Concours d'admission aux écoles du service de santé des armées 1987.

Épreuve de mathématique.
Coefficient : 2
Durée : 1 heure

Nota : les candidats sont autorisés à utiliser des règles à calcul, des tables numériques et des calculatrices de poche à entrée unique par clavier, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. Afin de prévenir les risques de fraude, l'échange des calculatrices entre les candidats pendant les épreuves est interdit, de même que l'usage des notices fournies par les constructeurs.

I Question n°1.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^6 x + \sin^6 x\right)\ \mathrm{d}x$.
On pourra partir de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

II Question n°2.

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[p,p+1]$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on a :

$$\frac{2}{(p+1)^3} \leq f(p) - f(p+1) \leq \frac{2}{p^3}$$

2. En déduire :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2},$$

pour $n \geq 2$; et montrer que :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

est le terme général d'une suite convergente.
On ne cherchera pas à calculer explicitement le terme général de cette suite.

III Question n°3.

1. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que :
$$|z-3-2i| = |z-7+2i|.$$

2. Définir la transformation f, qui à M d'affixe z associe M' d'affixe z' telle que :
$$z' = (1+i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3},$$
et donner ses éléments caractéristiques.
Préciser l'image D' de l'ensemble D trouvé à la question **1.** par la transformation f.

IV Question n°4.

Dans le plan on considère un carré $ABCD$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, et on appelle I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AD]$.

1. Déterminer et construire le barycentre G de $A(1)$, $B(-3)$, $C(-3)$ et $D(1)$.

2. Trouver l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD} = \vec{0}$$