Concours EETAA session 2016.

Durée de l'épreuve 2 heures.

I Exercice. (5 points)

Dans cet exercice, les quatre questions sont indépendantes.Vous détaillerez les calculs :

1. Soit $A=\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{5}{4}\right)\div\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{5}{4}\right)$. Calculer A en détaillant les calculs et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

   Calculons A.

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1\times 4}{5\times 4}-\frac{5\times 5}{4\times 5}\right)\div\left(\frac{1\times 4}{5\times 4}+\frac{5\times 5}{4\times 5}\right)\\
&= \frac{4-25}{20}\div\frac{4+25}{20}\\
&= \frac{-21}{20}\div\frac{29}{20}\\
&= \frac{-21}{20}\times\frac{20}{29}\\
&= \frac{-21}{29}
\end{aligned}$$

   21 et 29 sont premiers entre eux donc la fraction est irréductible et

$$\boxed{A=-\tfrac{21}{29}.}$$

2. On donne $B=\dfrac{6\times(10^4)^2\times 1{,}6\times 10^5}{0{,}4\times 10^{17}}$. Donner l'écriture décimale de B puis son écriture scientifique.

   Calculons B

   .

$$\begin{aligned} B &= \frac{6 \times (10^{4\times 2}) \times 16 \times 10^4}{4 \times 10^{16}} \\ &= \frac{6 \times 16 \times 10^8 \times 10^4}{4 \times 10^{16}} \\ &= \frac{6 \times 16}{4} \times \frac{10^{8+4}}{10^{16}} \\ &= 6 \times 4 \times 10^{12} \times 10^{-16} \\ &= 24 \times 10^{12-16} \\ &= 24 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Donc l'écriture décimale est $B = 0{,}0024$,

et son écriture scientifique $B = 2{,}4 \times 10^{-3}$.

3. Soit $C = 2\sqrt{4 \times 7} + 5\sqrt{63} - 4\sqrt{112}$. Écrire C sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers, b le plus petit possible.

   Exprimons C sous la forme souhaitée.

$$\begin{aligned} C &= 2\sqrt{4 \times 7} + 5\sqrt{9 \times 7} - 4\sqrt{16 \times 7} \\ &= 2\sqrt{4} \times \sqrt{7} + 5\sqrt{9} \times \sqrt{7} - 4\sqrt{16} \times \sqrt{7} \\ &= 2 \times 2\sqrt{7} + 5 \times 3\sqrt{7} - 4 \times 4\sqrt{7} \\ &= 4\sqrt{7} + 15\sqrt{7} - 16\sqrt{7} \\ &= 3\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$C = 3\sqrt{7}$$

4. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 5x - 3y = 35 \\ x + 2y = -6 \end{cases}$$

Résolvons le système.

Le système proposé équivaut successivement à

$$\begin{cases} 5x - 3y = 35 \\ 5x + 10y = -30 & 5 \times L_2 \rightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 35 \\ -13y = 65 & L_1 - L_2 \rightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 35 \\ y = -5 & \frac{-1}{13} L_2 \rightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = 35 + 3 \times (-5) & 3L_2 + L_1 \rightarrow L_1 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(35 - 15) & \frac{1}{5} L_1 \rightarrow L_1 \\ y = -5 \end{cases}$$

Finalement le système admet une solution unique formée du couple $(x,y) = (4, -5)$.

II Exercice. (4 points)

Les 25 élèves d'une classe de 1$^{\text{ère}}$ ont obtenu les notes suivantes, lors d'un contrôle de mathématiques :

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	1	0	4	0	7	3	2	0

Notes	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	1	3	2	0	0	0	2

1. Quel est le pourcentage d'élèves ayant eu une note inférieure ou égale à 12 ?

   $1 + 4 + 7 + 3 + 2 = 17$ élèves ont une note inférieure ou égale à 12 ce qui représente un pourcentage de $\frac{17}{25} \times 100$

   Le pourcentage d'élèves ayant une note inférieure ou égale à 12 est 68 %.

