Concours EETAA session 2018.

Durée : 2 heures.
Calculatrice autorisée.

I Exercice. 5 points

1. Appliquons le programme à 3.

   Notons X la variable (informatique) dans laquelle est enregistrée les valeurs successives obtenues. Le tableau d'état de la variable est alors :

Étapes	X
1	3
2	$3^2 = 9$
3	$9 + 3 = 12$
4	$2 \times 12 = 24$
5	$24 - 6 = 18$
6	$\frac{18}{2} = 9$

   $\boxed{\text{Si nous choisissons 3 le programme renvoie 9.}}$

2. Appliquons le programme à 9.

   En procédant comme à ma question précédente :

Étapes	X
1	9
2	$9^2 = 81$
3	$81 + 3 = 84$
4	$2 \times 84 = 168$
5	$168 - 6 = 162$
6	$\frac{162}{2} = 81$

   $\boxed{\text{Si nous choisissons 9 le programme renvoie 81.}}$

3. Appliquons le programme à un nombre x.

   En procédant comme aux questions précédentes :

Étapes	X
1	x
2	x^2
3	x^2+3
4	$2(x^2+3)$
5	$2(x^2+3)-6$
6	$\frac{2(x^2+3)-6}{2}$

Si nous choisissons x le programme renvoie $\frac{2(x^2+3)-6}{2}$.

Développons ordonnons et réduisons $R(x)=\frac{2(x^2+3)-6}{2}$.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{2(x^2+3)}{2}-\frac{6}{2} \\ &= x^2+3-3 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Quelque soit $x \in \mathbb{N}$ choisi en entrée, le programme renverra x^2.

4. Recherchons la valeur choisie si le résultat est 25.

   En reprenant la notation précédente, nous cherchons $x \in \mathbb{N}$ (positif et entier) tel que
   $$R(x)=25.$$
   Cette équation équivaut successivement à
   $$\begin{aligned} x^2 &= 25 \\ x=5 &\quad x=-5 \end{aligned}$$
   Mais puisque x est un entier positif finalement :

   5 est le nombre qui permet d'obtenir 25 avec ce programme.

5. D'après ce qui précède

   il suffit d'élever le nombre au carré pour obtenir le résultat final.

II Exercice. 5 points

1. Développons, ordonnons et réduisons f.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-5)^2 - (2x-5)(3x-7) \\ &= (2x)^2 - 2\times 2x \times 5 + 5^2 - [2x\times 3x + 2x\times(-7) + (-5)\times 3x + (-5)\times(-7)] \\ &= 4x^2 - 20x + 25 - [6x^2 - 14x - 15x + 35] \\ &= 4x^2 - 20x + 25 - [6x^2 - 29x + 35] \\ &= 4x^2 - 20x + 25 - 6x^2 + 29x - 35] \\ &= -2x^2 + 9x - 10 \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 + 9x - 10.}$$

2. Calculons $f(-2)$.

   En utilisant la forme développée c'est la forme la plus simple a utiliser mais il ne faut pas avoir fait d'erreur en développant) obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} f(-2) &= -2\times(-2)^2 + 9\times(-2) - 10 \\ &= -8 - 16 - 10 \\ &= -34 \end{aligned}$$

   $$\boxed{f(-2) = -34.}$$

3. Démontrons que $f(3) = -1$.

$$\begin{aligned} f(3) &= -2\times(3)^2 + 9\times(3) - 10 \\ &= -18 + 27 - 10 \\ &= -1 \end{aligned}$$

   $$\boxed{f(3) = -1.}$$

4. Factorisons l'expression de f.

   Reprenons l'expression donnée dans l'énoncé.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-5)^2 - (2x-5)(3x-7) \\ &= (2x-5)(2x-5) - (2x-5)(3x-7) \\ &= (2x-5)\left[(2x-5)-(3x-7)\right] \\ &= (2x-5)\left[2x-5-3x+7\right] \\ &= (2x-5)(-x+2) \end{aligned}$$

   Pour tout x réel, $f(x) = (2x-5)(-x+2)$.

5. Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

   En utilisant la forme factorisée obtenue à la question précédente, nous pouvons affirmer que dire $f(x) = 0$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned} &(2x-5)(-x+2) = 0 \\ 2x-5 &= 0 \quad \text{ou} \quad -x+2=0 \\ 2x-5+5 &= 0+5 \quad \text{ou} \quad -x+2-2=0-2 \\ 2x &= 5 \quad \text{ou} \quad -x=-2 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{-x}{-1}=\frac{-2}{-1} \\ x &= \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad x=2 \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\mathscr{S}_1 = \left\{\frac{5}{2};2\right\}$.

III Exercice. 5 points

1. Démontrons : $(ED) \parallel (AB)$.

   Configuration de Thalès.

