Concours EETAA session 2018.

Durée : 2 heures.
Calculatrice autorisée.

I Exercice. 5 points

Dans cet exercice, on justifiera chaque réponse en détaillant les étapes des calculs.

On considère le programme de calcul suivant :
— choisir un nombre entier positif ;
— l'élever au carré ;
— lui ajouter 3 ;
— multiplier par 2 le résultat ;
— soustraire 6 au résultat obtenu :
— prendre la moitié du dernier résultat.

1. Appliquer ce programme de calcul en choisissant 3 comme nombre de départ

   Appliquons le programme à 3.

   Notons X la variable (informatique) dans laquelle est enregistrée les valeurs successives obtenues. Le tableau d'état de la variable est alors :

Étapes	X
1	3
2	$3^2 = 9$
3	$9 + 3 = 12$
4	$2 \times 12 = 24$
5	$24 - 6 = 18$
6	$\frac{18}{2} = 9$

   Si nous choisissons 3 le programme renvoie 9.

2. Vérifier que le résultat final est 81 lorsqu'on choisit 9 comme nombre de départ.

   Appliquons le programme à 9.

   En procédant comme à ma question précédente :

Étapes	X
1	9
2	$9^2 = 81$
3	$81 + 3 = 84$
4	$2 \times 84 = 168$
5	$168 - 6 = 162$
6	$\frac{162}{2} = 81$

Si nous choisissons 9 le programme renvoie 81.

3. Appliquer ce programme à un nombre x. Développer et réduire l'expression.

Appliquons le programme à un nombre x.

En procédant comme aux questions précédentes :

Étapes	X
1	x
2	x^2
3	$x^2 + 3$
4	$2(x^2 + 3)$
5	$2(x^2 + 3) - 6$
6	$\frac{2(x^2+3)-6}{2}$

Si nous choisissons x le programme renvoie $\frac{2(x^2+3)-6}{2}$.

Développons ordonnons et réduisons $R(x) = \frac{2(x^2+3)-6}{2}$.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{2(x^2+3)}{2} - \frac{6}{2} \\ &= x^2 + 3 - 3 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Quelque soit $x \in \mathbb{N}$ choisi en entrée, le programme renverra x^2.

4. En déduire le nombre de départ qui permet d'obtenir 25 avec ce programme de calcul.

   Recherchons la valeur choisie si le résultat est 25.

   En reprenant la notation précédente, nous cherchons $x \in \mathbb{N}$ (positif et entier) tel que
$$R(x) = 25.$$
   Cette équation équivaut successivement à
$$\begin{aligned} x^2 &= 25 \\ x = 5 &\quad x = -5 \end{aligned}$$
   Mais puisque x est un entier positif finalement :

   5 est le nombre qui permet d'obtenir 25 avec ce programme.

5. Comment peut-on passer, en une seule étape, du nombre choisi au résultat final ?

   D'après ce qui précède

   il suffit d'élever le nombre au carré pour obtenir le résultat final.

II Exercice. 5 points

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (2x-5)^2 - (2x-5)(3x-7)$.

1. Développer et réduire $f(x)$.

   Développons, ordonnons et réduisons f.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-5)^2 - (2x-5)(3x-7) \\ &= (2x)^2 - 2\times 2x \times 5 + 5^2 - [2x\times 3x + 2x\times(-7) + (-5)\times 3x + (-5)\times(-7)] \\ &= 4x^2 - 20x + 25 - [6x^2 - 14x - 15x + 35] \\ &= 4x^2 - 20x + 25 - [6x^2 - 29x + 35] \\ &= 4x^2 - 20x + 25 - 6x^2 + 29x - 35] \\ &= -2x^2 + 9x - 10 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 + 9x - 10.}$$

2. Calculer $f(-2)$.

   Calculons $f(-2)$.

   En utilisant la forme développée c'est la forme la plus simple a utiliser mais il ne faut pas avoir fait d'erreur en développant) obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} f(-2) &= -2 \times (-2)^2 + 9 \times (-2) - 10 \\ &= -8 - 16 - 10 \\ &= -34 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(-2) = -34.}$$

3. Montrer que 3 est un antécédent de -1 par f.

   Démontrons que $f(3) = -1$.

$$\begin{aligned} f(3) &= -2 \times (3)^2 + 9 \times (3) - 10 \\ &= -18 + 27 - 10 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(3) = -1.}$$

4. Factoriser $f(x)$.

   Factorisons l'expression de f.

