Concours d'admission aux écoles du service de santé des armées 1988.

Épreuve de mathématique.
Coefficient : 2
Durée : 1 heure

Nota : les candidats sont autorisés à utiliser des règles à calcul, des tables numériques et des calculatrices de poche à entrée unique par clavier, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. Afin de prévenir les risques de fraude, l'échange des calculatrices entre les candidats pendant les épreuves est interdit, de même que l'usage des notices fournies par les constructeurs.

I Question n°1.

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0{,}1]$, on a :

$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n,$$

et en déduire alors :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Démontrons le premier encadrement.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0{,}1]$.
Autrement dit :

$$0 \leq x \leq 1$$

La fonction carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$0 \leq x^2 \leq 1$$
$$1 \leq 1 + x^2 \leq 2$$

La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$$1 \geq \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}$$

x^n étant positif

$$x^n \geq \frac{x^n}{1+x^2} \geq \frac{x^n}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0{,}1],\ \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n.}$$

Démontrons le deuxième encadrement.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En intégrant le précédant encadrement sur $[0{,}1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \\
\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Nous avons établi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.}$$

2. Préciser le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel l que l'on calculera.

   Sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Soit $n \in \ltimes^*$.

   Soit $x \in\ [0;1]$.

Ainsi : $0 \leq x \leq 1$. Comme $\frac{x^n}{1+x^2} > 0$, nous en déduisons

$$\frac{x^n}{1+x^2} \times 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \cdot x \leq \frac{x^n}{1+x^2} \times 1.$$

Autrement dit

$$0\ le \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x^2}.$$

L'intégrale étant croissante, en intégrant le précédent encadrement sur $[0;1]$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nous avons donc démontré que, quelque soit $n \in \ltimes^*$,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

Finalement

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

Établissons la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Nous venons de démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante est minorée par 0, donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

Déterminons la valeur de l

À la question précédente nous avons démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme de plus

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

en passant à la limite dans l'encadrement nous pouvons affirmer que

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } l = 0.}$$

II Question n°2.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sin x} \end{array} \right.$.

1. Étudier et représenter cette fonction de courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal.

   Étudions les variations de f.

   $x \mapsto \sin x$ est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et à valeur strictement positives. Donc son inverse $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ est strictement croissante.

   $$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[.}$$

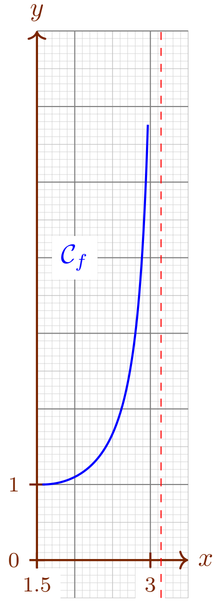
   Limite de f en π.

   Lorsque x tend vers π par valeur inférieurs, $\sin x$ tend vers 0 par valeurs positives. Donc

   $$\boxed{\lim_{x\to\pi} f(x) = +\infty.}$$

   Autrement dit $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = \pi$ pour asymptote verticale.

   Représentons graphiquement f.



2. Montrer que f possède une bijection réciproque f^{-1}, dont on précisera toutes les propriétés, sur un intervalle I que l'on déterminera. Calculer le même $\left(f^{-1}\right)'(x)$ et donner l'ensemble sur lequel est définie $\left(f^{-1}\right)'$.

   f est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$, f est continue sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$, et $f\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\right) = [1;+\infty[$, donc f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $[1,+\infty[$.

   $$\boxed{f \text{ admet une bijection réciproque } f^{-1} : [1,+\infty[\to \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[.}$$

   Par symétrie entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ par rapport à la première bissectrice, $y = x$, nous pouvons affirmer que f est continue, strictement croissante sur $I = [1;+\infty[$.
   De plus f^{-1} est majorée puisque $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ admet $y = \pi$ pour asymptote horizontale.

   Déterminons $\left(f^{-1}\right)'$.

   Remarquons que f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, quelque soit $x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\cos x}{(\sin x)^2} \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

