Concours d'admission aux écoles du service de santé des armées 1988.

I Question n°1.

1. Démontrons le premier encadrement.

   Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.
   Autrement dit :

$$0 \leq x \leq 1$$

La fonction carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$0 \leq x^2 \leq 1$$
$$1 \leq 1 + x^2 \leq 2$$

La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$$1 \geq \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}$$

x^n étant positif

$$x^n \geq \frac{x^n}{1+x^2} \geq \frac{x^n}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n.}$$

Démontrons le deuxième encadrement.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En intégrant le précédant encadrement sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Nous avons établi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.}$$

2. Sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $n \in \ltimes^*$.

Soit $x \in\ [0;1]$.
Ainsi : $0 \leq x \leq 1$. Comme $\frac{x^n}{1+x^2} > 0$, nous en déduisons

$$\frac{x^n}{1+x^2} \times 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \cdot x \leq \frac{x^n}{1+x^2} \times 1.$$

Autrement dit

$$0\ le \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x^2}.$$

L'intégrale étant croissante, en intégrant le précédent encadrement sur $[0;1]$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nous avons donc démontré que, quelque soit $n \in \ltimes^*$,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

Finalement

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

Établissons la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Nous venons de démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante est minorée par 0, donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

Déterminons la valeur de l

À la question précédente nous avons démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme de plus

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

en passant à la limite dans l'encadrement nous pouvons affirmer que

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } l = 0.}$$

II Question n°2.

1. Étudions les variations de f.

$x \mapsto \sin x$ est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et à valeur strictement positives. Donc son inverse $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ est strictement croissante.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \left[\tfrac{\pi}{2}, \pi\right[.}$$

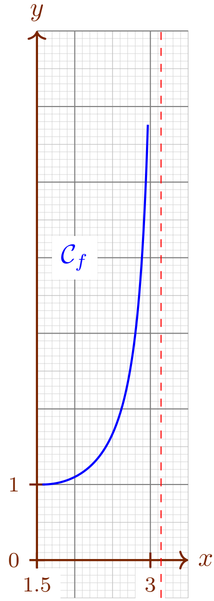
Limite de f en π.

Lorsque x tend vers π par valeur inférieurs, $\sin x$ tend vers 0 par valeurs positives. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to\pi} f(x) = +\infty.}$$

Autrement dit $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = \pi$ pour asymptote verticale.

Représentons graphiquement f.



2. f est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, f est continue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, et $f\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right) = [1; +\infty[$, donc f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur $[1, +\infty[$.

$$\boxed{f \text{ admet une bijection réciproque } f^{-1} : [1, +\infty[\to \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[.}$$

Par symétrie entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ par rapport à la première bissectrice, $y = x$, nous pouvons affirmer que f est continue, strictement croissante sur $I = [1; +\infty[$.
De plus f^{-1} est majorée puisque $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ admet $y = \pi$ pour asymptote horizontale.

Déterminons $\left(f^{-1}\right)'$.

Remarquons que f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, quelque soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\cos x}{(\sin x)^2} \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

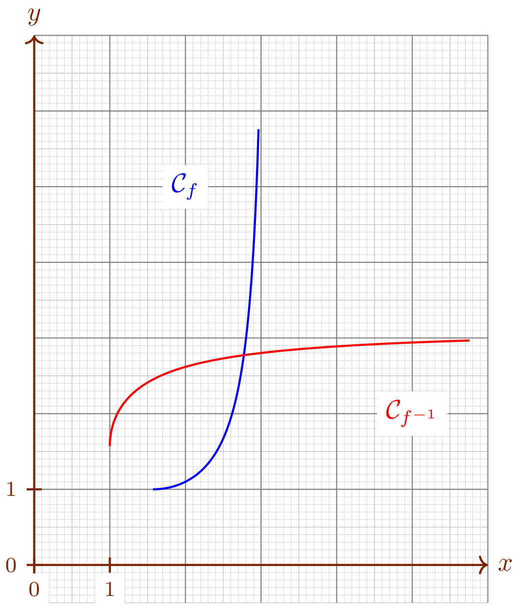
Remarquons que f' est strictement positive sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.
Puisque $f\ :\ \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\ \to]1,+\infty[$ est strictement monotone, dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas, f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et, quelque soit $x\in]1,+\infty[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f^{-1}\circ f'(x)}.$$

Ainsi

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f^{-1}\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)}.}$$

3. Traçons $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.



Déterminons l'abscisse de l'intersection des courbes représentatives de f et f^{-1}.