   Reprenons l'expression donnée dans l'énoncé.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-5)^2 - (2x-5)(3x-7) \\ &= (2x-5)(2x-5) - (2x-5)(3x-7) \\ &= (2x-5)\left[(2x-5) - (3x-7)\right] \\ &= (2x-5)\left[2x - 5 - 3x + 7\right] \\ &= (2x-5)(-x+2) \end{aligned}$$

Pour tout x réel, $f(x) = (2x-5)(-x+2)$.

5. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

   Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

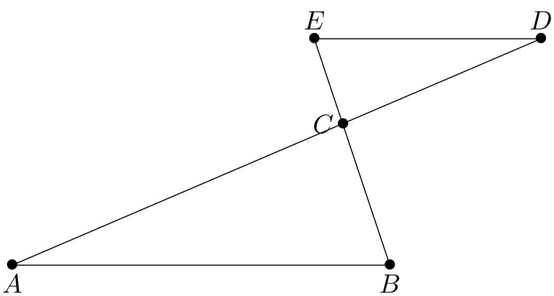
   En utilisant la forme factorisée obtenue à la question précédente, nous pouvons affirmer que dire $f(x) = 0$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
(2x-5)(-x+2) &= 0 \\
2x-5=0 \quad &\text{ou} \quad -x+2=0 \\
2x-5+5=0+5 \quad &\text{ou} \quad -x+2-2=0-2 \\
2x=5 \quad &\text{ou} \quad -x=-2 \\
\frac{2x}{2}=\frac{5}{2} \quad &\text{ou} \quad \frac{-x}{-1}=\frac{-2}{-1} \\
x=\frac{5}{2} \quad &\text{ou} \quad x=2
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\mathscr{S}_1 = \left\{\frac{5}{2};2\right\}$.

III Exercice. 5 points

On considère la figure suivante (attention la figure n'est pas à l'échelle).



On donne :

$CE = 5$ cm,
$CD = 12$ cm,
$CA = 18$ cm,
$CB = 7{,}5$ cm,
$AB = 19{,}5$ cm.

1. Montrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

   Démontrons : $(ED) \parallel (AB)$.

   Configuration de Thalès.
   Les points A, C et D d'une part, B, C et E d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   Hypothèses pour la réciproque du théorème de Thalès.
   D'une part

$$\begin{aligned}\frac{AC}{CD} &= \frac{18}{12}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

   et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{BC}{CE} &= \frac{7{,}5}{5}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

   Donc, par transitivité,
$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}.$$
   Nous en déduisons d'après le théorème de Thalès que

$$\boxed{(AB) \parallel (DE).}$$

2. Montrer que $ED = 13$ cm.

   Calculons ED.

   Configuration de Thalès.

Les points A, C et D d'une part, B, C et E d'autre part sont alignés dans cet ordre.

Hypothèses pour le théorème de Thalès.

D'après la question précédente les droites ED) et (AB) sont parallèles.

Nous en déduisons d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{AB}{ED} = \frac{CA}{CB}$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\frac{19{,}5}{ED} = \frac{18}{12}$$
$$\frac{19{,}5}{ED} = \frac{18}{12}$$

En faisant un produit en croix

$$\begin{aligned} 12 \times 19{,}5 &= 18 \times ED \\ 234 &= 18ED \\ \frac{234}{18} &= \frac{18ED}{18} \\ 13 &= ED \end{aligned}$$

$$\boxed{ED = 13 \text{ cm.}}$$

3. Prouver que le triangle CED est un triangle rectangle.

   Démontrons que CED est rectangle.

   * Remarquons d'abord que $ED > CE$ et $ED > CD$, par conséquent le triangle ne peut être rectangle qu'en C. Ce ue nous allons maintenant démontrer avec le théorème de Pythagore.
   * D'une part : $CE^2+CD^2 = 5^2+12^2 = 169$ et d'autre part $ED^2 = 13^2 = 169$, donc, pr transitivité, $CE^2 + CD^2 = ED^2$. Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que

$$\boxed{CED \text{ est rectangle en } C.}$$

4. Déterminer la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{DEC}$.

Calculons $\widehat{DEC}$.

Puisque DEC est rectangle en C :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{DEC}\right) &= \frac{CE}{ED} \\ &= \frac{5}{13}\end{aligned}$$

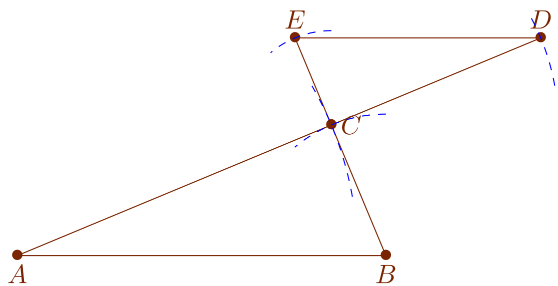
En utilisant la calculatrice nous en déduisons :

$$\widehat{DEC} \approx 67{,}3$$

En arrondissant au degré $\widehat{DEC} \approx 67°$.

