Concours d'admission aux écoles du service de santé des armées 1987.

Épreuve de mathématique.
Coefficient : 2
Durée : 1 heure

Nota : les candidats sont autorisés à utiliser des règles à calcul, des tables numériques et des calculatrices de poche à entrée unique par clavier, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. Afin de prévenir les risques de fraude, l'échange des calculatrices entre les candidats pendant les épreuves est interdit, de même que l'usage des notices fournies par les constructeurs.

I Question n°1.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^6 x + \sin^6 x\right)\ \mathrm{d}x$.
On pourra partir de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Calculons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^6 x \sin^6 x\right)\ \mathrm{d}t$.

Puisque
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos^6 x + \sin^6 x &= \cos^6 x + \left(1 - \cos^2\right)^3 \\
&= \cos^6 x + 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x \\
&= 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x \\
&= 1 - 3\cos^2 x\left(1 - \cos^2 x\right) \\
&= 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x \\
&= 1 - 3\left(\cos(x)\sin(x)\right)^2
\end{aligned}$$

Avec une formule de duplication :

$$\begin{aligned}
\cos^6 x + \sin^6 x &= 1 - 3\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)
\end{aligned}$$

Avec une formule de linéarisation :

$$\begin{aligned}\cos^6 x + \sin^6 x &= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\cos(4x)}{2} \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos(4x)\end{aligned}$$

Nous en déduisons par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{8}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(4x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{24}\pi + \frac{3}{8}\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{5}{24}\pi + \frac{3}{8}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \frac{5}{24}\pi - \frac{3}{8}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^6 x + \sin^6 x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{24}\pi + \frac{3}{16}\sqrt{3}.}$$

II Question n°2.

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[p,p+1]$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on a :

$$\frac{2}{(p+1)^3} \leq f(p) - f(p+1) \leq \frac{2}{p^3}$$

Démontrons l'encadrement proposé.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
f est dérivable sur $[p;p+1]$ et

$$\forall x \in [p;p+1],\ f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

f' est dérivable sur $[p;p+1]$ et

$$\forall x \in [p;p+1],\ f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

Puisque $f'' > 0$, f' réalise une bijection de $[p,p+1]$ vers $[f'(p),f'(p+1)]$ et

$$\forall x \in [p,p+1],\ f'(p) \leq f(x) \leq f(p+1)$$

f est continue sur $[p;p+1]$, dérivable sur $]p;p+1[$, et, quelque soit $x \in [p,p+1]$, $f'(p) \leq f'(x) \leq f'(p+1)$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$f'(p)\cdot(p+1-p) \leq f(p+1)-f(p) \leq f'(p+1)\cdot(p+1-p)$$

Cet encadrement équivaut successivement à

$$-\frac{2}{p^3} \leq f(p+1)-f(p) \leq -\frac{2}{(p+1)^3}$$

$$\frac{2}{p^3} \geq -f(p+1)+f(p) \geq \frac{2}{(p+1)^3}$$

Nous avons donc démontré que

quelque soit $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2}{(p+1)^3} \leq f(p)-f(p+1) \leq \frac{2}{p^3}$$

2. En déduire :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2},$$

pour $n \geq 2$; et montrer que :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$$

est le terme général d'une suite convergente.
On ne cherchera pas à calculer explicitement le terme général de cette suite.

Justifions l'encadrement proposé.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

D'après la question précédente, pour tout $p \in [\![2,n]\!]$

$$f(p)-f(p+1) \leq \frac{2}{p^3} \leq f(p-1)-f(p)$$

En sommant terme à terme ces n encadrements nous obtenons :

$$\sum_{p=2}^{n} f(p) - f(p+1) \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{2}{p^3} \leq \sum_{p=2}^{n} f(p-1) - f(p)$$

En remarquant un téléscopage

$$f(2) - f(n+1) \leq 2 \cdot \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq f(1) - f(n)$$

Par définition de f

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 \cdot \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}$$

En divisant par 2 :

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

En ajoutant 1 :

$$\frac{9}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $[1, +\infty[$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{9}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$

et notre encadrement devient donc

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2} \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

nous avons donc démontré que

pour tout $n \geq 2$ entier naturel

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2} \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante puisque constituée d'une somme de termes positifs.
De la question précédente nous déduisons pour tout entier naturel n non nul

$$u_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{3}{2}$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante et majorée donc convergente.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente.

III Question n°3.

1. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que :
$$|z-3-2i| = |z-7+2i|.$$

Déterminons géométriquement l'ensemble des points M.

Notons M le point du plan d'affixe z, A celui d'affixe $3+2i$ et B celui d'affixe $7-2i$.
Nous avons alors

$$|z-3-2i| = |z-7+2i| \Leftrightarrow AM = BM$$

Les points M sont donc les points équidistants de A et de B. Autrement dit les points M forment la médiatrice de $[AB]$.