Autrement dit nous cherchons $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\cap]1,+\infty[$ tel que $\frac{1}{\sin x}=x$, ce qui équivaut à $1-\sin x=0$.
Procédons par dichotomie, en sachant que f est strictement croissante.

a	b	$1-\frac{a+b}{2}\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\approx.$
2	3	$-0{,}4962$
2,5	3	$-0{,}0495$
2,75	3	0,24
2,75	2,875	0,091
2,75	2,8125	

L'abscisse de l'intersection est, à 10^{-1} près : 2,78125.

4. Notons $I=\displaystyle\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$.

Calculons I.

D'après ce qui précède $\varphi:\begin{cases}\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}\right] & \to & \left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right]\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sin x}\end{cases}$ est une bijection.

Nous pouvons donc procéder au changement de variable $t=\frac{1}{\sin x}$ dans I.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-1}}\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}}}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}}\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{-\cos x}{|\cos x|}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}1\,\mathrm{d}x\\
&= [x]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\\
&= \frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$I = \frac{\pi}{12}.$$

III Question n°3.

1. Calculons a^3.

$$\begin{aligned}
a^3 &= \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 \\
&= \sqrt[3]{2}^3 + 3\sqrt[3]{2}^2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}^2 + \sqrt[3]{4}^3 \\
&= 2 + 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) + 4 \\
&= 6 + 3\sqrt[3]{2\times 4}\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) \\
&= 6 + 3\sqrt[3]{8}\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) \\
&= 6 + 3\times 2\times a \\
&= 6(1+a)
\end{aligned}$$

$$a^3 = 6(1+a).$$

De ce qui précède nous déduisons immédiatement

a est solution de l'équation $X^3 - 6X - 6 = 0$.

2. Résolvons l'équation : $X^3 - 6X - 6 = 0$.

Faisons une résolution par analyse-synthèse.

Analyse.
Notons a, b et c les racines du polynôme considéré.

$$X^3 - 6X - 6 = 0 \Leftrightarrow (X-a)(X-b)(X-c) = 0.$$

Or

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$$

donc par identification des coefficients dans les expressions développées, a, b et c sont des racines si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{ll} a+b+c=0 & (1) \\ ab+ac+bc=-6 & (2) \\ abc=6 & (3) \end{array}\right. .$$

Des équations (1) et (2) nous déduisons

$$\left\{\begin{array}{l} b+c=-a \\ bc=\frac{6}{a} \end{array}\right.$$

Autrement dit b et c sont les racines du trinôme : $P(x)=x^2-(b+c)x+bc=x^2+ax+\frac{6}{a}$.

Déterminons les racines de P.

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2-4\times 1\times \frac{6}{a} \\ &= a^2-\frac{24}{a} \\ &= \frac{a^3-24}{a} \end{aligned}$$

Or $a^3=6(1+a)$ donc

$$\Delta=\frac{6a-18}{a}$$

$\Delta<0$ donc P admet deux racines complexes conjuguées

$$b=\frac{-a-i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2} \quad \text{et } c=\frac{-a+i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2}.$$

Synthèse.

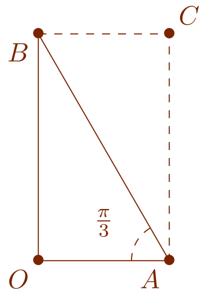
Nous vérifions aisément que $b=\frac{-a-i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2}$ et $c=\frac{-a+i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2}$ sont des solutions distinctes de $X^3-6x-6=0$.

