Concours EETAA session 2016.

Durée de l'épreuve 2 heures.

I Exercice. (5 points)

1. Calculons A.

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1\times 4}{5\times 4} - \frac{5\times 5}{4\times 5}\right) \div \left(\frac{1\times 4}{5\times 4} + \frac{5\times 5}{4\times 5}\right)\\
&= \frac{4-20}{20} \div \frac{4+25}{20}\\
&= \frac{-16}{20} \div \frac{29}{20}\\
&= \frac{-16}{20} \times \frac{20}{29}\\
&= \frac{-16}{29}
\end{aligned}$$

16 et 29 sont premiers entre eux donc la fraction est irréductible et

$$\boxed{A = -\tfrac{16}{29}.}$$

2. Calculons B

.

$$\begin{aligned}
B &= \frac{6\times (10^{4\times 2})\times 16\times 10^4}{4\times 10^{16}}\\
&= \frac{6\times 16\times 10^8\times 10^4}{4\times 10^{16}}\\
&= \frac{6\times 16}{4} \times \frac{10^{8+4}}{10^{16}}\\
&= 6\times 4\times 10^{12}\times 10^{-16}\\
&= 24\times 10^{12-16}\\
&= 24\times -4
\end{aligned}$$

Donc l'écriture décimale est $B = 0{,}0024$,

et son écriture scientifique $B = 2{,}4 \times 10^{-3}$.

3. Exprimons C sous la forme souhaitée.

$$\begin{aligned} C &= 2\sqrt{4\times 7} + 5\sqrt{9\times 7} - 4\sqrt{16\times 7} \\ &= 2\sqrt{4}\times\sqrt{7} + 5\sqrt{9}\times\sqrt{7} - 4\sqrt{16}\times\sqrt{7} \\ &= 2\times 2\sqrt{7} + 5\times 3\sqrt{7} - 4\times 4\sqrt{7} \\ &= 4\sqrt{7} + 15\sqrt{7} - 16\sqrt{7} \\ &= 3\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$C = 3\sqrt{7}$$

4. Résolvons le système.

Le système proposé équivaut successivement à

$$\begin{cases} 5x - 3y = 35 \\ 5x + 10y = -30 \end{cases} \qquad 5\times L_2 \to L_2$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 35 \\ -13y = 65 \end{cases} \qquad L_1 - L_2 \to L_2$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 35 \\ y = -5 \end{cases} \qquad \tfrac{-1}{13}L_2 \to L_2$$

$$\begin{cases} 5x = 35 + 3\times(-5) \\ y = -5 \end{cases} \qquad 3L_2 + L_1 \to L_1$$

$$\begin{cases} x = \tfrac{1}{5}(35 - 15) \\ y = -5 \end{cases} \qquad \tfrac{1}{5}L_1 \to L_1$$

Finalement le système admet une solution unique formée du couple $(x,y) = (4, -5)$.

II Exercice. (4 points)

1. $1+4+7+3+2=17$ élèves ont une note inférieure ou égale à 12 ce qui représente un pourcentage de $\frac{17}{25}\times 100$

   Le pourcentage d'élèves ayant une note inférieure ou égale à 12 est 68 %.

2. Déterminons la médiane.

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	1	0	4	0	7	3	2	0
E.C.C.	1	1	5	5	12	15	17	17

Notes	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	1	3	2	0	0	0	2
E.C.C.	18	21	23	23	23	23	25

   La série des notes est ordonnée de façon croissante.
   $\frac{N}{2}=\frac{25}{2}=12{,}5$. La médiane est donc (série impaire) la treizième valeur de la série.

   $Me = 11.$

3. Calculons la moyenne.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_rx_r}{n_1+n_2+\cdots+n_r}\\ &= \frac{1\times 6+0\times 7+\cdots+2\times 20}{1+0+\cdots+2}\\ &= 11{,}84\end{aligned}$$