Déterminons une équation cartésienne de cette droite.
En notant I le milieu de $[AB]$ nous avons

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$
$$I(5{,}0)$$

Dire que M appartient à la médiatrice de $[AB]$ équivaut successivement à

$$\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AI} = 0$$
$$(x_M - x_I)(x_I - x_A) + (y_M - y_I)(y_I - y_A) = 0$$
$$(x_M - 5)(5-3) + (y_M - 0)(0-2) = 0$$
$$2x_M - 2y_M - 10 = 0$$

L'ensemble des points est la droite du plan dont une équation cartésienne est : $x - y - 5 = 0$.

2. Définir la transformation f, qui à M d'affixe z associe M' d'affixe z' telle que :
$$z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3},$$
et donner ses éléments caractéristiques.
Préciser l'image D' de l'ensemble D trouvé à la question **1.** par la transformation f.

Déterminons f.

$z \mapsto z'$ est une fonction affine de $\mathbb{C}$ donc f est bien une transformation du plan.

Déterminons les invariants par f.
Résolvons donc dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$$

Cette équation est successivement équivalente à
$$\begin{aligned}
&0 = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3} - z\\
&0 = z + i\sqrt{3}z - 5i\sqrt{3} - z\\
&0 = i\sqrt{3}z - 5i\sqrt{3}\\
&0 = i\sqrt{3}(z - 5)\\
&z = 5
\end{aligned}$$

Ainsi f admet un unique point invariant I d'affixe 5.
f est donc une similitude de centre I.

Déterminons les éléments caractéristiques de cette transformation.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{z' - 5}{z - 5} &= \frac{(1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3} - 5}{z - 5}\\
&= \frac{(1 + i\sqrt{3})z - 5(i\sqrt{3} + 1)}{z - 5}\\
&= \frac{(1 + i\sqrt{3})(z - 5)}{z - 5}\\
&= 1 + i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}|1+i\sqrt{3}| &= \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\\ &= 2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1+i\sqrt{3}}{|1+i\sqrt{3}|} &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ &= \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

donc

> f est la similitude de centre d'affixe 5, d'angle $\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$ et de rapport 2.

Déterminons l'image D' de D par f.

L'image d'une droite par une similitude est une droite.

D passant par I le centre de la similitude son image, D', passe aussi par I. Ainsi, géométriquement, il suffit de construire l'image de D par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Nous vérifions immédiatement que les coordonnées de F d'affixe $3+2i$ vérifie l'équation cartésienne de D.
De plus l'affixe de $f(F)$ est

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})(3+2i)-5i\sqrt{3} &= 3-2\sqrt{3}+i2+i3\sqrt{3}-5i\sqrt{3}\\ &= (3-2\sqrt{3})+i(2-\sqrt{3})\end{aligned}$$

Ainsi

> $D'=(IF')$ avec $I(5{,}0)$ et $F'=(3-2\sqrt{3}{,}2-\sqrt{3})$.

IV Question n°4.

Dans le plan on considère un carré $ABCD$ tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, et on appelle I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AD]$.

1. Déterminer et construire le barycentre G de $A(1)$, $B(-3)$, $C(-3)$ et $D(1)$.

   Déterminons le barycentre du système de points pondérés proposé.

   Remarquons que la somme des coefficients est non nulle : $1+(-3)+(-3)+1 = -4 \neq 0$ et que, par conséquent, le barycentre G existe effectivement.

   G est le barycentre si et seulement si

$$\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

   Ce qui équivaut successivement à

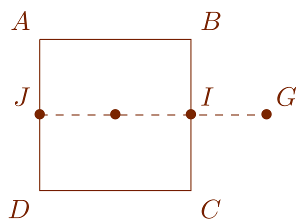
$$\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JA} - 3(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}) - 3(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{GJ} - 6\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JD} - 3(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$$

   I J étant milieux respectivement de $[BC]$ et $[AD]$

$$2\overrightarrow{GJ} - 6\overrightarrow{GI} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{GJ} = 3\overrightarrow{GI}$$
$$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IJ} = \vec{3}\overrightarrow{GI}$$
$$\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{GI}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JI}.}$$

   Ce que nous représentons graphiquement par



2. Trouver l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

Déterminons le lieu géométrique définie par l'égalité vectorielle.

Soit M un point du plan.

$$\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

équivaut successivement à

$$\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right) = \vec{0}$$

et puisque G est le barycentre

$$\overrightarrow{MA}\cdot\left(-4\overrightarrow{MG}\right) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MG} = \vec{0}$$

Ainsi $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont orthogonaux.
Autrement dit

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}^2 - 3\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD} = \vec{0}$ est le cercle de diamètre $[AG]$.

Construisons cet ensemble sur la figure.