L'ensemble des solutions de l'équation obtenue à la question précédente est

$$\mathscr{S}=\left\{a,\frac{-a-i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2},\frac{-a+i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2}\right\}.$$

IV Question n°4.

1. *



Remarquons que OAB étant rectangle en O (puisque le repère est orthonormé), d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Donc : $AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Nous en déduisons : $\cos\left(\widehat{BAO}\right) = \frac{1}{2}$. Ainsi une mesure de $\widehat{BAO}$ est $\frac{\pi}{3}$.

Par conséquent en notant $C(\sqrt{3},3)$ nous avons : $r_1 = s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$.

De même : $r_2 = s_{(BC)} \circ s_{(AB)}$.

D'où, puisque $s_{(AB)}$ est involutive :

$$\begin{aligned} r_2 \circ r_1 &= s_{(BC)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AC)} \\ &= s_{(BC)} \circ s_{(AC)} \end{aligned}$$

Comme $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{2}$:

$$r_2 \circ r_1 = r_{C,\pi}$$

$r_2 \circ r_1$ est la symétrie centrale de centre C.

* De même

$$s \circ r_1 = s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$$

donc

$$s \circ r_1 = s_{(AC)}.$$

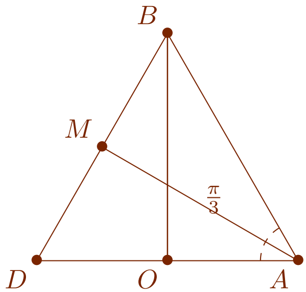
* De même

$$r_1 \circ s = s_{(BC)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)}$$

donc

$$\boxed{r_2 \circ s = s_{(BC)}.}$$

* Notons D le symétrique de A par rapport à O. (Donc : $D(-\sqrt{3}; 3)$.)



Ainsi, par construction de D, ABD est isocèle en B. Comme de plus $\widehat{BAO} = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$, ABD est en fait équilatéral.
Notons M le milieu de $[DB]$ (donc $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$).
Nous avons alors : $r_1 = s_{(AM)} \circ s_{(AB)}$ et $r_2 = s_{(AB)} \circ s_{(BD)}$.
Par conséquent :

$$r_1 \circ r_2 = s_{(AM)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(BD)}$$

Les symétries étant involutives :

$$r_1 \circ r_2 = s_{(AM)} \circ s_{(BD)}$$

Puisque ABD est équilatéral, $[AM]$ est une hauteur de ABD et par conséquent, $s_{(AM)} \circ s_{(BD)}$ est désigne la rotation de centre M et d'angle π.

$$\boxed{r_1 \circ r_2 \text{ est la symétrie centrale de centre } M.}$$

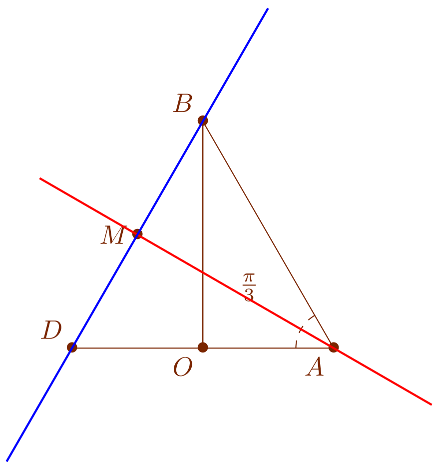
2. (a) En utilisant les décompositions de la question précédente :

$$\begin{aligned} r_1 \circ s &= s_{(AM)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \\ &= s_{(AM)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s \circ r_2 &= s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(BD)} \\ &= s_{(BD)} \end{aligned}$$

$r_1 \circ s$ désigne la symétrie orthogonale par rapport à (AM) et $s \circ r_2$ celle par rapport à (BD) dont les ensembles de points invariants sont respectivement (AM) et (BD).



En bleu l'ensemble des points invariants par $s \circ r_2$ et en rouge ceux invariants par $r_1 \circ s$.