Concours EETAA session 2017.

Durée : 2 heures.
Calculatrice autorisée.

I Exercice. 4 points

On considère le programme de calcul suivant :
— choisir un nombre ;
— lui ajouter 2 ;
— calculer le carré du résultat ;
— soustraire 3 à ce dernier résultat.
Dans cet exercice, on justifiera chaque réponse en détaillant les étapes des calculs.

1. On applique ce programme de calcul à 0. Justifier qu'on obtient 1.

   Déterminons ce que renvoie ce programme lorsqu'on entre 0.

   Numérotons les différentes instructions.

Étapes	Instructions
1	choisir un nombre
2	ajouter 2
3	calculer le carré du résultat
4	soustraire trois à ce dernier résultat

   Complétons le tableau d'état de la variable.

Étapes	État de la variable
1	0
2	$0+2=2$
3	$2^2=4$
4	$4-3=1$

   Le programme renvoie 1.

   Si nous donnons 0 en entrée dans ce programme, alors en sortie nous obtiendrons 1.

2. À quel nombre négatif peut-on appliquer ce programme de calcul pour obtenir 22 ?

   Déterminons le nombre négatif fourni en entrée pour obtenir 22 en sortie.

   Nous allons reprendre le programme à l'envers.

Étapes	État de la variable
4	$22 = 25 - 3$
3	$25 = 5^2$ ou $25 = (-5)^2$
2	$5 = 3 + 2$ ou $-5 = -7 + 2$
1	3 ou -7

La seule valeur d'entrée négative possible est donc -7.

Une autre rédaction plus élégante consiste à introduire une inconnue, à savoir le nombre choisi en entrée.

Notons x le nombre donné en entrée.

Nous avons donc :

Étapes	État de la variable
1	x
2	$x + 2$
3	$(x + 2)^2$
4	$(x + 2)^2 - 3$

Et nous souhaitons trouver x, négatif tel que

$$(x + 2)^2 - 3 = 22.$$

Comme il ne s'agit pas d'une équation linéaire du premier degré pour la résoudre nous devons essayer de faire apparaître une équation produit.

La précédente équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 - 3 - 22 &= 22 - 22\\ (x + 2)^2 - 25 &= 0\\ (x + 2)^2 - 5^2 &= 0\end{aligned}$$

Nous reconnaissons une identité remarquable.

$$\begin{aligned}[(x + 2) - 5] \times [(x + 2) + 5] &= 0\\ [x - 3] \times [x + 7] &= 0\\ x - 3 = 0 \quad &\text{ou} \quad x + 7 = 0\\ x - 3 + 3 = 0 + 3 \quad &\text{ou} \quad x + 7 - 7 = 0 - 7\\ x = 3 \quad &\text{ou} \quad x = -7\end{aligned}$$

Le seul nombre négatif qui renvoie 22 est -7.

3. On applique ce programme de calcul à un nombre x.

   (a) Justifier qu'on obtient le nombre x^2+4x+1.

   Démontrons que le programme renvoie x^2+4x+1.

   Au cours de la deuxième manière de démonstration de la question précédente, nous avons démontré que si nous entrons x dans le programme celui-ci renvoie $(x+2)^2-3$.
   Développons, ordonnons puis réduisons cette dernière expression.

   Nous reconnaissons une identité remarquable :

$$\begin{aligned}(x+2)^2-3 &= x^2+2\times x\times 2+2^2-3\\ &= x^2+4x+4-3\\ &= x^2+4x+1\end{aligned}$$

   Nous avons démontré que si nous entrons x, alors nous obtiendrons x^2+4x+1 en sortie.

   (b) Ce résultat peut-il être égale à 1 ?

   Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+4x+1=1$.

   $x^2+4x+1=1$ n'est pas une équation linéaire du premier degré, pour la résoudre nous allons donc faire apparaître une équation produit.
   $x^2+4x+1=1$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned}x^2+4x+1-1 &= 1-1\\ x^2+4x &= 0\end{aligned}$$

Nous remarquons un facteur commun.

$$\begin{aligned} x \times x + 4x &= 0 \\ x(x+4) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} &\quad x + 4 = 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} &\quad x + 4 - 4 = 0 - 4 \\ x = 0 \quad \text{ou} &\quad x = -4 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathscr{S} = \{0; -4\}.$$

Le résultat peut être égale à 1 si $x = 0$ ou $x = -4$.

