Concours d'admission aux écoles du service de santé des armées 1996.

Épreuve de mathématique.
Coefficient : 2
Durée : 1 heure

I Question n°1. (6 points)

On injecte à l'instant $t = 0$, une substance dont la concentration, exprimée en g/l, dans le sang à l'instant t, exprimé en minutes, est $C(t)$ définie par $C(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$.

1. Déterminez la valeur exacte de l'instant t auquel cette concentration est maximale.
   Donnez une valeur approchée au dixième de seconde près de cet instant.

   Deux approches possibles : résultats sur la variation des fonctions composées ou par recherche de variations par étude de la fonction dérivée.

   Étudions les variations de C sur $\mathbb{R}_+$.

   En tant que produit de composées de fonctions indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, C est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus sa dérivée est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$\begin{aligned} C'(t) &= 1 \times \mathrm{e}^{-t^2} + t \times \left(-2t \times \mathrm{e}^{-t^2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-t^2} - 2t^2\mathrm{e}^{-t^2} \\ &= (1-2t^2)\mathrm{e}^{-t^2} \end{aligned}$$

   Si e^{-t^2} est strictement positif, le signe de l'autre facteur reste à déterminer sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} 1-2t^2 > 0 &\Leftrightarrow 1-2t^2+2t^2 > 0+2t^2 \\ &\Leftrightarrow 1 > 2t^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{2t^2}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > t^2 \end{aligned}$$

Et comme $t \in \mathbb{R}_+$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur cet ensemble

$$\begin{aligned} 1-2t^2 > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{t^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > t \end{aligned}$$

Ainsi C' est strictement positive sur $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$. En procédant de même nous établirions que C' ne s'annule qu'en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que donc C' est strictement négative sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$.

De plus :

$$C(0) = 0$$
$$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

Et

$$t\mathrm{e}^{-t^2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2}{\mathrm{e}^{-t^2}} t \to \underset{\longrightarrow}{+\infty} 0$$

Nous en déduisons la variation de C sur $\mathbb{R}$.

t	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

La concentration est maximale à l'instant $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'instant correspondant en seconde est $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 60$.

L'instant auquel cette concentration est maximale est au dixième de seconde près par défaut 42,4 s.

2. Montrez que la concentration maximale est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$ g/l.

   Donnez l'arrondi de cette valeur à 1 mg/l près.

   Déterminons l'expression souhaitée de $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\mathrm{e}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}
\end{aligned}$$

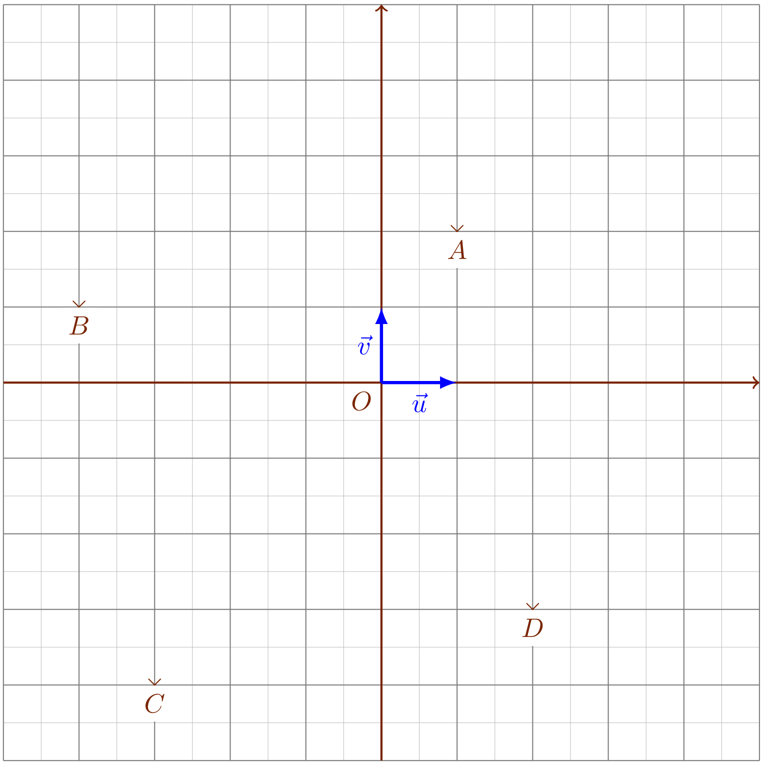
La concentration maximale, en gramme par litre, est $\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$.