   $\overline{x} = 11{,}84.$

4. Déterminons la note du 26$^{\text{e}}$ élève.

   Notons y la note recherchée. D'après l'énoncé on doit avoir

$$12 = \frac{25\times\overline{x}+y}{26}$$

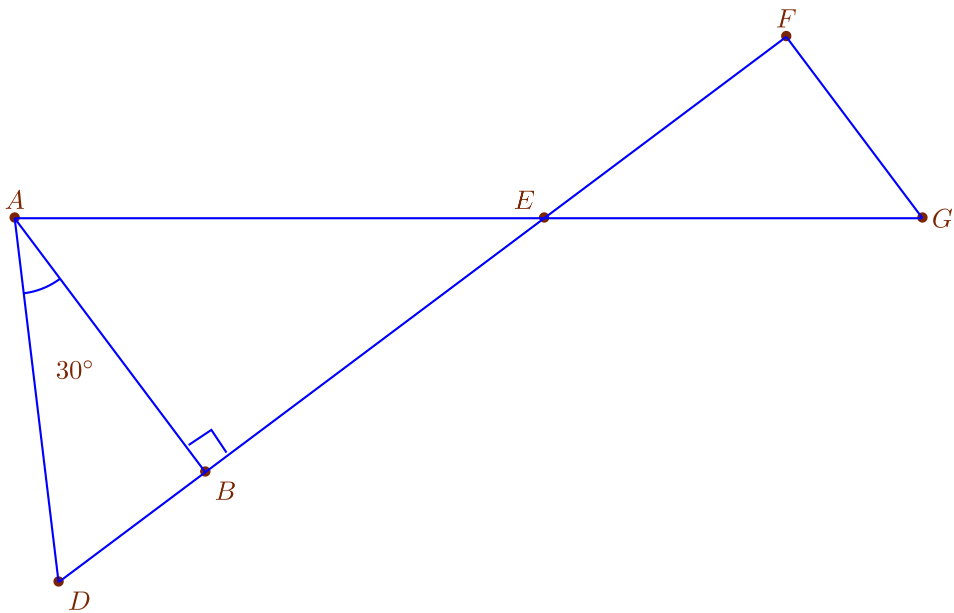
Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré d'inconnue y qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 26\times 12 &= 26\times\frac{25\times\overline{x}+y}{26} \\ 26\times 12-25\times\overline{x} &= 25\times\overline{x}+y-25\times\overline{x} \\ 26\times 12-25\times\overline{x} &= y \end{aligned}$$

Finalement $y = 16$.

III Exercice. (6 points)

1.



2. Démontrons que EFG est rectangle en F.

D'une part

$$\begin{aligned} EF^2+FG^2 &= 4^2+3^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} EG^2 &= 5^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

donc $EF^2 + FG^2 = EG^2$.
De cette égalité nous déduisons, d'après le théorème de Pythagore, que

$\boxed{EFG \text{ est rectangle en } F.}$

3. Montrons que $(AB)//(FG)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (AB) \perp (BF) \\ (FG) \perp (BF) \end{array} \right. \Rightarrow (AB)//(FG).$$

$\boxed{(FG)//(AB).}$

4. (a) Calculons EB.

Les points A, E, G d'une part et B, E, F d'autre part sont alignés dans le même ordre. Nous avons donc une configuration de Thalès.
Comme d'après la question précédente $(FG)//(AB)$, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{EF}{EB} = \frac{EG}{EA}$$

Cette égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} EF \times EA &= EB \times EG, \quad \text{produit en croix} \\ \frac{EF \times EA}{EG} &= EB \\ \frac{4 \times 7}{5} &= EB \\ \frac{28}{5} &= EB \end{aligned}$$

$\boxed{\text{En utilisant le théorème de Thalès nous avons calculé } EB = 5{,}6 \text{ cm.}}$

(b) Voir ci-dessus.

5. (a) Calculons AB.

ABE est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 + BE^2 = AE^2$$

Cette égalité est successivement équivalente à

$$AB^2 = AE^2 - BE^2$$
$$AB^2 = 7^2 - 5{,}6^2$$
$$AB^2 = 17{,}64$$

Et comme AB est une longueur donc un nombre positif

$$AB = \sqrt{17{,}64}$$
$$AB = 4{,}2$$

> En utilisant le théorème de Pythagore nous avons démontré que $AB = 4{,}2$.

(b) Voir ci-dessus.

6. Déterminons une valeur approchée de DB.

De $\tan\left(\widehat{DAB}\right) = \frac{DB}{AB}$ nous déduisons

$$\begin{aligned} DB &= AB \times \tan\left(\widehat{DAB}\right) \\ &= 4{,}2 \times \tan(30) \end{aligned}$$

Avec la caclulatrice

$$DB \approx 2{,}425$$

> Une valeur approchée à 0,1 près de DB est $DB \approx 2{,}4$ cm.

