Concours d'admission aux écoles du service de santé des armées 1988.

Épreuve de mathématique.
Coefficient : 2
Durée : 1 heure

Nota : les candidats sont autorisés à utiliser des règles à calcul, des tables numériques et des calculatrices de poche à entrée unique par clavier, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. Afin de prévenir les risques de fraude, l'échange des calculatrices entre les candidats pendant les épreuves est interdit, de même que l'usage des notices fournies par les constructeurs.

I Question n°1.

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a :
$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n,$$
et en déduire alors :
$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

2. Préciser le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel l que l'on calculera.

II Question n°2.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sin x} \end{array} \right.$.

1. Étudier et représenter cette fonction de courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal.

2. Montrer que f possède une bijection réciproque f^{-1}, dont on précisera toutes les propriétés, sur un intervalle I que l'on déterminera. Calculer le même $\left(f^{-1}\right)'(x)$ et donner l'ensemble sur lequel est définie $\left(f^{-1}\right)'$.

3.

4. En déduire enfin $\displaystyle\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$.

III Question n°3.

1. On pose $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Calculer a^3 et montrer que a est solution d'une équation du 3^e^ degré à coefficients entiers.

2. Résoudre alors l'équation ainsi obtenue dans le corps des nombres complexes.

IV Question n°4.

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ soit $A\left(\sqrt{3},0\right)$ et $B(0,3)$. On appelle r_1 la rotation de centre A, et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et r_2 celle de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$, et s la réflexion d'axe (AB).

Rappel : une réflexion d'axe (AB) est une symétrie orthogonale par rapport à (AB).

1. Effectuer $r_2 \circ r_1$, $r_1 \circ r_2$, $s \circ r_1$, $r_2 \circ s$ et donner dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de ces appellations. On construira une figure soignée pour chaque cas.

2. Effectuer enfin $r_1 \circ s$ et $s \circ r_2$ et déterminer et construire l'ensemble des points invariants de chacune de ces applications, avec une figure soignée dans chaque cas.