Concours d'admission aux écoles du service de santé des armées 1996.

Épreuve de mathématique.
Coefficient : 2
Durée : 1 heure

I Question n°1. (6 points)

1. Deux approches possibles : résultats sur la variation des fonctions composées ou par recherche de variations par étude de la fonction dérivée.

   Étudions les variations de C sur $\mathbb{R}_+$.

   En tant que produit de composées de fonctions indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, C est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus sa dérivée est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$\begin{aligned} C'(t) &= 1 \times \mathrm{e}^{-t^2} + t \times \left(-2t \times \mathrm{e}^{-t^2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-t^2} - 2t^2\mathrm{e}^{-t^2} \\ &= (1-2t^2)\mathrm{e}^{-t^2} \end{aligned}$$

   Si e^{-t^2} est strictement positif, le signe de l'autre facteur reste à déterminer sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} 1-2t^2 > 0 &\Leftrightarrow 1-2t^2+2t^2 > 0+2t^2 \\ &\Leftrightarrow 1 > 2t^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{2t^2}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > t^2 \end{aligned}$$

   Et comme $t \in \mathbb{R}_+$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur cet ensemble

$$\begin{aligned} 1-2t^2 > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{t^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > t \end{aligned}$$

Ainsi C' est strictement positive sur $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$. En procédant de même nous établirions que C' ne s'annule qu'en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que donc C' est strictement négative sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

De plus :

$$C(0)=0$$

$$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

Et

$$t\mathrm{e}^{-t^2}=\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{\mathrm{e}^{-t^2}}\underset{\longrightarrow}{t\to+\infty}0$$

Nous en déduisons la variation de C sur $\mathbb{R}$.

t	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

$$\boxed{\text{La concentration est maximale à l'instant } t=\frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

L'instant correspondant en seconde est $\frac{\sqrt{2}}{2}\times 60$.

> L'instant auquel cette concentration est maximale est au dixième de seconde près par défaut 42,4 s.

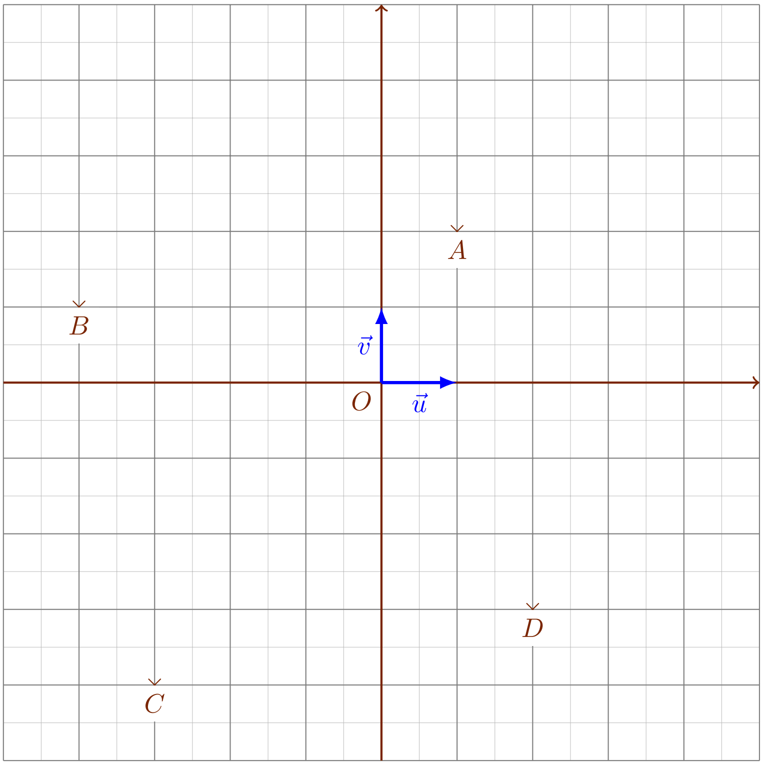
2. Déterminons l'expression souhaitée de $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$
\begin{aligned}
C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\mathrm{e}}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}
\end{aligned}
$$

La concentration maximale, en gramme par litre, est $\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$.

La concentration maximale est, arrondie au milligramme par litre, 0,429 g/l.

II Question n°2. (7 points)

1. 

2. Déterminons l'affixe de E.

   Puisque E est le milieu de $[AC]$ son affixe est

$$\begin{aligned} z_E &= \frac{1}{2}\left(z_A + z_C\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + 2i + (-3 - 4i)\right) \\ &= \frac{1}{2}(-2 - 2i) \\ &= -1 - i \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{L'affixe de } E \text{ est } -1 - i.}$$

3. Démontrons les égalités souhaitées.

D'une part :

$$\begin{aligned}
\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} &= \frac{-4+i-(-1-i)}{1+2i-(-1-i)} \\
&= \frac{-3+2i}{2+3i} \\
&= \frac{-3+2i}{2+3i} \times (-i) \times i \\
&= \frac{(-3+2i)\times(-i)}{2+3i} \times i \\
&= \frac{2+3i}{2+3i} \times i \\
&= i
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{z_D - zE}{z_C - z_E} &= \frac{2-3i-(-1-i)}{-3-4i-(-1-i)} \\
&= \frac{3-2i}{-2-3i} \\
&= \frac{3-2i}{-2-3i} \times (-i) \times i \\
&= \frac{(3-2i)\times(-i)}{-2-3i} \times i \\
&= \frac{-2-3i}{-2-3i} \times i \\
&= i
\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\boxed{\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = \frac{z_D - z_E}{z_C - z_E} = i.}$$

Montrons que $EB = EA$.