2. Déterminer la médiane de ce relevé de notes.

Déterminons la médiane.

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	1	0	4	0	7	3	2	0
E.C.C.	1	1	5	5	12	15	17	17

Notes	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	1	3	2	0	0	0	2
E.C.C.	18	21	23	23	23	23	25

La série des notes est ordonnée de façon croissante.
$\frac{N}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$. La médiane est donc (série impaire) la treizième valeur de la série.

$$Me = 11.$$

3. Déterminez la moyenne de cette classe pour ce devoir.

Calculons la moyenne.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}\\ &= \frac{1 \times 6 + 0 \times 7 + \cdots + 2 \times 20}{1 + 0 + \cdots + 2}\\ &= 11{,}84\end{aligned}$$

$$\overline{x} = 11{,}84.$$

4. Quelle note devrait obtenir un 26e élève pour que la moyenne de cette classe soit exactement égale à 12 ?

Déterminons la note du 26e élève.

Notons y la note recherchée. D'après l'énoncé on doit avoir

$$12 = \frac{25 \times \overline{x} + y}{26}$$

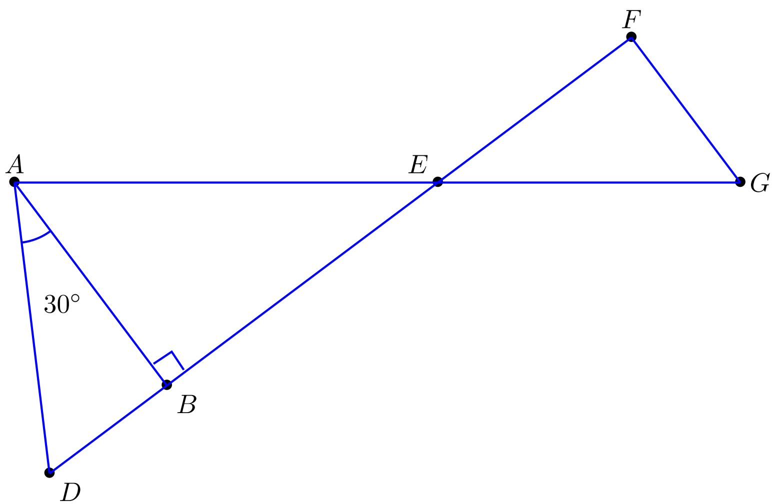
Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré d'inconnue y qui équivaut successivement à

$$26 \times 12 = 26 \times \frac{25 \times \overline{x} + y}{26}$$
$$26 \times 12 - 25 \times \overline{x} = 25 \times \overline{x} + y - 25 \times \overline{x}$$
$$26 \times 12 - 25 \times \overline{x} = y$$

Finalement $y = 16$.

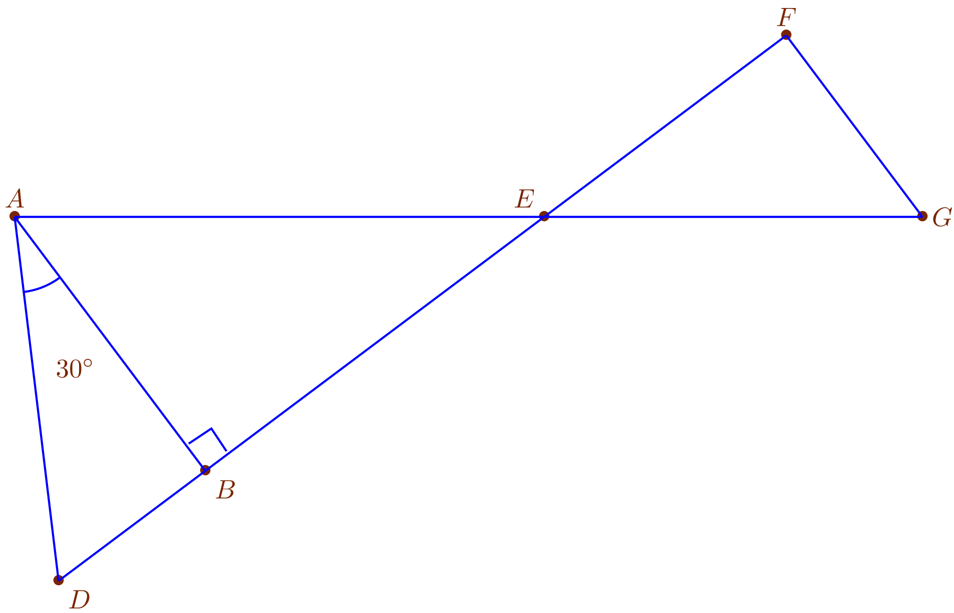
III Exercice. (6 points)

