ESSA 2010.

Avertissement : L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.

Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.

Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe. Les candidats traiteront les trois exercices.

Les réponses de l'exercice n° 1 (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.

Les exercices n° 2 et n° 3 seront traités sur une copie à part.

I Exercice 1. 7 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte. On demande au candidat de signaler **sans justification** la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case sur la grille prévue à cet effet (Voir annexe).

Toute réponse juste est comptée +1 point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1 La solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -\dfrac{1}{4}y$ vérifiant la condition initiale $y(0) = \mathrm{e}$ est :

A. $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x+1}$.

B. $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

C. $y = \mathrm{e}^{-4x+1}$.

D. $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}x+1}$.

Réponse A.

Les réponses A et B sont solutions de l'équation différentielle, mais seule la A vérifie la condition initiale $y(0) = \mathrm{e}$.

QCM 2 Les suites de termes généraux donnés ci-dessous sont divergentes

A. $\cos \dfrac{1}{n+1}$.

B. $\dfrac{\sin n}{\ln(n+2)}$.

C. $\dfrac{\mathrm{e}^n}{n+1}$.

D. $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$.

Réponse C.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n+1}}{n+1}=+\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n}}{n+1}=+\infty$$

QCM 3 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3^x+\sin[\pi x]$.

A. $f'(1)=3\ln 3-\pi$.

B. $f'(1)=0$.

C. $f'(1)=-\pi$.

D. $f'(1)=3\ln 3-1$.

Réponse a.

$f(x)=e^{x\ln(3)}+\sin(\pi x)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions qui le sont.
De plus pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\ln(3)e^{x\ln(3)}+\pi\cos(\pi x)$$

En particulier :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \ln(3)e^{\ln(3)}+\pi\cos(\pi) \\ &= \ln(3)\times 3-\pi \end{aligned}$$

QCM 4 On considère les intégrales $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

A. $I+J=\pi$.

B. $I+J=\dfrac{\pi^2}{4}$.

C. $I+J=\dfrac{\Pi}{2}$.

D. $I+J=\dfrac{\Pi^2}{8}$.

Réponse

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t \;\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t \;\mathrm{d}t$$

Linéarité de l'intégrale

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t + t\sin^2 t \;\mathrm{d}t$$

Relation de Chasles

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t + t\sin^2 t \;\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \;\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times 1 \;\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

QCM 5 On pose pour tout $x \in \mathrm{R}$, $g(x) = x\mathrm{e}^x$, alors :

A. $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 1$.

B. $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.

C. $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

D. $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}$.

Réponse ?

Une primitive de g est $x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$.

Nous pouvons retrouver cette primitive en procédant à une intégration par parties.
Notons $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

$$\int_{\alpha}^{1} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{1} x\mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x &= [x\mathrm{e}^{x}]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} \mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - \alpha\mathrm{e}^{\alpha} - [\mathrm{e}^{x}]_{\alpha}^{1} \\ &= \mathrm{e} - \alpha\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{\alpha} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha)\end{aligned}$$

Si $\alpha = 0$ alors $\int_{\alpha}^{1} x\mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x = 1$ et si $\alpha = -1$ alors $\int_{\alpha}^{1} x\mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{-1}$.

QCM 6 Une urne contient 8 boules dont 3 rouges et 5 noires, et 6 cubes dont 2 rouges et 4 noirs.

On effectue un tirage de deux objets simultanément, en supposant les tirages équiprobables.

Alors la probabilité de tirer un cube et une boule de couleurs différentes est :

A. $\dfrac{22}{91}$.

B. $\dfrac{69}{91}$.

C. $\dfrac{1}{182}$.

D. $\dfrac{2}{91}$.

Réponse A.

Représentons la situation par un tableau double entrée :

	Rouge	Noir
Boule	3	5
Cube	2	4

Le tirage étant simultané il faut raisonner en termes de combinaisons. L'événement tirer un cube et une boule de couleurs différentes est réaliser lorsque sont tirées une boule noire et un cube rouge ou lorsque sont tirés une boule rouge et un cube noir. Le nombre de combinaison réalisant cet événement est : $3 \times 4 + 5 \times 2 = 22$. Le nombre total de combinaisons de 2 éléments parmi 14 est $\binom{14}{2}$. Nous en déduisons la probabilité recherchée

$$\frac{22}{\binom{14}{2}} = \frac{22}{\frac{14!}{(14-2)!2!}} = \frac{22}{91}$$

QCM 7 Soit $z = \sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta$ alors :

A. $\arg(z) = \theta$.

B. $\arg(z) = \pi - \theta$.

C. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} - \theta$.

D. $\arg(z) = \theta + \dfrac{\pi}{2}$.

Réponse C.

$\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta) = i(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

Exercice 2. 6 points

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$$

et on appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale dont on précisera les équations.