Les points A, C et D d'une part, B, C et E d'autre part sont alignés dans cet ordre.
Hypothèses pour la réciproque du théorème de Thalès.
D'une part

$$\begin{aligned}\frac{AC}{CD} &= \frac{18}{12}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{BC}{CE} &= \frac{7{,}5}{5}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Donc, par transitivité,
$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}.$$
Nous en déduisons d'après le théorème de Thalès que

$$\boxed{(AB) \parallel (DE).}$$

2. Calculons ED.

Configuration de Thalès.
Les points A, C et D d'une part, B, C et E d'autre part sont alignés dans cet ordre.
Hypothèses pour le théorème de Thalès.
D'après la question précédente les droites ED) et (AB) sont parallèles.
Nous en déduisons d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{AB}{ED} = \frac{CA}{CB}$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\frac{19{,}5}{ED} = \frac{18}{12}$$
$$\frac{19{,}5}{ED} = \frac{18}{12}$$

En faisant un produit en croix

$$\begin{aligned} 12 \times 19{,}5 &= 18 \times ED \\ 234 &= 18ED \\ \frac{234}{18} &= \frac{18ED}{18} \\ 13 &= ED \end{aligned}$$

$$\boxed{ED = 13 \text{ cm.}}$$

3. Démontrons que CED est rectangle.

   * Remarquons d'abord que $ED > CE$ et $ED > CD$, par conséquent le triangle ne peut être rectangle qu'en C. Ce ue nous allons maintenant démontrer avec le théorème de Pythagore.
   * D'une part : $CE^2+CD^2 = 5^2+12^2 = 169$ et d'autre part $ED^2 = 13^2 = 169$, donc, pr transitivité, $CE^2 + CD^2 = ED^2$. Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que

$$\boxed{CED \text{ est rectangle en } C.}$$

4. Calculons $\widehat{DEC}$.

   Puisque DEC est rectangle en C :

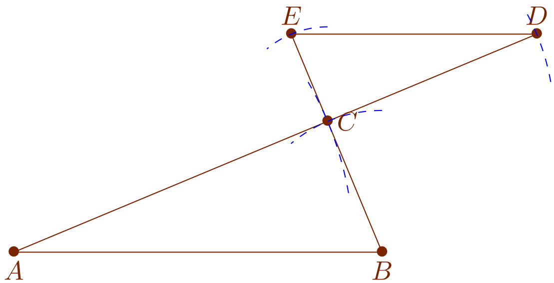
$$\begin{aligned} \cos\left(\widehat{DEC}\right) &= \frac{CE}{ED} \\ &= \frac{5}{13} \end{aligned}$$

   En utilisant la calculatrice nous en déduisons :

$$\widehat{DEC} \approx 67{,}3$$

$$\boxed{\text{En arrondissant au degré } \widehat{DEC} \approx 67°.}$$

5. Le dessin qui est fait ici est à l'échelle 1/4.



IV Exercice. 5 points

Question 1.

Déterminons la proportion de filles au total.

Il y a au total $30+20=50$ élèves parmi lesquels il y a $\frac{30}{100}\times 30+\frac{70}{100}\times 20=29{,}7$ filles.

La proportion de fille est donc $\frac{29{,}7}{50}=0{,}594$.

Il y a environ 60 % de filles.

Question 2.

Le plus simple consiste à rentrer le calcul tel quel dans la calculatrice et de regarder le résultat obtenu.

Simplifions l'écriture du nombre proposé.

$$\begin{aligned}\frac{14\times 14^{-10}}{14^{-5}\times 14^{2}} &= \frac{14^{1-10}}{14^{-5+2}}\\ &= \frac{14^{-9}}{14^{-3}}\\ &= 14^{-9}\times 14^{3}\\ &= 14^{-9+3}\\ &= 14^{-6}\end{aligned}$$

Question 2 réponse a.

Question 3.

Il est possible de résoudre le système mais le plus simple est de tester toutes les solutions proposées et la seule pour laquelle les deux équations sont vérifiées est $(2; -1)$.

Question 3 réponse e.

Question 4.

Notons z la note qu'il obtiendra à la prochaine évaluation.
On souhaite que la moyenne soit d'au moins 15,5 autrement dit

$$\overline{x} \geqslant 15{,}5$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\frac{18 + 15{,}5 + 13{,}5 + 13 + z}{5} &\geqslant 15{,}5 \\
\frac{60 + z}{5} &\geqslant 15{,}5 \\
5\times\frac{60 + z}{5} &\geqslant 5\times 15{,}5 \quad \text{car } 5 > 0 \\
60 + z &\geqslant 77{,}5 \\
60 + z - 60 &\geqslant 77{,}5 - 60 \\
z &\geqslant 17{,}5
\end{aligned}$$

Question 4 réponse e.

Question 5.

Là encore la calculatrice permet de répondre rapidement en donnant la réponse exacte.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{4}} &= \sqrt{\frac{4\times 4}{9\times 4}-\frac{1\times 9}{4\times 9}} \\
&= \sqrt{\frac{16}{36}-\frac{9}{36}} \\
&= \sqrt{\frac{16-9}{36}} \\
&= \sqrt{\frac{7}{36}} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{36}} \\
&= \frac{sqrt7}{\sqrt{6^2}} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{6}
\end{aligned}
$$

Question 5 réponse c.