On considère la figure ci-dessous (les dimensions ne sont pas respectées).



On sait que $EF = 4$ cm ; $FG =$ 3cm ; $EG = 5$ cm ; $AE = 7$ cm ; $\widehat{DAB} = 30°$.
Les points A, E et G sont alignés ; les points D, E et F sont alignés.
(AB) est la hauteur issue de A dans le triangle AED.

1. Faire une figure en vraie grandeur.



2. Démontrer que le triangle EFG est un triangle rectangle. Justifier à l'aide d'un théorème.

Démontrons que EFG est rectangle en F.

D'une part

$$\begin{aligned} EF^2 + FG^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} EG^2 &= 5^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

donc $EF^2 + FG^2 = EG^2$.
De cette égalité nous déduisons, d'après le théorème de Pythagore, que

$$\boxed{EFG \text{ est rectangle en } F.}$$

3. En déduire que la droite (FG) est parallèle à la droite (AB).

   Montrons que $(AB)//(FG)$.

   $$\left\{\begin{array}{l}(AB)\perp(BF)\\(FG)\perp(BF)\end{array}\right. \Rightarrow (AB)//(FG).$$

   $$\boxed{(FG)//(AB).}$$

4. On souhaite calculer la valeur exacte de EB.

   (a) Quel théorème peut-on utiliser ?

   Calculons EB.

   Les points A, E, G d'une part et B, E, F d'autre part sont alignés dans le même ordre. Nous avons donc une configuration de Thalès.
   Comme d'après la question précédente $(FG)//(AB)$, d'après le théorème de Thalès

   $$\frac{EF}{EB}=\frac{EG}{EA}$$

   Cette égalité équivaut successivement à

   $$\begin{aligned} EF\times EA &= EB\times EG, \quad \text{produit en croix}\\ \frac{EF\times EA}{EG} &= EB\\ \frac{4\times 7}{5} &= EB\\ \frac{28}{5} &= EB \end{aligned}$$

   En utilisant le théorème de Thalès nous avons calculé $EB = 5{,}6$ cm.

   (b) Prouver que $EB = 5{,}6$ cm.

   Voir ci-dessus.

5. On souhaite calculer la valeur exacte de AB.

(a) Quel théorème peut-on utiliser ?

Calculons AB.

ABE est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$AB^2 + BE^2 = AE^2$$

Cette égalité est successivement équivalente à

$$AB^2 = AE^2 - BE^2$$
$$AB^2 = 7^2 - 5{,}6^2$$
$$AB^2 = 17{,}64$$

Et comme AB est une longueur donc un nombre positif

$$AB = \sqrt{17{,}64}$$
$$AB = 4{,}2$$

En utilisant le théorème de Pythagore nous avons démontré que $AB = 4{,}2$.

(b) Prouver que $AB = 4{,}2$ cm.

Voir ci-dessus.

6. Dans le triangle DAB, montrer par le calcul qu'une valeur approchée à 0,1 près de DB est : $DB \approx 2{,}4$ cm.

Déterminons une valeur approchée de DB.

De $\tan\left(\widehat{DAB}\right) = \frac{DB}{AB}$ nous déduisons

$$DB = AB \times \tan\left(\widehat{DAB}\right)$$
$$= 4{,}2 \times \tan(30)$$

Avec la caclulatrice

$$DB \approx 2{,}425$$

Une valeur approchée à 0,1 près de DB est $DB \approx 2{,}4$ cm.