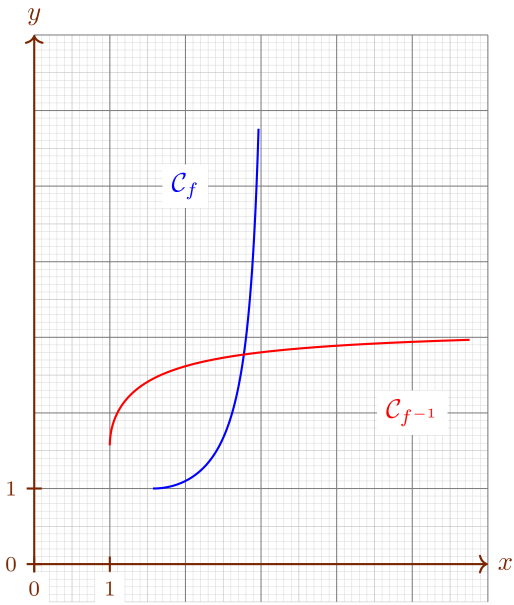
Remarquons que f' est strictement positive sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
Puisque $f : \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\to]1, +\infty[$ est strictement monotone, dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas, f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et, quelque soit $x \in]1, +\infty[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f^{-1} \circ f'(x)}.$$

Ainsi

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f^{-1}\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)}.}$$

3. Traçons $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.



Déterminons l'abscisse de l'intersection des courbes représentatives de f et f^{-1}.

Autrement dit nous cherchons $x \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\cap]1,+\infty[$ tel que $\frac{1}{\sin x} = x$, ce qui équivaut à $1 - \sin x = 0$.

Procédons par dichotomie, en sachant que f est strictement croissante.

a	b	$1 - \frac{a+b}{2}\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \approx .$
2	3	$-0{,}4962$
2,5	3	$-0{,}0495$
2,75	3	0,24
2,75	2,875	0,091
2,75	2,8125	

L'abscisse de l'intersection est, à 10^{-1} près : 2,78125.

4. En déduire enfin $\displaystyle\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$.

Notons $I = \displaystyle\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$.

Calculons I.

D'après ce qui précède $\varphi : \begin{cases} \left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}\right] & \rightarrow & \left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right] \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$ est une bijection.

Nous pouvons donc procéder au changement de variable $t = \frac{1}{\sin x}$ dans I.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-1}} \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}}} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}}\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{-\cos x}{|\cos x|}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} 1\ \mathrm{d}x \\
&= [x]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{12}.}$$

III Question n°3.

1. On pose $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Calculer a^3 et montrer que a est solution d'une équation du 3e degré à coefficients entiers.

   Calculons a^3.

$$\begin{aligned}
a^3 &= \left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3 \\
&= \sqrt[3]{2}^3 + 3\sqrt[3]{2}^2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}^2 + \sqrt[3]{4}^3 \\
&= 2 + 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right) + 4 \\
&= 6 + 3\sqrt[3]{2\times 4}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right) \\
&= 6 + 3\sqrt[3]{8}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right) \\
&= 6 + 3\times 2\times a \\
&= 6(1+a)
\end{aligned}$$

$$\boxed{a^3 = 6(1+a).}$$

De ce qui précède nous déduisons immédiatement

$$\boxed{a \text{ est solution de l'équation } X^3 - 6X - 6 = 0.}$$

2. Résoudre alors l'équation ainsi obtenue dans le corps des nombres complexes.

Résolvons l'équation : $X^3 - 6X - 6 = 0$.

Faisons une résolution par analyse-synthèse.

Analyse.
Notons a, b et c les racines du polynôme considéré.

$$X^3 - 6X - 6 = 0 \Leftrightarrow (X-a)(X-b)(X-c) = 0.$$

Or

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$$

donc par identification des coefficients dans les expressions développées, a, b et c sont des racines si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{ll} a+b+c=0 & (1) \\ ab+ac+bc=-6 & (2) \\ abc=6 & (3) \end{array}\right. .$$

Des équations (1) et (2) nous déduisons

$$\left\{\begin{array}{l} b+c=-a \\ bc=\frac{6}{a} \end{array}\right.$$

Autrement dit b et c sont les racines du trinôme : $P(x)=x^2-(b+c)x+bc=x^2+ax+\frac{6}{a}$.

Déterminons les racines de P.

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2-4\times 1\times\frac{6}{a} \\ &= a^2-\frac{24}{a} \\ &= \frac{a^3-24}{a} \end{aligned}$$

Or $a^3=6(1+a)$ donc

$$\Delta=\frac{6a-18}{a}$$

$\Delta<0$ donc P admet deux racines complexes conjuguées

$$b=\frac{-a-i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2} \quad \text{et } c=\frac{-a+i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2}.$$

Synthèse.

Nous vérifions aisément que $b=\frac{-a-i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2}$ et $c=\frac{-a+i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2}$ sont des solutions distinctes de $X^3-6x-6=0$.

L'ensemble des solutions de l'équation obtenue à la question précédente est

$$\mathscr{S}=\left\{a,\frac{-a-i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2},\frac{-a+i\sqrt{\frac{6a-18}{a}}}{2}\right\}.$$

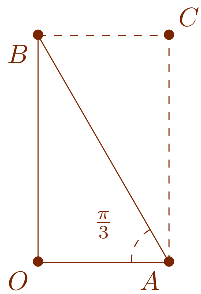
IV Question n°4.

