Essa 2009.

Exercice 1 — 8 points.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $f'(x)$.

   Déterminons f'.

   f est un produit de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $x \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

   On a montré : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}}$

2. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

   Sens de variation de f.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, et pour $x \in \mathbb{R}$: $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.
   On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[$.
   Et donc que : $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; 1[.}$
   En résolvant de même l'équation $x - 1 = 0$ et l'inéquation $x - 1 < 0$ on obtient :
   $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]1; +\infty[}$, et
   $\boxed{f \text{ admet une tangente horizontale en } x = 1.}$

3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   Étude de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

   On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$ et, d'après le cours : $\frac{x}{\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   D'autre part : $\left\{\begin{array}{l} x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \mathrm{e}^{-x}x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right. \Rightarrow x\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, par produit.

   En conclusion on a montré : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$

4. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

   Cherchons une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

   Si f est dérivable au voisinage de a alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a à pour équation réduite : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. On en déduit une équation de la tangente recherchée :

$$\begin{aligned} T:\ & y = f'(0)(x-0) + f(0) \\ T:\ & y = 1x + 0 \\ T:\ & y = x \end{aligned}$$

   Ainsi une tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est la première bissectrice du repère dont l'équation réduite est : $\boxed{T:\ y = x}$.

5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'aire, en unité d'aires, de la portion de plan comprise entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = m$ est égale à $\frac{2}{\mathrm{e}} - (m+1)\mathrm{e}^{-m}$.
   Quelle est la valeur limite de cette aire lorsque m tend vers $+\infty$?

   Déterminons l'aire proposée.

   Puisque $m \geq 2$ l'aire, $\mathcal{A}(m)$, décrite dans l'énoncé est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^m f(x)dx \\ &= \int_1^m x\mathrm{e}^{-x}dx \end{aligned}$$

   En procédant à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(m) &= \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_1^m - \int_1^m -\mathrm{e}^{x}dx \\ &= -m\mathrm{e}^{-m} + 1\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^m \\ &= -m\mathrm{e}^{-m} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-m} + \mathrm{e}^{-1} \\ &= 2\mathrm{e}^{-2} - (m+1)\mathrm{e}^{-m} \end{aligned}$$

   En conclusion : $\boxed{\mathcal{A}(m) = \frac{2}{\mathrm{e}} - (m+1)\mathrm{e}^{-m}}$.

   Recherchons une éventuelle limite de $\mathcal{A}(m)$.

   On remarque que : $\frac{2}{\mathrm{e}} - (m+1)\mathrm{e}^{-m} = \frac{2}{\mathrm{e}} - m\mathrm{e}^{-m} - \mathrm{e}^{-m}$.

Or : $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{m}{\mathrm{e}^m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ -\mathrm{e}^{-m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array} \right.$

donc : $\mathcal{A}(m) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{e}$.

En conclusion : $\boxed{\lim\limits_{m \to +\infty} \mathcal{A}(m) = 0}$.

6. On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$.

(a) Calculer u_2, u_3 et u_4

Calculons u_2.

D'après la formule de récurrence définissant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\mathrm{e}} \left(1 + \frac{1}{1}\right) u_1 \\ &= \frac{2}{\mathrm{e}^2} \end{aligned}$$

Calculons u_3.

De même :

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{\mathrm{e}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) u_2 \\ &= \frac{3}{\mathrm{e}^3} \end{aligned}$$

Calculons u_4.

De même :

$$\begin{aligned} u_4 &= \frac{1}{\mathrm{e}} \left(1 + \frac{1}{3}\right) u_3 \\ &= \frac{4}{\mathrm{e}^4} \end{aligned}$$

(b) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.

Il semble que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait : $u_n = \frac{n}{\mathrm{e}^n}$.
Démontrons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{\mathrm{e}^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons $P(n)$: « $u_n = \frac{n}{ex^n}$ ». Démontrons par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie.
$P(0)$ est vraie car, d'après l'énoncé, on a : $u_1 = \frac{1}{e^1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$ est alors vrai.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n, \text{ par définition de } (u_n) \\
&= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{e^n}, \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n+1}{n}.\frac{n}{e^{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{e^{n+1}}
\end{aligned}$$

Donc $p(n+1)$ est vraie.
On a donc démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n}{e^n}}$

(c) En utilisant les questions précédentes, déterminer le sens de variation de (u_n) puis sa limite.