7. Calculer l'aire du triangle AED. On donnera la valeur arrondie à 1 cm^2 près.

   Calculons l'aire $\mathcal{A}(AED)$ de AED.

   Puisque (AB) est la hauteur de AED issue de A

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(AED) &= \frac{1}{2}AB \times DE \\ &= \frac{1}{2} \times 4{,}2 \times (5{,}6 + DB)\end{aligned}$$

   En utilisant la valeur approchée trouvée à la question précédente

$$\mathcal{A}(AED) \approx 16{,}8$$

$$\boxed{\mathcal{A}(AED) \approx 17 \text{ cm}^2.}$$

IV Exercice. (5 points)

Pour chaque question, une seule des cinq réponses proposées est exacte.

Le candidat indique sur la copie **le numéro de la question et la réponse choisie**.

Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée.

Aucun point n'est enlevé en cas de réponse fausse ou d'absence de réponse.

Les cinq questions sont indépendantes.

Question 1.

Un véhicule est indiqué chez un concessionnaire au prix de 34 000 €. Un mandataire propose le même véhicule au prix de 25 500 €. Le pourcentage de réduction par rapport au prix affiché chez le concessionnaire est :

- 33 %
- 0,75 %
- 8,5 %
- 25 %
- 75 %

Calculons le taux d'évolution en pourcentage.

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 1000 \\ &= \frac{25\,500 - 34\,000}{34\,000} \times 100 \\ &= -25\ \% \end{aligned}$$

Le pourcentage de réduction est de 25 %.

Question 2.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (3x-1)^2 - x^2$.
La forme développée, réduite de f est :

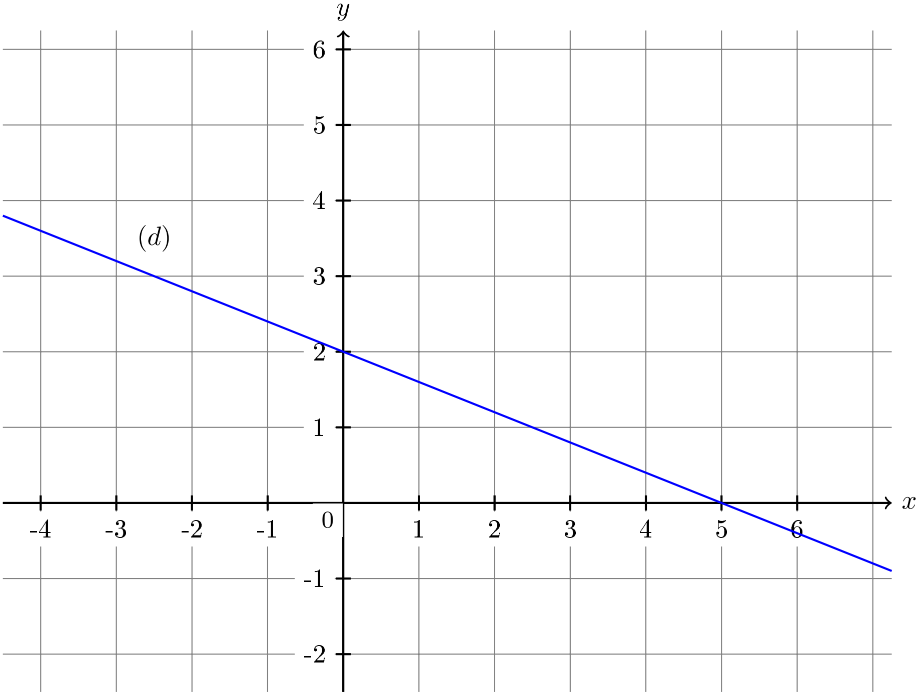
- $f(x) = 2x^2 - 1$
- $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$
- $f(x) = 8x^2 - 6x + 1$
- $f(x) = 8x^2 - 1$
- $f(x) = 8x^2 + 6x + 1$.