II Exercice. 5 points

Un particulier souhaite installer des panneaux photovoltaïques pour sa résidence principale. Pour réaliser ce projet il consulte deux entreprises dont les conditions de ventes sont les suivantes :

Entreprise A : Prix hors taxe du matériel : 5,20 € par watt-crête (Wc). Forfait pose 3 500 €.

Entreprise B : Prix hors taxe du matériel : 6,60 € par watt-crête. Pose gratuite.

Le watt-crête est une unité de mesure représentant la puissance maximale d'un dispositif.

On note x la puissance (en Wc) de l'installation, avec x variant sur $[0; 3\,000]$.
On note $f(x)$ le prix hors taxe à payer en utilisant l'entreprise A.
On note $g(x)$ le prix hors taxe à payer en utilisant l'entreprise B.

1. Exprimer $f(x)$ puis $g(x)$ en fonction de x.

Quelque soit $x \in [0; 3\,000]$,

$$f(x) = 5{,}20x + 3\,500 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 6{,}6x.$$

2. Pour une installation de 1 000 Wc, quelle est l'entreprise la plus avantageuse ? Justifier.

   Déterminons l'entreprise la plus avantageuse pour 1 000 Wc.

   $f(1\,000) = 5{,}20 \times 1\,000 + 3\,500 = 8\,700$.
   $g(1\,000) = 6{,}60 \times 1\,000 = 6\,600$.
   Pour 1 000 Wc l'installation par l'entreprise A coûte 8 700 € tandis que pour l'entreprise B elle coûte 6 600 €.

   Pour une installation de 1 000 Wc l'entreprise B est plus avantageuse.

3. Dans un repère orthogonal (unités : 1 cm pour 300 Wc en abscisses et 1 cm pour 1 000 € en ordonnées), tracer les droites d_1 et d_2 d'équations respectives :

$$d_1 : \ y = 5{,}20x + 3\,500 \quad \text{et} \quad d_2 : \ y = 6{,}6x.$$

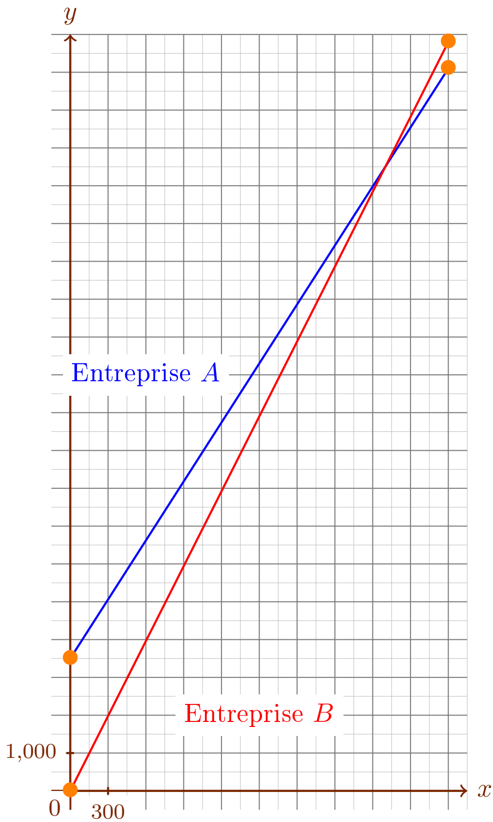
   Pour tracer une droite il suffit de connaître deux points distincts.

$$5{,}20 \times 0 + 3\,500 = 3\,500$$
$$5{,}20 \times 3\,000 + 3\,500 = 19\,100$$

   Donc $(0; 3\,500)$ et $(3\,000; 19\,100)$ sont des points de d_1.

$$6{,}6 \times 0 = 0$$
$$6{,}6 \times 3\,000 = 19\,800$$

   Donc $(0; 0)$ et $(3\,000; 19\,800)$ sont des points de d_2.