La concentration maximale est, arrondie au milligramme par litre, 0,429 g/l.

II Question n°2. (7 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -4 + i$, $z_C = -3 - 4i$ et $z_D = 2 - 3i$.

1. Représentez A, B, C, D.



2. Déterminez l'affixe du milieu E de $[AC]$.

Déterminons l'affixe de E.

Puisque E est le milieu de $[AC]$ son affixe est

$$\begin{aligned} z_E &= \frac{1}{2}(z_A + z_C) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2i + (-3 - 4i)) \\ &= \frac{1}{2}(-2 - 2i) \\ &= -1 - i \end{aligned}$$

L'affixe de E est $-1 - i$.

3. Montrez que $\dfrac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = \dfrac{z_D - z_E}{z_C - z_E} = i.$

   Démontrons les égalités souhaitées.

   D'une part :

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} &= \frac{-4 + i - (-1 - i)}{1 + 2i - (-1 - i)} \\ &= \frac{-3 + 2i}{2 + 3i} \\ &= \frac{-3 + 2i}{2 + 3i} \times (-i) \times i \\ &= \frac{(-3 + 2i) \times (-i)}{2 + 3i} \times i \\ &= \frac{2 + 3i}{2 + 3i} \times i \\ &= i\end{aligned}$$

   et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{z_D - zE}{z_C - z_E} &= \frac{2 - 3i - (-1 - i)}{-3 - 4i - (-1 - i)} \\ &= \frac{3 - 2i}{-2 - 3i} \\ &= \frac{3 - 2i}{-2 - 3i} \times (-i) \times i \\ &= \frac{(3 - 2i) \times (-i)}{-2 - 3i} \times i \\ &= \frac{-2 - 3i}{-2 - 3i} \times i \\ &= i\end{aligned}$$

   et par conséquent :

$$\boxed{\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = \frac{z_D - z_E}{z_C - z_E} = i.}$$

   Montrez que $EB = EA$ et $ED = EC$.

Montrons que $EB = EA$.

Puisque $\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = i$ en considérant les modules nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E}\right| &= |i| \\
\frac{|z_B - z_E|}{|z_A - z_E|} &= 1 \\
\frac{EB}{EA} &= 1
\end{aligned}$$

et donc

$$EB = EA$$

Ainsi $EB = EA$.

Nous montrerions exactement de la même façon que

$ED = EC$.

Déterminez les mesures des angles $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$ et $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED})$.

Déterminons la mesure de l'angle $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$.

Comme $i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ et puisque $\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = i$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg}\left(\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E}\right) &\equiv \operatorname{Arg}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right) \pmod{2\pi} \\
&\equiv \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Et donc

$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

De même

$$(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Déduisez-en la nature du quadrilatère $ABCD$.

Puisque E est le milieu de $[AC]$, que $EB = EA$ et que $ED = EC$,

$$EA = EB = EC = ED$$

Comme $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}) = \frac{\pi}{2}$ et que A est le symétrique de C par rapport à C, le quadrilatère $ABCD$ est non-croisé, dans le sens direct et ses diagonales sont perpendiculaires.
Ainsi $ABCD$ est un quadrilatère non-croisé dont les diagonales de même longueur et perpendiculaires se coupent en leur milieu, autrement dit

$ABCD$ est un carré.

Une rédaction introduisant une rotation serait bien plus élégante.

III Question n°3. (7 points)

1. Un dé cubique A porte inscrit sur ses faces les nombres : -2, 1, 1, 1, $2n$, $-n$ (où n est un entier relatif). On suppose qu'à chaque lancer, les faces de A ont la même probabilité d'apparition.
   On lance le dé A et on note X le nombre obtenu. On définit ainsi une variable aléatoire.