Développons, réduisons et ordonnons l'expression de f.

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x-1)^2 - x^2 \\ &= \left[(3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2\right] - x^2 \\ &= 3^2 \times x^2 - 6x + 1 - x^2 \\ &= (9-1)x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

La forme développée, réduite et ordonnée de f est
$f(x) = 8x^2 - 6x + 1$.

Question 3.

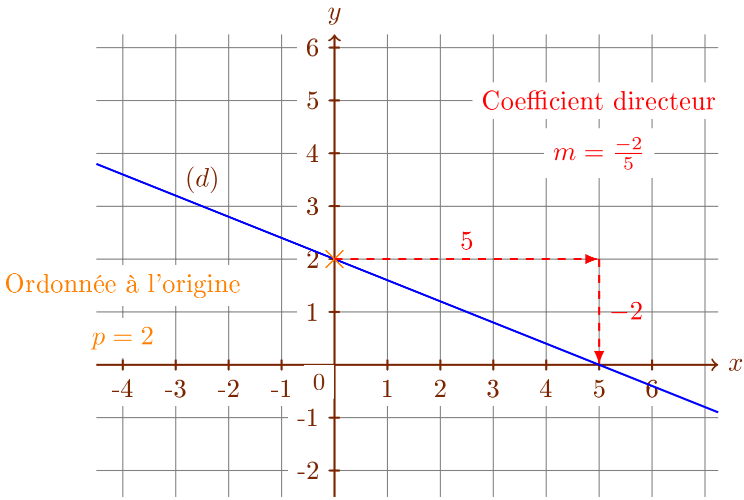


La droite (d) est la représentation graphique de la fonction affine g définie par :

- $g(x) = 5x + 2$
- $g(x) = 2x + 5$
- $g(x) = -\frac{5}{2}x + 2$
- $g(x) = -\frac{5}{2}x + 5$
- $g(x) = -\frac{2}{5} + 2$

(d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées elle admet donc une équation réduite dans le repère proposé.

Déterminons l'équation réduite de (d).



L'équation réduite de (d) est $y = -\frac{2}{5}x + 2$.

Et donc (d) est la représentation graphique de la fonction affine définie par $g(x) = -\frac{2}{5}x + 2$.

Il était également possible de relever les coordonnées de deux points de (d) puis de calculer le coefficient directeur (formule du taux d'accroissement) et enfin l'ordonnée à l'origine.

Question 4.

Soit h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = 5x^2 - x$.
0 a pour antécédent(s) par h :

- 5 et 0
- 0
- $\frac{1}{5}$
- 5
- 0 et $\frac{1}{5}$

Après avoir testé les valeurs proposées nous rédigeons au propre.

Vérifions que 0 et $\frac{1}{5}$ sont des antécédents de 0 par h.

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 5 \times 0^2 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h\left(\frac{1}{5}\right) &= 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 - (\frac{1}{5} \\
&= 5 \times \frac{1^2}{5^2} - \frac{1}{5} \\
&= \frac{5 \times 1^2}{5^2} - \frac{1}{5} \\
&= \frac{5 \times 1}{5 \times 5} - \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ainsi 0 et $\frac{1}{5}$ sont des antécédents de 0 par h.

Question 5.

Les solutions de l'inéquation $4 - 3x \leq x + 2$ sont les nombres réels x vérifiant :

- $x \leq \frac{1}{2}$
- $x \geq \frac{1}{2}$
- $x \geq 1$
- $x \leq -\frac{1}{2}$
- $x > \frac{1}{2}$

Résolvons l'inéquation $4 - 3x \leq x + 2$.

Cette inéquation équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
4-3x+3x &\leq x+2+3x \\
4 &\leq 4x+2 \\
4-2 &\leq 4x+2-2 \\
2 &\leq 4x \\
\frac{2}{4} &\leq \frac{4x}{4} \\
\frac{1}{2} &\leq x
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Les solutions sont les nombres x vérifiant $x \geq \frac{1}{2}$.