4. Résoudre l'inéquation $g(x) \leq f(x)$. Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

Résolvons l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.

Il s'agit d'une inéquation linéaire du premier degré. Elle se résout donc simplement en "isolant" le x.

Cette inéquation équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
6{,}6x &\leq 5{,}2x + 3500 \\
6{,}6x - 5{,}2x &\leq 5{,}2x + 3500 - 5{,}2x \\
(6{,}6 - 5{,}2)x &\leq 3500 \\
1{,}4x &\leq 3500 \\
\frac{1{,}4x}{1{,}4} &\leq \frac{3500}{1{,}4} \quad \text{car } 1{,}4 > 0 \\
x &\leq 2500 \\
x &\in]-\infty; 2\,500]
\end{aligned}$$

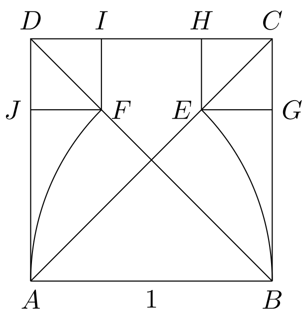
L'ensemble des solutions dans $[0; 3\,000]$ de $g(x) \leq f(x)$ est

$\mathscr{S} = [0; 2\,500]$.

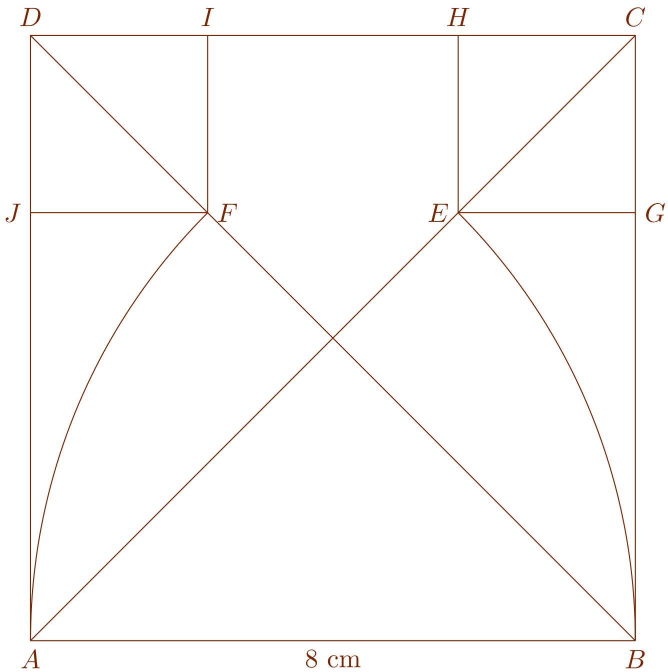
Le coût de l'installation est plus avantageux avec l'entreprise B tant que la puissance de l'installation est inférieure à $2\,500$ Wc.

III Exercice. 6 points

$ABCD$ est un carré de côté 1 unité.
Le cercle de centre A et de rayon $[AB]$ coupe de le segment $[AC]$ en E.
Le cercle de centre B et de rayon $[BA]$ coupe le segment $[BD]$ en F.
$EGCH$ et $FIDJ$ sont des carrés.



1. Faire une figure en vraie grandeur en prenant 8 cm pour 1 unité.



2. Montrer, par le calcul, les égalités suivantes :

   (a) $AC = \sqrt{2}$,

   Calculons AC.

   $ABCD$ est un carré donc ABC est un triangle isocèle rectangle en B. ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

   Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 &= AC^2 \\ 2 &= AC^2 \end{aligned}$$

   Puisque AC est une longueur, c'est un nombre positif donc

$$\sqrt{2} = AC$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{AC = \sqrt{2}.}$$

(b) $HG = \sqrt{2} - 1$.