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ soit $A\left(\sqrt{3},0\right)$ et $B(0,3)$. On appelle r_1 la rotation de centre A, et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et r_2 celle de centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$, et s la réflexion d'axe (AB).

Rappel : une réflexion d'axe (AB) est une symétrie orthogonale par rapport à (AB).

1. Effectuer $r_2 \circ r_1$, $r_1 \circ r_2$, $s \circ r_1$, $r_2 \circ s$ et donner dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de ces appellations. On construira une figure soignée pour chaque cas.

   *



Remarquons que OAB étant rectangle en O (puisque le repère est orthonormé), d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Donc : $AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Nous en déduisons : $\cos\left(\widehat{BAO}\right) = \frac{1}{2}$. Ainsi une mesure de $\widehat{BAO}$ est $\frac{\pi}{3}$.
Par conséquent en notant $C(\sqrt{3},3)$ nous avons : $r_1 = s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$.
De même : $r_2 = s_{(BC)} \circ s_{(AB)}$.
D'où, puisque $s_{(AB)}$ est involutive :

$$\begin{aligned} r_2 \circ r_1 &= s_{(BC)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AC)} \\ &= s_{(BC)} \circ s_{(AC)} \end{aligned}$$

Comme $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{2}$:

$$r_2 \circ r_1 = r_{C,\pi}$$

$\boxed{r_2 \circ r_1 \text{ est la symétrie centrale de centre } C.}$

* De même

$$s \circ r_1 = s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$$

donc

$$\boxed{s \circ r_1 = s_{(AC)}.}$$

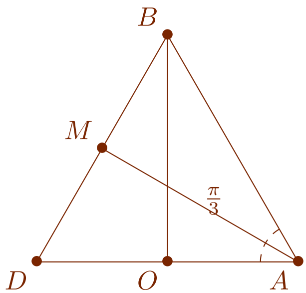
* De même

$$r_1 \circ s = s_{(BC)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)}$$

donc

$$\boxed{r_2 \circ s = s_{(BC)}.}$$

* Notons D le symétrique de A par rapport à O. (Donc : $D(-\sqrt{3}; 3)$.)



Ainsi, par construction de D, ABD est isocèle en B. Comme de plus $\widehat{BAO} \equiv \frac{\pi}{3} \mod 2\pi$, ABD est en fait équilatéral.

Notons M le milieu de $[DB]$ (donc $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$).

Nous avons alors : $r_1 = s_{(AM)} \circ s_{(AB)}$ et $r_2 = s_{(AB)} \circ s_{(BD)}$.

Par conséquent :

$$r_1 \circ r_2 = s_{(AM)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(BD)}$$

Les symétries étant involutives :

$$r_1 \circ r_2 = s_{(AM)} \circ s_{(BD)}$$

Puisque ABD est équilatéral, $[AM]$ est une hauteur de ABD et par conséquent, $s_{(AM)} \circ s_{(BD)}$ est désigne la rotation de centre M et d'angle π.

$r_1 \circ r_2$ est la symétrie centrale de centre M.

2. Effectuer enfin $r_1 \circ s$ et $s \circ r_2$ et déterminer et construire l'ensemble des points invariants de chacune de ces applications, avec une figure soignée dans chaque cas.

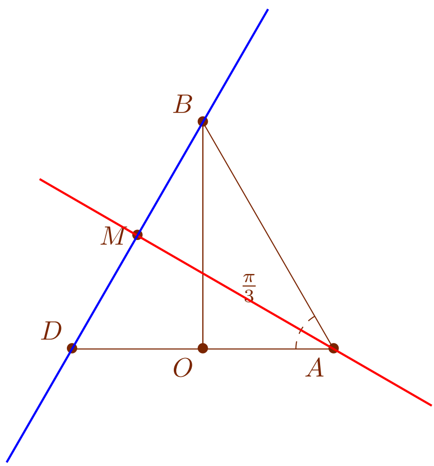
   (a) En utilisant les décompositions de la question précédente :

$$\begin{aligned} r_1 \circ s &= s_{(AM)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \\ &= s_{(AM)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s \circ r_2 &= s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(BD)} \\ &= s_{(BD)} \end{aligned}$$

$r_1 \circ s$ désigne la symétrie orthogonale par rapport à (AM) et $s \circ r_2$ celle par rapport à (BD) dont les ensembles de points invariants sont respectivement (AM) et (BD).



En bleu l'ensemble des points invariants par $s \circ r_2$ et en rouge ceux invariants par $r_1 \circ s$.