5. Faire une figure à l'échelle 1/2.

Le dessin qui est fait ici est à l'échelle 1/4.



IV Exercice. 5 points

Pour chaque question, une seule des cinq réponses proposées est exacte. Le candidat indique sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte une point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en cas de réponse fausse ou d'absence de réponse. Les cinq questions sont indépendantes.

Question 1.

En classe de seconde A, sur 30 élèves, il y a 30 % de filles. En seconde B, sur 20 élèves il y a 70 % de filles. Lorsque les deux classes sont réunies, quel est le pourcentage de filles dans le groupe ?

a) 23 %,

b) 46 %,

c) 100 %,

d) 50 %,

e) 40 %

Déterminons la proportion de filles au total.

Il y a au total $30+20=50$ élèves parmi lesquels il y a $\frac{30}{100}\times 30+\frac{70}{100}\times 20=29{,}7$ filles.
La proportion de fille est donc $\frac{29{,}7}{50}=0{,}594$.

Il y a environ 60 % de filles.

Question 2.

Le nombre $\dfrac{14\times 14^{-10}}{14^{-5}\times 14^{2}}$ est égal à :

a) 14^{-6},

b) 14^{-7},

c) 14^{-13},

d) 0,

e) 1.

Le plus simple consiste à rentrer le calcul tel quel dans la calculatrice et de regarder le résultat obtenu.

Simplifions l'écriture du nombre proposé.

$$\begin{aligned}\frac{14\times 14^{-10}}{14^{-5}\times 14^{2}} &= \frac{14^{1-10}}{14^{-5+2}}\\ &= \frac{14^{-9}}{14^{-3}}\\ &= 14^{-9}\times 14^{3}\\ &= 14^{-9+3}\\ &= 14^{-6}\end{aligned}$$

Question 2 réponse a.

Question 3.

Le couple solution du système d'équation $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y=7 \\ x+5y=-3 \end{array}\right.$ est :

a) $(5;1)$,
b) $(-1;2)$,
c) $(-3;7)$,
d) $(2;-3)$,
e) $(2;-1)$.

Il est possible de résoudre le système mais le plus simple est de tester toutes les solutions proposées et la seule pour laquelle les deux équations sont vérifiées est $(2;-1)$.

Question 3 réponse e.

Question 4.

Un élève a obtenu 18/20 ; 15,5/20 ; 13,5/20 et 13/20 à ses quatre premières évaluations en mathématiques. Combien doit-il avoir à la prochaine évaluation pour que sa moyenne soit d'au moins 15,5/20 ?

a) 15,5,
b) 16,5,
c) 10,

d) 49,6,

e) 18.

Notons z la note qu'il obtiendra à la prochaine évaluation.
On souhaite que la moyenne soit d'au moins 15,5 autrement dit

$$\overline{x} \geqslant 15{,}5$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\frac{18+15{,}5+13{,}5+13+z}{5} &\geqslant 15{,}5\\
\frac{60+z}{5} &\geqslant 15{,}5\\
5\times\frac{60+z}{5} &\geqslant 5\times 15{,}5 \quad \text{car } 5>0\\
60+z &\geqslant 77{,}5\\
60+z-60 &\geqslant 77{,}5-60\\
z &\geqslant 17{,}5
\end{aligned}$$

Question 4 réponse e.

Question 5.

$\sqrt{\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{4}}$ est égal à :

a) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$,

b) $\sqrt{\frac{3}{5}}$,

c) $\frac{\sqrt{7}}{6}$,

d) 1,

e) $\sqrt{\frac{3}{13}}$.

Là encore la calculatrice permet de répondre rapidement en donnant la réponse exacte.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{4}} &= \sqrt{\frac{4\times 4}{9\times 4}-\frac{1\times 9}{4\times 9}} \\
&= \sqrt{\frac{16}{36}-\frac{9}{36}} \\
&= \sqrt{\frac{16-9}{36}} \\
&= \sqrt{\frac{7}{36}} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{36}} \\
&= \frac{sqrt7}{\sqrt{6^2}} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{6}
\end{aligned}$$

Question 5 réponse c.