$E \in [AC]$ donc

$$AC = AE + EC$$

D'après la question précédente :

$$\sqrt{2} = AE + EC$$

Puisque E est sur le cercle de centre A et de rayon AB :

$$\sqrt{2} = 1 + EC$$

$EGCH$ étant un carré ses diagonales ont même longueur donc

$$\sqrt{2} = 1 + HG$$

Enfin

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - 1 &= 1 + HG - 1 \\ \sqrt{2} - 1 &= HG \end{aligned}$$

Nous avons établi

$$\boxed{HG = \sqrt{2} - 1.}$$

3. Donner la mesure en degrés de l'angle $\widehat{GHC}$.

Déterminons la mesure de $\widehat{GHC}$.

$EGCH$ est un carré donc ses diagonales sont des axes de symétrie, et, en particulier elles sont des bissectrices des angles aux sommets.
Ainsi (HG) est la bissectrice de $\widehat{EHC}$. Or $\widehat{EHC} = 90\ °$ est droit donc $\widehat{GHC} = \frac{90}{2} = 45\ °$.

$$\boxed{\widehat{GHC} = 45\ °.}$$

4. En déduire que $HC = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

   Calculons HC.

   $EGCH$ est un carré donc CHG est isocèle rectangle en C. Donc

$$\cos\left(\widehat{GHC}\right) = \frac{HC}{HG}$$

   D'après la question précédente

$$\begin{aligned}\cos(45) &= \frac{HC}{HG}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{HC}{HG}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\times HG &= \frac{HC}{HG}\times HG\\ HG\frac{\sqrt{2}}{2} &= HC\end{aligned}$$

   D'après une précédente question :

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{2}}{2} &= HC\\ \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}-1\times\sqrt{2}}{2} &= HC\end{aligned}$$

   Finalement

$$\boxed{HC = \tfrac{2-\sqrt{2}}{2}.}$$

5. Dans cette question, on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :
   $ID = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.
   Démontrer qu'alors : $IH = HG$.

   Démontrons : $IH = HG$.

   D, I, H et C sont alignés dans cet ordre et $DC = 1$ donc

$$DI + IH + HC = 1.$$

Étant donné le résultat donné dans l'énoncé et celui de la question précédente nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned}
IH + 2\frac{2-\sqrt{2}}{2} &= 1 \\
IH + (2-\sqrt{2}) &= 1 \\
IH + (2-\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2}) &= 1 - (2-\sqrt{2}) \\
IH &= 1 - (2-\sqrt{2}) \\
IH &= 1 - 2 + \sqrt{2} \\
IH &= \sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

Or $HG = \sqrt{2} - 1$ donc

$$\boxed{IH = HG.}$$

IV Exercice. 5 points

Pour chaque question, une seule des cinq réponses proposées est exacte.

Le candidat indique sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en cas de réponse fausse ou d'absence de réponse. Les cinq questions sont indépendantes.

Question 1.

Le nombre $\dfrac{(-2)^2 + \frac{1}{2}}{(-2)^2 - \frac{1}{2}}$ est égale à :

a) -1,

b) $\dfrac{5}{8}$,

c) $\dfrac{7}{9}$,

d) 1,

e) $\dfrac{9}{7}$.

La plupart des calculatrices donnent actuellement une réponse exacte pour ce calcul.

$$\begin{aligned}
\frac{(-2)^2+\frac{1}{2}}{(-2)^2-\frac{1}{2}} &= \frac{4+\frac{1}{2}}{4-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{8}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{8}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{9}{2}}{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{9}{2}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{-1} \\
&= \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{7} \\
&= \frac{9\times 2}{2\times 7} \\
&= \frac{9}{7}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{(-2)^2+\frac{1}{2}}{(-2)^2-\frac{1}{2}} = \frac{9}{7}.}$$

Question 2.

Le nombre $\left(10^{16}\right)^4+1-\dfrac{10^{40}\times 10^{30}}{10^6}$ est égale à :

a) 0,

b) 1,

c) 2,

d) 10,

e) $10^{20}+1-10^{200}$.

