Concours d'admission aux écoles du service de santé des armées 1988.

Épreuve de mathématique.
Coefficient : 2
Durée : 1 heure

Nota : les candidats sont autorisés à utiliser des règles à calcul, des tables numériques et des calculatrices de poche à entrée unique par clavier, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. Afin de prévenir les risques de fraude, l'échange des calculatrices entre les candidats pendant les épreuves est interdit, de même que l'usage des notices fournies par les constructeurs.

I Question n°1.

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, avec $f(0) = 1$.

1. Étudier et représenter cette fonction dans un repère orthonormé.
   (On admettra que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$).

   * Ensemble de définition.
     $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1;+\infty[$.
     $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
     Donc à priori $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est définie sur $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$, mais puisque l'énoncé précise que $f(0) = 1$, le domaine de définition de f est $\mathscr{D}_f =]-1;+\infty[$.
   * Continuité.
     f est clairement continue sur son domaine de définition hormis en 0. Attachons nous donc à ce cas.
     Méthode hors programme. En utilisant le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x) \end{aligned}$$

Et par conséquent : $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Remarquons, pour $x \in]-1,+\infty[$,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}.$$

Nous reconnaissons dans cette dernière expression le taux d'accroissement de ln entre 1 et $1+x$. Puisque ln est dérivable en 1 nous pouvons affirmer que

$$\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} \underset{x\to 0}{\to} \ln'(1).$$

Autrement dit : $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(1)$.
Ainsi f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

* Limites.

Nous avons aisément : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, par comparaison des logarithmes et puissances. Nous en déduisons l'existence d'une tangente horizontale à la courbe en $+\infty$.
Puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to -1}{\to} -1$ et $\ln(x+1) \underset{\substack{x\to -1\\ x>-1}}{\to} -\infty$, $\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = +\infty$. Nous en déduisons l'existence d'une tangente verticale en -1.

* Ensemble de dérivabilité et fonction dérivée.

Si f est dérivable sur $\mathscr{D}_f \setminus \{0\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables, l'énoncé nous affirme de plus qu'elle est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
Soit $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}$.
$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = x$, donc $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v'(x) = 1$.
D'où :

$$\begin{aligned} f' &= \frac{u'v-uv'}{v^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x+1}x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2} \end{aligned}$$

* Signe de f' et variations de f.

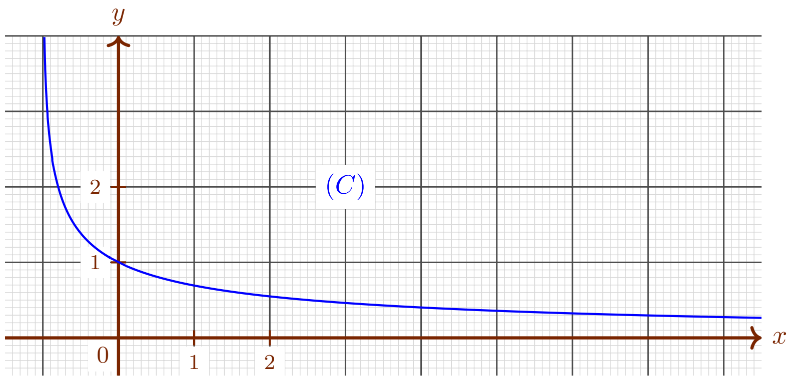
Notons $g(x) = x-(x+1)\ln(x+1)$ et étudions son signe en étudiant ses variations sur $]-1,+\infty[$.
g est dérivable et $g'(x) = -\ln(x+1)$. Donc

x	-1		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗	0	↘	

Nous en déduisons que $f' \leqslant 0$ sur $]-1;+\infty[$.
Donc :

x	-1		0		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0

* Tracer de la courbe.



2. Montrer également que l'on ne peut tracer qu'une seule tangente à la courbe (C) représentative de cette fonction, de l'origine O du repère.

Démontrons l'unicité de la tangente.

Je ne vois pas d'autre façon de déterminer les limites que les développements limités. Si vous voyez comme s'en passer dites-le moi : aubry.levavasseur@gmail.com.

Déterminons le taux d'accroissement de f entre 0 et h avec $h \in \mathscr{D}_f$.

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(h)-f(0)}{h} \\
&= \frac{\frac{\ln(1+h)}{h}-1}{h} \\
&= \frac{\ln(h+1)-h}{h^2} \\
&= \frac{1}{h^2}\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+\mathrm{o}(h^3)-h\right) \\
&= \frac{1}{h^2}\left(-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+\mathrm{o}(h^3)\right) \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{h}{3}+\mathrm{o}(h)
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \tau(h) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \tau(h) = -\frac{1}{2}$.
Le nombre dérivé à droite égalant le nombre dérivé à gauche, nous pouvons affirmer

(C) admet une unique tangente au point d'abscisse 0.

II Question n°2.

1. Exprimer $\cos x + \sqrt{3}\sin x$ sous la forme $A\cos(x-\varphi)$, avec A et φ réels à déterminer explicitement (on choisira A positif).

Exprimons $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ sous la forme souhaitée.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x\right) \\
&= 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = A\cos(x-\varphi)$, avec $A = 2$ et $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

2. En déduire alors : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)' \, \mathrm{d}x$.

   Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \, \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \, \mathrm{d}x &= [f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt{3} - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)' \, \mathrm{d}x = -1 + \sqrt{3}.}$$

III Question n°3.

Soit (ABC) un triangle, non équilatéral, du plan, et on pose : $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, où a, b, c sont trois réels strictement positifs.

1. Calculer GA^2 en fonction de a, b, c sachant que G représente le centre de gravité de ce triangle.

2. En déduire alors la valeur de $(b^2 - c^2)GA^2 + (c^2 - a^2)GB^2 + (a^2 - b^2)GC^2$.

3. Déterminer ensuite l'ensemble des points M du plan du triangle tels que : $(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0$.

IV Question n°4.

1. Résoudre l'équation $z^6 - 1 = 0$ dans le corps des complexes, et donner les solutions sous formes algébrique et trigonométrique. Représenter ces solutions dans le plan complexe.

2. Mettre le complexe $8i$ sous forme trigonométrique et résoudre $x^6 - 8i = 0$. Représenter ces solutions dans le plan complexe.

3. Dans le plan complexe on donne les points $A(-1+i)$, $B(2+3i)$ et $M(z)$, $M \neq A$ et $M \neq B$.
   On pose $Z = \left(\dfrac{z-2-3i}{z+1-i}\right)^3$.
   Quel est l'ensemble des points M tels que :
   - $|Z| = 8$?
   - Z est imaginaire pur ?