Concours d'admission aux écoles du service de santé des armées 1987.

I Question n°1.

Calculons $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^6 x \sin^6 x\right) \, \mathrm{d}t.$

Puisque

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos^6 x + \sin^6 x &= \cos^6 x + \left(1 - \cos^2\right)^3 \\
&= \cos^6 x + 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x \\
&= 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x \\
&= 1 - 3\cos^2 x \left(1 - \cos^2 x\right) \\
&= 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x \\
&= 1 - 3\left(\cos(x)\sin(x)\right)^2
\end{aligned}$$

Avec une formule de duplication :

$$\begin{aligned}
\cos^6 x + \sin^6 x &= 1 - 3\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)
\end{aligned}$$

Avec une formule de linéarisation :

$$\begin{aligned}
\cos^6 x + \sin^6 x &= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos(4x)}{2} \\
&= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos(4x)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{8} \, \mathrm{d}x + \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(4x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{24}\pi + \frac{3}{8}\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{5}{24}\pi + \frac{3}{8}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \frac{5}{24}\pi - \frac{3}{8} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) \, \mathrm{d}x = \frac{5}{24}\pi + \frac{3}{16}\sqrt{3}.$$

II Question n°2.

1. Démontrons l'encadrement proposé.

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   f est dérivable sur $[p; p+1]$ et

   $$\forall x \in [p; p+1],\ f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

   f' est dérivable sur $[p; p+1]$ et

   $$\forall x \in [p; p+1],\ f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

   Puisque $f'' > 0$, f' réalise une bijection de $[p,p+1]$ vers $[f'(p),f'(p+1)]$ et

   $$\forall x \in [p,p+1],\ f'(p) \leq f(x) \leq f(p+1)$$

   f est continue sur $[p; p+1]$, dérivable sur $]p; p+1[$, et, quelque soit $x \in [p,p+1]$, $f'(p) \leq f'(x) \leq f'(p+1)$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis

   $$f'(p) \cdot (p+1-p) \leq f(p+1) - f(p) \leq f'(p+1) \cdot (p+1-p)$$

   Cet encadrement équivaut successivement à

   $$-\frac{2}{p^3} \leq f(p+1) - f(p) \leq -\frac{2}{(p+1)^3}$$

   $$\frac{2}{p^3} \geq -f(p+1) + f(p) \geq \frac{2}{(p+1)^3}$$

   Nous avons donc démontré que

   quelque soit $p \in \mathbb{N}^*$,

   $$\frac{2}{(p+1)^3} \leq f(p) - f(p+1) \leq \frac{2}{p^3}$$

2. Justifions l'encadrement proposé.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

D'après la question précédente, pour tout $p \in [\![2,n]\!]$

$$f(p) - f(p+1) \leq \frac{2}{p^3} \leq f(p-1) - f(p)$$

En sommant terme à terme ces n encadrements nous obtenons :

$$\sum_{p=2}^{n} f(p) - f(p+1) \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{2}{p^3} \leq \sum_{p=2}^{n} f(p-1) - f(p)$$

En remarquant un téléscopage

$$f(2) - f(n+1) \leq 2 \cdot \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq f(1) - f(n)$$

Par définition de f

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 \cdot \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}$$

En divisant par 2 :

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

En ajoutant 1 :

$$\frac{9}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $[1, +\infty[$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{9}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$

et notre encadrement devient donc

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2}\leq\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^3}\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}$$

nous avons donc démontré que

pour tout $n\geq 2$ entier naturel

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2}\leq\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^3}\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}.$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante puisque constituée d'une somme de termes positifs.
De la question précédente nous déduisons pour tout entier naturel n non nul

$$u_n\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}\leq\frac{3}{2}$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante et majorée donc convergente.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente.

III Question n°3.

1. Déterminons géométriquement l'ensemble des points M.

   Notons M le point du plan d'affixe z, A celui d'affixe $3+2i$ et B celui d'affixe $7-2i$.
   Nous avons alors

   $$|z-3-2i|=|z-7+2i|\Leftrightarrow AM=BM$$

   Les points M sont donc les points équidistants de A et de B. Autrement dit les points M forment la médiatrice de $[AB]$.