   (a) Déterminez la loi de probabilité de X, en fonction du paramètre n.

   Déterminons la loi de probabilité de X.

   Puisqu'il y a équiprobabilité entre les faces la loi de probabilité de X est

Valeurs de X	-2	1	$2n$	$-n$
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   Nous pourrions spécifier pour certaines valeurs prises par n.

Si $n=-1$, alors

Valeurs de X	-2	1
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Si $n=2$, alors

Valeurs de X	-2	1	4
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

(b) Déterminez n pour que l'espérance mathématique de X soit nulle.

Déterminons n.

L'espérance d'une variable aléatoire $X \in \{x_1, \dots, x_r\}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{r} x_k P(X = x_k) \\
&= -2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2n \times \frac{1}{6} - n \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} + n \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}(1+n)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{E(X) = 0 \text{ si et seulement si } n = -1.}$$

Dans la suite, on donnera à n cette valeur.

2. Soit B un autre dé cubique dont les faces portent les nombres -3, -2, -1, 1, 2, 3 de telle sorte que les probabilités d'apparition respectives de ces nombres soient les six termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

(a) Déterminez la probabilité d'apparition de chacune des faces de B. (Donnez les résultats sous forme de fractions irréductibles).

Déterminons la distribution de probabilité associée à cette expérience.

Les probabilité des faces forment une suite, $u_0, \dots, u_5$, géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $\frac{1}{3}$.
Ainsi quelque soit $k \in [\![0;5]\!]$

$$u_k = u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Or la somme des probabilités doit être égale à 1, donc nécessairement

$$\sum_{k=0}^{5} u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1$$

Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} u_0 \sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{3}\right)^k &= 1 \\ u_0 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\frac{1}{3}} &= 1 \\ u_0 \cdot \frac{364}{243} &= 1 \\ u_0 &= \frac{243}{364} \end{aligned}$$

Nous en déduisons la distribution de probabilité associée à cette expérience, en notant Y la variable aléatoire indiquant le nombre obtenu

Valeurs de Y	-3	-2	-1	1	2	3
Probabilité	$\frac{243}{364}$	$\frac{81}{364}$	$\frac{27}{364}$	$\frac{9}{364}$	$\frac{3}{364}$	$\frac{1}{364}$

(b) On lance simultanément les dés A et B. On suppose que les résultats donnés par les dés sont indépendants.
Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à -2 ?
Quelle la probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à -1 ?
(Donnez les résultats sous forme de fractions irréductibles).

Déterminons la probabilité de $(X = 1) \cap (Y = -3)$.

Il n'y a effectivement qu'une seule façon d'obtenir que la somme des nombres obtenus soit égale à -2 c'est lorsque A affiche 1 et B -3.

Puisque les résultats donnés par les dés sont indépendants, ces événements le sont aussi et donc

$$\begin{aligned} P\left((X=1)\cap(Y=-3)\right) &= P(X=1)\cdot P(X=-3) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{243}{364} \\ &= \frac{81}{182} \end{aligned}$$

La probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à -2 est $\frac{81}{182}$.

Déterminons la probabilité de $[(X=-2)\cap(Y=1)]\cup[(X=1)\cap(Y=-2)]$.

Il y a effectivement deux façons d'obtenir que la somme des nombres obtenus soit égale à -1 c'est lorsque A affiche -2 et B 1 ou lorsque A affiche 1 et B -2.
Puisqu'il s'agit de deux issues distinctes (et donc d'événements disjoints) :

$$\begin{aligned} &P\left([(X=-2)\cap(Y=1)]\cup[(X=1)\cap(Y=-2)]\right) \\ &= P\left[(X=-2)\cap(Y=1)\right]+P\left[(X=1)\cap(Y=-2)\right] \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'indépendance des résultats des deux dés permet de calculer :

$$\begin{aligned} &P\left([(X=-2)\cap(Y=1)]\cup[(X=1)\cap(Y=-2)]\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{364}+\frac{2}{3}\cdot\frac{81}{364} \\ &= \frac{51}{364} \end{aligned}$$

La probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à -1 est $\frac{51}{364}$.