Là encore les nombres sont suffisamment petits pour qu'un calculatrice de lycée gère ce calcul.

$$\begin{aligned}
\left(10^{16}\right)^4+1-\frac{10^{40}\times 10^{30}}{10^6} &= 10^{16\times 4}+1-\frac{10^{40+30}}{10^6}\\
&= 10^{64}+1-\frac{10^{70}}{10^6}\\
&= 10^{64}+1-10^{70}\times\left(10^6\right)^{-1}\\
&= 10^{64}+1-10^{70}\times 10^{-6}\\
&= 10^{64}+1-10^{70-6}\\
&= 10^{64}+1-10^{64}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(10^{16}\right)^4+1-\frac{10^{40}\times 10^{30}}{10^6}=1.}$$

Question 3.

x et y sont deux nombres tels que : $y=4-\dfrac{x}{2}$.

Alors :

a) $x=-\dfrac{7}{2}$,

b) $x=4-2y$,

c) $x=8-2y$,

d) $x=\dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{2}$,

e) $x=2(y-4)$.

Exprimons x en fonction de y.

$$\begin{aligned}
y=4-\frac{X}{2} &\Leftrightarrow y-4=4-\frac{x}{2}-4\\
&\Leftrightarrow y-4=-\frac{x}{2}\\
&\Leftrightarrow (y-4)\times(-2)=-\frac{x}{2}\times(-2)\\
&\Leftrightarrow -2(y-4)=x\\
&\Leftrightarrow (-2)\times y+(-2)\times(-4)=x\\
&\Leftrightarrow -2y+4=x
\end{aligned}$$

$$x = 4 - 2y.$$

Dans les questions **4** et **5**, on s'intéresse, dans une production de 127 œufs, à la masse en grammes de chaque œuf :

Masse (en g)	60	62	64	65	67
Effectif	11	20	32	38	26

Question 4.

La moyenne, notée $\overline{x}$, et la médiane, notée Me, sont égales à :

a) $\overline{x} = \dfrac{8160}{127}$ et $Me = 64$,

b) $\overline{x} = \dfrac{8160}{127}$ et $Me = 65$,

c) $\overline{x} = \dfrac{318}{5}$ et $Me = 64$,

d) $\overline{x} = \dfrac{318}{5}$ et $Me = 65$,

e) $\overline{x} = \dfrac{318}{127}$ et $Me = 64$

Là encore la calculatrice ferait très bien le travail.

Déterminons Me.

Calculons les effectifs cumulés croissants.

Masse (en g)	60	62	64	65	67
Effectif	11	20	32	38	26
E.C.C.	11	31	63	101	137

Étape 1 La série des poids est rangée dans l'ordre croissant.

Étape 2 $\frac{N}{2} = \frac{127}{2} = 63{,}5$. La série est impaire donc la médiane est la soixante-quatrième valeur de la série des poids.

Étape 3 D'après les E.C.C.

$$Me = 65.$$

Calculons $\overline{x}$.

La série est regroupée par modalités, nous allons donc calculer $\overline{x}$ avec la formule de la moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{11 \times 60 + 20 \times 62 + 32 \times 64 + 38 \times 65 + 26 \times 67}{11 + 20 + 32 + 38 + 26} \\ &= \frac{8160}{127}\end{aligned}$$

$$\overline{x} = \tfrac{8160}{127}.$$

Question 5.

L'écart interquartiles est égale à :

a) 0,

b) 1,

c) 2,

d) 3,

e) 7.

La calculatrice permet de déterminer les quartiles.

Déterminons le premier quartile.

Étape 1 La série des poids est rangée dans l'ordre croissant.

Étape 2 $\frac{N}{4} = \frac{127}{4} = 31{,}75$. Q_1 est donc la trente-deuxième valeur de la série des poids.

Étape 3 D'après les E.C.C.

$$Q_1 = 64.$$

Déterminons Q_3.

Étape 1 La série des poids est rangée dans l'ordre croissant.

Étape 2 $\frac{3}{4}N = \frac{3}{4} \times 127 = 95{,}25$. Q_3 est quatre-vingt-seizième valeur de la série des poids.

Étape 3 D'après les E.C.C.

$$\boxed{Q_3 = 65.}$$

L'écart interquartile est : $Q_3 - Q_1 = 65 - 64 = 1$.