   Déterminons une équation cartésienne de cette droite.
   En notant I le milieu de $[AB]$ nous avons

   $$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$
   $$I(5,0)$$

Dire que M appartient à la médiatrice de $[AB]$ équivaut successivement à

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$
$$(x_M - x_I)(x_I - x_A) + (y_M - y_I)(y_I - y_A) = 0$$
$$(x_M - 5)(5 - 3) + (y_M - 0)(0 - 2) = 0$$
$$2x_M - 2y_M - 10 = 0$$

L'ensemble des points est la droite du plan dont une équation cartésienne est : $x - y - 5 = 0$.

2. Déterminons f.

$z \mapsto z'$ est une fonction affine de $\mathbb{C}$ donc f est bien une transformation du plan.

Déterminons les invariants par f.
Résolvons donc dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$$

Cette équation est successivement équivalente à

$$0 = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3} - z$$
$$0 = z + i\sqrt{3}z - 5i\sqrt{3} - z$$
$$0 = i\sqrt{3}z - 5i\sqrt{3}$$
$$0 = i\sqrt{3}(z - 5)$$
$$z = 5$$

Ainsi f admet un unique point invariant I d'affixe 5.
f est donc une similitude de centre I.

Déterminons les éléments caractéristiques de cette transformation.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{z' - 5}{z - 5} &= \frac{(1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3} - 5}{z - 5} \\
&= \frac{(1 + i\sqrt{3})z - 5(i\sqrt{3} + 1)}{z - 5} \\
&= \frac{(1 + i\sqrt{3})(z - 5)}{z - 5} \\
&= 1 + i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}|1+i\sqrt{3}| &= \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\\ &= 2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1+i\sqrt{3}}{|1+i\sqrt{3}|} &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ &= \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

donc

f est la similitude de centre d'affixe 5, d'angle $\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$ et de rapport 2.

Déterminons l'image D' de D par f.

L'image d'une droite par une similitude est une droite.

D passant par I le centre de la similitude son image, D', passe aussi par I. Ainsi, géométriquement, il suffit de construire l'image de D par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Nous vérifions immédiatement que les coordonnées de F d'affixe $3+2i$ vérifie l'équation cartésienne de D.
De plus l'affixe de $f(F)$ est

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})(3+2i)-5i\sqrt{3} &= 3-2\sqrt{3}+i2+i3\sqrt{3}-5i\sqrt{3}\\ &= (3-2\sqrt{3})+i(2-\sqrt{3})\end{aligned}$$

Ainsi

$D' = (IF')$ avec $I(5{,}0)$ et $F' = (3-2\sqrt{3}{,}2-\sqrt{3})$.

IV Question n°4.

1. Déterminons le barycentre du système de points pondérés proposé.

   Remarquons que la somme des coefficients est non nulle : $1+(-3)+(-3)+1 = -4 \neq 0$ et que, par conséquent, le barycentre G existe effectivement.

G est le barycentre si et seulement si

$$\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

Ce qui équivaut successivement à

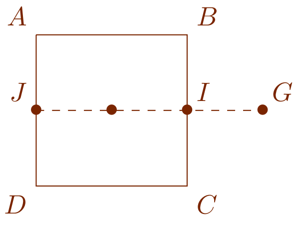
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JA} - 3(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}) - 3(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}\\
&2\overrightarrow{GJ} - 6\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JD} - 3(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}
\end{aligned}$$

I J étant milieux respectivement de $[BC]$ et $[AD]$

$$\begin{aligned}
&2\overrightarrow{GJ} - 6\overrightarrow{GI} = \vec{0}\\
&\overrightarrow{GJ} = 3\overrightarrow{GI}\\
&\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IJ} = \vec{3}\overrightarrow{GI}\\
&\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{GI}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JI}.}$$

Ce que nous représentons graphiquement par



2. Déterminons le lieu géométrique définie par l'égalité vectorielle.

   Soit M un point du plan.

$$\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

équivaut successivement à

$$\overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right) = \vec{0}$$

et puisque G est le barycentre

$$\overrightarrow{MA} \cdot \left(-4\overrightarrow{MG}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MG} = \vec{0}$$

Ainsi $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont orthogonaux.
Autrement dit

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ est le cercle de diamètre $[AG]$.

Construisons cet ensemble sur la figure.