Sens de variation de (u_n).

On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = u_n$. Or f est décroissante sur $[1; +\infty[$, donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

Limite de (u_n).

$\frac{n}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Exercice 2. 6 points

1. Résolvons l'équation de degré 2 proposée dans $\mathcal{C}$.

   Calculons son discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-8)^2 - 4 \times 1 \times 25 \\
&= -36
\end{aligned}$$

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre. L'une d'elles est :

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{8+\mathrm{i}\sqrt{36}}{2\times 1} \\ &= 4+3i \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } z^2-8x+25=0 \text{ est } \{4+3i;4-3i\}}$

2. (a) Exprimons $\frac{z_A}{z_A-z_B}$ sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} \frac{z_A}{z_A-z_B} &= \frac{4+3\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}-(1+7\mathrm{i})} \\ &= \frac{4+3\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} \\ &= \frac{(4+3\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})} \\ &= \frac{12+16\mathrm{i}+9\mathrm{i}-12}{3^2+4^2} \\ &= \frac{25\mathrm{i}}{25} \\ &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

On a donc démontré que : $\boxed{\text{la forme algébrique de } \frac{z_A}{z_A-z_B} \text{ est i.}}$

(b) Interprétation géométrique.

D'après la question précédente on a : $z_A-z_O=(z_A-z_B)\mathrm{i}=(z_A-z_B)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.
Autrement dit : $\boxed{O \text{ est l'image de } B \text{ par la rotation de centre } A \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$

Nature du triangle ABO.

D'après ce qui précède, la rotation étant une isométrie du plan, $OA=AB$. Comme de plus cette rotation est d'angle $\frac{\pi}{2}$, on a $(OA)\perp(AB)$. Ainsi : $\boxed{OAB \text{ est isocèle rectangle en } A.}$

(c) Déterminons l'affixe de C.

Commençons par déterminer l'affixe de I. I étant le milieu de $[OB]$ on a :

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{z_O + z_B}{2} \\ &= \frac{1+7\mathrm{i}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

Puisque C est symétrique de A par rapport à I, I est le milieu de $[AC]$ et on a donc les égalités successivement équivalentes :

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{z_A + z_C}{2} \\ z_C &= 2z_I - z_A \\ z_C &= 1 + 7\mathrm{i} - (4 + 3\mathrm{i}) \\ z_C &= -3 + 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{l'affixe de } C \text{ est } -3+4\mathrm{i}.}$

Montrons que $OABC$ est un carré.

Montrons que A est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} (z_C - z_B)\mathrm{i} &= (-3 + 4\mathrm{i} - 1 - 7\mathrm{i})\mathrm{i} \\ &= (-4 - 3\mathrm{i})\mathrm{i} \\ &= 3 - 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} z_A - z_B &= 4 + 3\mathrm{i} - 1 - 7\mathrm{i} \\ &= 3 - 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

On a donc montré que : $(z_C - z_B)\mathrm{i} = z_A - z_B$. Autrement dit A est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On en déduit $OABC$ est un trapèze rectangle dont les deux bases et un troisième côté ont la même longueur autrement dit : $\boxed{OABC \text{ est un carré.}}$
Remarque : on pouvait aussi adopter directement un raisonnement géométrique ici bien plus léger.

Exercice 3. 6 points.