   - $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x}{1-x} = 1$.
     Donc, par continuité de la fonction exponentielle : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mathrm{e}$.
     Autrement dit $\mathcal{C}_f$ admet la droite $y = \mathrm{e}$ pour asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - $\lim_{x\to 1^-} x-1 = 0^-$ donc $\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$. Enfin, comme $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Il n'y a pas d'asymtote à $\mathcal{C}_f$.
   - $\lim_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$ donc $\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ nous en déduisons $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.

2. Justifier rigoureusement que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

   (i) $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est un quotient de fonctions polynomiales (donc dérivables) dot la fonction au dénominateur s'annule en 1.

   (ii) La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Nous déduisons de (i) et (ii), par composition des fonctions, que la fonction f et dérivable sur $]-\infty,1[\cup],+\infty[$ et que pour tout nombre x dans cet ensemble :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} \\ &= \frac{-2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} \\ &= \frac{-2}{(x-1)^2}f(x) \end{aligned}$$

3. Dresser alors le tableau de variations complet de la fonction f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

D'après la question précédente f' est strictement négative sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$. Nous en déduisons le tableau de signe.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	e	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e

Exercice 3. 7 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_C = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $OABC$? Justifier.

Montrons que $OABC$ est un parallélogramme.

Méthode 1 $OABC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$, *i.e.* si et seulement si $z_A - z_O = z_B - z_C$.
Or, d'une part

$$z_A - Z_O = z_A = 4$$

et d'autre part :

$$z_B - z_C = 2 + 2\sqrt{3}I - (-2 + 2\sqrt{3}i) = 4$$

donc $OABC$ est un parallélogramme.

Méthode 2 $OABC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Or l'affixe du milieu E_1 de $[AC]$ est

$$z_{E_1} = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{4 + -2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

et l'affixe du milieu E_2 de $[BO]$ est

$$z_{E_2} = \frac{z_0 + z_B}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

donc E_1 et 2 sont confondus et $OABC$ est un parallélogramme.

2. Soit E le point d'intersection des diagonales (OB) et (AC). Démontrer que l'affixe du point E est donnée par $z_E = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, puis mettre cette affixe sous forme exponentielle.

D'après la seconde méthode de résolution de la question précédente : $z_E = 1 + \sqrt{3}i$.

Donnons l'affixe de E sous forme exponentielle.

- Calcul du module.
$$|z_E| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$
- Calcul d'un argument θ.
D'après le cours
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Finalement
$$z_E = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

À partir du point E, on construit la suite de points suivants : M_1 est défini par $OM_1 = \dfrac{1}{2}OE$ et $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad(2\pi)$. Chaque point est obtenu en fonction du précédent par les relations suivantes : $OM_{n+1} = \dfrac{1}{2}OM_n$ et $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad(2\pi)$.
Pour tout entier naturel n, on appelle z_n l'affixe du point M_n.

3. (a) Déterminer l'affixe z_1 du point M_1.

- Déterminons le module de z_1

$$|z_1| = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{2}|z_2| = 1$$

- Déterminons un argument de z_1

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(z_1) &= (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1})\ [2\pi] \\ &= (\vec{u}, \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OM_1}) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ &= 2\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{aligned}$$

- L'expression algébrique de z_1 est donc

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(b) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par construction de la suite $|z_{n+1}| = \frac{1}{2}|z_n|$.
- Déterminons un argument de z_{n+1}

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(z_{n+1}) &= (\vec{u}, \overrightarrow{OM_{n+1}})\ [2\pi] \\ &= (\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}) + (\overrightarrow{OM_{n+1}})\ [2\pi] \\ &= \operatorname{Arg}(z_n) + \frac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{aligned}$$

- Des deux points précédents nous déduisons

$$\begin{aligned}z_{n+1} &= |z_{n+1}|\mathrm{e}^{i\operatorname{Arg}(z_{n+1})} \\ &= \frac{1}{2}|z_n|\mathrm{e}^{i\left[\operatorname{Arg}(z_n)+\frac{\pi}{3}\right]} \\ &= \frac{1}{2}|z_n|\mathrm{e}^{i\operatorname{Arg}(z_n)}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}z_n\end{aligned}$$

Donc $z_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}z_n$.

(c) En déduire l'expression de z_n en fonction de n, pour n entier naturel non nul.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la proposition P_n : « $z_n = \frac{1}{2^{n-1}} e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}}$ » est vraie.

i. Initialisation : montrons que P_1 est vraie.
D'après la question 3.a,

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2^{1-1}} e^{i\frac{(1+1)\pi}{3}}$$

ii. Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n est vraie et démontrons qu'alors P_{n+1} l'est aussi.
D'après la question précédente

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2^{n-1}} e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}} = \frac{1}{2^n} e^{i\frac{(n+2)\pi}{3}}$$

iii. Conclusion. Nous avons établi par récurrence que pour tout entier naturel non nul n

$$z_n = \frac{1}{2^{n-1}} e^{i\frac{(n+1)\pi}{3}}$$