Puisque $\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = i$ en considérant les modules nous obtenons successivement

$$\left|\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E}\right| = |i|$$
$$\frac{[z_B - z_E|}{|z_A - z_E|} = 1$$
$$\frac{EB}{EA} = 1$$

et donc

$$EB = EA$$

$$\boxed{\text{Ainsi } EB = EA.}$$

Nous montrerions exactement de la même façon que

$$\boxed{ED = EC.}$$

Déterminons la mesure de l'angle $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$.

Comme $i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ et puisque $\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = i$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}\left(\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E}\right) &\equiv \operatorname{Arg}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right) \pmod{2\pi} \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv \tfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.}$$

De même

$$\boxed{(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}) \equiv \tfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.}$$

Puisque E est le milieu de $[AC]$, que $EB = EA$ et que $ED = EC$,

$$EA = EB = EC = ED$$

Comme $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}) = \frac{\pi}{2}$ et que A est le symétrique de C par rapport à C, le quadrilatère $ABCD$ est non-croisé, dans le sens direct et ses diagonales sont perpendiculaires.
Ainsi $ABCD$ est un quadrilatère non-croisé dont les diagonales de même longueur et perpendiculaires se coupent en leur milieu, autrement dit

$$\boxed{ABCD \text{ est un carré.}}$$

Une rédaction introduisant une rotation serait bien plus élégante.

III Question n°3. (7 points)

1. (a) Déterminons la loi de probabilité de X.

Puisqu'il y a équiprobabilité entre les faces la loi de probabilité de X est

Valeurs de X	-2	1	$2n$	$-n$
Probabilité	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$

Nous pourrions spécifier pour certaines valeurs prises par n.

Si $n = -1$, alors

Valeurs de X	-2	1
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Si $n = 2$, alors

Valeurs de X	-2	1	4
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

(b) Déterminons n.

L'espérance d'une variable aléatoire $X \in \{x_1, \dots, x_r\}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{r} x_k P(X = x_k) \\
&= -2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2n \times \frac{1}{6} - n \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} + n \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}(1 + n)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{E(X) = 0 \text{ si et seulement si } n = -1.}$$

2. (a) Déterminons la distribution de probabilité associée à cette expérience.

Les probabilité des faces forment une suite, $u_0, \ldots, u_5$, géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $\frac{1}{3}$.
Ainsi quelque soit $k \in [\![0;5]\!]$

$$u_k = u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Or la somme des probabilités doit être égale à 1, donc nécessairement

$$\sum_{k=0}^{5} u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1$$

Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} u_0 \sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{3}\right)^k &= 1 \\ u_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6}{1 - \frac{1}{3}} &= 1 \\ u_0 \cdot \frac{364}{243} &= 1 \\ u_0 &= \frac{243}{364} \end{aligned}$$

Nous en déduisons la distribution de probabilité associée à cette expérience, en notant Y la variable aléatoire indiquant le nombre obtenu

Valeurs de Y	-3	-2	-1	1	2	3
Probabilité	$\frac{243}{364}$	$\frac{81}{364}$	$\frac{27}{364}$	$\frac{9}{364}$	$\frac{3}{364}$	$\frac{1}{364}$

(b) Déterminons la probabilité de $(X = 1) \cap (Y = -3)$.

Il n'y a effectivement qu'une seule façon d'obtenir que la somme des nombres obtenus soit égale à -2 c'est lorsque A affiche 1 et B -3.

Puisque les résultats donnés par les dés sont indépendants, ces événements le sont aussi et donc

$$\begin{aligned} P\left((X=1)\cap(Y=-3)\right) &= P(X=1)\cdot P(X=-3) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{243}{364} \\ &= \frac{81}{182} \end{aligned}$$

La probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à -2 est $\frac{81}{182}$.

Déterminons la probabilité de $[(X=-2)\cap(Y=1)]\cup[(X=1)\cap(Y=-2)]$.

Il y a effectivement deux façons d'obtenir que la somme des nombres obtenus soit égale à -1 c'est lorsque A affiche -2 et B 1 ou lorsque A affiche 1 et B -2.

Puisqu'il s'agit de deux issues distinctes (et donc d'événements disjoints) :

$$\begin{aligned} &P\left([(X=-2)\cap(Y=1)]\cup[(X=1)\cap(Y=-2)]\right) \\ &= P\left[(X=-2)\cap(Y=1)\right]+P\left[(X=1)\cap(Y=-2)\right] \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'indépendance des résultats des deux dés permet de calculer :

$$\begin{aligned} &P\left([(X=-2)\cap(Y=1)]\cup[(X=1)\cap(Y=-2)]\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{364}+\frac{2}{3}\cdot\frac{81}{364} \\ &= \frac{51}{364} \end{aligned}$$

La probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à -1 est $\frac{51}{364}$.