1. Il y a exactement deux solutions à l'équation $f(x) = 0$.
   f est strictement décroissante sur $]0; \mathrm{e}^{-1}]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 5$ donc $f\left(]0; \mathrm{e}^{-1}]\right) = \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right); \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right] = \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right); 5\right]$. Comme $0 \in \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right); 5\right]$, f admet un zéro unique sur $]0; \mathrm{e}^{-1}]$.
   f est strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}]$, or $f\left([\mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}]\right) = \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right); 3\right]$ et $0 \in \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right); 3\right]$, donc f admet un unique zéro sur $[\mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}]$.
   Réponse **C**.
2. Il y a deux possibilités d'asymptotes au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.
   En 0, d'après le tableau de variation f est prolongeable par continuité : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 5$. Il n'y a donc pas d'asymptote en 0.
   Clairement f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$.
   Réponse **B**.
3. $\mathrm{e} \simeq 2{,}7$, donc, d'après le tableau de signe de f', on a $f'(3) < 0$. Donc la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 (qui existe puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) a, nécessairement, une équation réduite dont le coefficient directeur est, lui aussi, négatif. Nécessairement cette équation réduite est $y = -x + 5$.
   Réponse **B**.
4. D'après le tableau de variation f est croissante sur $[5; +\infty[$ donc :
   $$\forall x \in [5; +\infty[, f(5) \leq f(x) \leq \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
   En particulier en tenant compte des valeurs aux bornes de l'intervalle :
   $$\forall x \in [5; 7],\ \mathrm{e} - 2 \leq f(x) \leq 2$$
   En intégrant cette inégalité sur $[5; 7]$ on obtient successivement :
   $$\begin{aligned} \int_5^7 \mathrm{e} - 2\,\mathrm{d}t \leq \int_5^7 f(t)dt &\leq \int_5^7 2dt \\ 2(\mathrm{e} - 2) \leq \int_5^7 f(t)dt &\leq 2 \times 2 \\ \frac{2}{\mathrm{e}^2} \leq I &\leq 4 \end{aligned}$$
   et puisque $\mathrm{e} \simeq 2{,}7$: $1 \leq \int_5^7 f(t)dt \leq 4$.
   Réponse **B**.

5. On remarque que la fonction définie par : $\ln(\ln(x))$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\frac{1}{x\ln x}$ (dérivée logarithmique). On a donc les égalités successives suivantes :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x &= [\ln(\ln(x))]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

Réponse **A**.

6. La valeur moyenne de f sur $[0;2]$ est par définition :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-0}\int_0^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,dx &= \frac{1}{2}\left[2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]_0^2\\ &= \mathrm{e}-1\end{aligned}$$

Réponse **D**.

7. Par définition des probabilités conditionnelles : $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B)$. On en déduit : $P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P_A(B)} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$.
Réponse **A**.

8. Si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de billets gagnants alors $X \sim \mathcal{B}\left(4,\frac{1}{4}\right)$. Et donc :

$$\begin{aligned}P(X\geq 1) &= 1-P(X=0)\\ &= 1-\binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4\\ &= 1-\frac{81}{256}\\ &= \frac{175}{256}\end{aligned}$$

Réponse **C**.

9. On normalise l'équation (E) : $y' - \frac{3}{2}y = 3$.
Résolvons l'équation homogène (E') : $y - \frac{3}{2}y' = 0$. L'ensemble des solutions de (E') est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longrightarrow & \lambda\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\end{array},\lambda\in\mathbb{R}\right\}$.
La fonction constante égale à -2 est une solution évidente particulière.
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle proposée est $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longrightarrow & \lambda\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}-2\end{array},\lambda\in\mathbb{R}\right\}$.
Réponse **C**.

10. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq v_n$. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée donc convergente.

    Réponse **C**

11. Le système de points pondérés $\{(A;2);\ (B;1);\ (C;-1)\}$ admet un barycentre (car $2+1-1 \neq 0$) et pour tout pont M de l'espace : $(2+1-1)\overrightarrow{MG} = 2.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

    Soit M un point de l'espace.

$$\left(||2.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|| = 3\right) \Leftrightarrow \left(2||\overrightarrow{MG}|| = 3\right)$$

    ce qui équivaut encore à dire que M appartient à la sphère de centre G et de rayon $\frac{3}{2}$.

    Réponse **A**.

12. Le vecteur $\vec{n}\,(3{,}0,-1)$ est normal au plan (P) d'équation $3x-z+1=0$. $\vec{j}$ est orthogonal à $\vec{n}$. Donc l'axe $(O,\vec{j})$ est parallèle ou confondu avec le plan (P). Comme O n'appartient pas à (P) (ses coordonnées ne vérifient pas l'équation du plan) on peut affirmer que le plan est parallèle à l'axe $(O,\vec{j})$.

    Réponse **B**.