7. Calculons l'aire $\mathcal{A}(AED)$ de AED.

   Puisque (AB) est la hauteur de AED issue de A

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(AED) &= \frac{1}{2}AB \times DE \\ &= \frac{1}{2} \times 4{,}2 \times (5{,}6 + DB)\end{aligned}$$

   En utilisant la valeur approchée trouvée à la question précédente

$$\mathcal{A}(AED) \approx 16{,}8$$

$$\boxed{\mathcal{A}(AED) \approx 16{,}8 \text{ cm}^2.}$$

IV Exercice. (5 points)

Question 1.

Calculons le taux d'évolution en pourcentage.

$$\begin{aligned}t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 1000 \\ &= \frac{25\,500 - 34\,000}{34\,000} \times 100 \\ &= -25\ \%\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le pourcentage de réduction est de 25 \%.}}$$

Question 2.

Développons, réduisons et ordonnons l'expression de f.

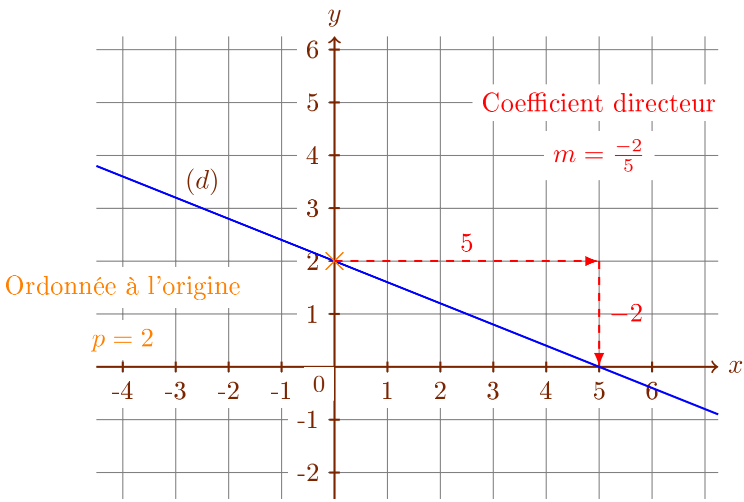
$$\begin{aligned}f(x) &= (3x-1)^2 - x^2 \\ &= \left[(3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2\right] - x^2 \\ &= 3^2 \times x^2 - 6x + 1 - x^2 \\ &= (9-1)x^2 - 6x + 1\end{aligned}$$

La forme développée, réduite et ordonnée de f est
$f(x) = 8x^2 - 6x + 1$.

Question 3.

(d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées elle admet donc une équation réduite dans le repère proposé.

Déterminons l'équation réduite de (d).



L'équation réduite de (d) est $y = -\frac{2}{5}x + 2$.

Et donc (d) est la représentation graphique de la fonction affine définie par $g(x) = -\frac{2}{5}x + 2$.

Il était également possible de relever les coordonnées de deux points de (d) puis de calculer le coefficient directeur (formule du taux d'accroissement) et enfin l'ordonnée à l'origine.

Question 4.

Après avoir testé les valeurs proposées nous rédigeons au propre.

Vérifions que 0 et $\frac{1}{5}$ sont des antécédents de 0 par h.

$$\begin{aligned} h(0) &= 5 \times 0^2 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{5}\right) &= 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 - (\frac{1}{5} \\ &= 5 \times \frac{1^2}{5^2} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{5 \times 1^2}{5^2} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{5 \times 1}{5 \times 5} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi 0 et $\frac{1}{5}$ sont des antécédents de 0 par h.

Question 5.

Résolvons l'inéquation $4 - 3x \leq x + 2$.

Cette inéquation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 4 - 3x + 3x &\leq x + 2 + 3x \\ 4 &\leq 4x + 2 \\ 4 - 2 &\leq 4x + 2 - 2 \\ 2 &\leq 4x \\ \frac{2}{4} &\leq \frac{4x}{4} \\ \frac{1}{2} &\leq x \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Les solutions sont les nombres x vérifiant $x \geq \frac{1}{2}$.