 semaines avec une probabilité de $e^{-\frac{5}{2}}$.

1.
2.
3. (a)
   (b)
   (c)

ANNEXE EXERCICE n° 1- À RENDRE AVEC LA COPIE

N° question	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				
6				