Concours EETAA session 2015.

Durée de l'épreuve 2 heures.

I Exercice. (5 points)

1. Réduisons la fraction A.

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{15}{8} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2 \times 15}{3 \times 8} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \\ &= -\frac{2}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi : $A = -\frac{1}{2}$.

2. Déterminons les écritures décimales et scientifiques de B.

$$\begin{aligned} B &= \frac{3 \times 4 \times 10^5 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-1}} \\ &= \frac{12}{16} \times \frac{10^{5-4}}{10^{-1}} \\ &= 0{,}75 \times 10^1 \times 10^1 \\ &= 0{,}75 \times 10^2 \\ &= 75 \end{aligned}$$

L'écriture décimale de B est donc $B = 75$ et son écriture scientifique est $B = 7{,}5 \times 10^1$, puisque $0 \leq 7{,}5 < 10$.

3. Écrivons le nombre sous la forme $a\sqrt{6}$, $a \in \mathbb{Z}$.

   Faisons apparaître le facteur 6 sous chaque radical.

$$\begin{aligned}\sqrt{16\times 6}+5\sqrt{6}-3\sqrt{150} &= \sqrt{(2^4)\times 6}+5\sqrt{6}-3\sqrt{6\times 5^2}\\ &= \sqrt{2^4}\times\sqrt{6}+5\sqrt{6}-3\sqrt{5^2}\times\sqrt{6}\\ &= 2^2\sqrt{6}+5\sqrt{6}-3\times 5\sqrt{6}\\ &= 4\sqrt{6}+5\sqrt{6}-15\sqrt{6}\\ &= -6\sqrt{6}\end{aligned}$$

   Évidemment $-6 \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{Donc : } \sqrt{16\times 6}+5\sqrt{6}-3\sqrt{150} = -6\sqrt{6}}$$

4. Résolvons le système.

   Il est possible en faisant apparaître des équations réduites d'anticiper les nombre de solutions du système.
   En écrivant le système sous la forme :

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = -5x + 23 \end{cases}$$

   nous pouvons interpréter le problème comme la recherche du point d'intersection de deux droites qui n'ont pas le même coefficient directeur et qui par conséquent sont sécantes.
   Le système admet dont une unique solution.

   D'après la seconde équation $y = 23 - 5x$ donc en substituant dans la première équation

$$2x - 3(23 - 5x) = -1$$

   Cette équation linéaire du premier degré est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} 2x - 69 + 15x &= -1\\ 17x &= 68\\ \frac{17x}{17} &= \frac{68}{17}\\ x &= 4\end{aligned}$$

Si $x = 4$ alors la seconde équation du système peut s'écrire $5 \times 4 + y = 23$ et donc $y = 3$.

Nous vérifions aisément que le couple $(4;3)$ est bien solution du système.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est } \mathcal{S} = \{(4;3)\}.}$$

II Exercice. (5 points)

1. Calculons $f(-1)$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= -2(-1-1)^2 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(-1) = 0.}$$

Calculons $f(1+2\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} f\left(1+2\sqrt{2}\right) &= -2\left(1+2\sqrt{2}-1\right)^2 + 8 \\ &= -2\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 8 \\ &= -2 \times 4 \times 2 + 8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(1+2\sqrt{2}) = 8}$$

2. Développons, ordonnons et réduisons l'expression de f.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x-1)^2 + 8 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1) + 8 \\ &= -2x^2 + 2 \times 2x - 2 \times 1 + 8 \\ &= -2x^2 + 4x + 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 + 4x + 6.}$$

3. Développons, ordonnons et réduisons l'expression proposée.

$$\begin{aligned}(2x+2)(-x+3) &= 2x \times (-x) + 2x \times 3 + 2 \times (-x) + 2 \times 3\\ &= -2x^2 + 6x - 2x + 6\\ &= -2x^2 + 4x + 6\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (2x+2)(-x+3).}$$

4. (a) Résolvons dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow (2x+2)(-x+3) = 0\\ &\Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \text{ ou } -x + 3 = 0\\ &\Leftrightarrow 2x + 2 - 2 = 0 - 2 \text{ ou } -x + 3 + x = 0 + x\\ &\Leftrightarrow 2x = -2 \text{ ou } 3 = x\\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} \text{ ou } 3 = x\\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathcal{S}_1 = \{-1; 3\}.}$$

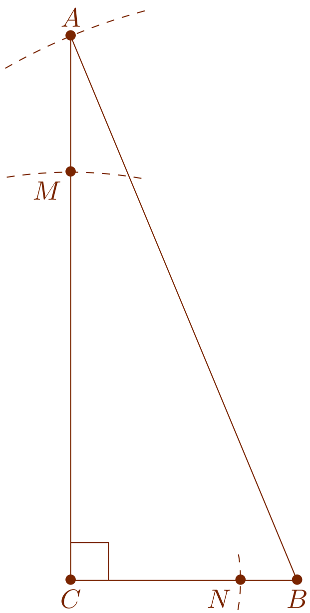
(b) Recherchons les antécédents de 6 par f s'ils existent.

$x \in \mathbb{R}$ est un antécédent de 6 par f si et seulement si $f(x) = 6$, ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}-2x^2 + 4x + 6 &= 6\\ -2x^2 + 4x &= 0\\ x(-x+4) &= 0\\ x = 0 &\text{ ou } -x + 4 = 0\\ x = 0 &\text{ ou } x = 4\end{aligned}$$

L'ensemble des antécédents de 6 par f est $\mathcal{S}_2 = \{0; 4\}$.

III Exercice. (5 points)

1. 

2. (a) ABC étant rectangle et connaissant les longueurs de deux de ses côtés il semble pertinent d'utiliser le

   théorème de Pythagore.

   (b) Calculons AC.

   ABC est rectangle en C donc, d'après le théorème de Pythagore

   $$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

   Cette égalité équivaut successivement à

   $$AC^2 = AB^2 - BC^2$$
   $$AC^2 = 7{,}8^2 - 3^2$$
   $$AC^2 = 51{,}84$$

AC étant une longueur donc positive

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{51{,}84} \\ AC &= 7{,}2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } AC = 7{,}2 \text{ cm.}}$$

3. (a) Calculons $\tan\left(\widehat{CAB}\right)$.

   ABC étant rectangle en B

$$\begin{aligned} \tan\left(\widehat{CAB}\right) &= \frac{CB}{CA} \\ &= \frac{3}{7{,}2} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \tan\left(\widehat{CAB}\right) \approx 0{,}417.}$$

   (b) Déterminons une mesure en degré de $\widehat{CAB}$.

   Une mesure en degré de $\widehat{CAB}$ est

$$\begin{aligned} \widehat{CAB} &= \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \\ &\approx 23 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \widehat{CAB} \approx 23°.}$$

4. Démontrons : $(MN)//(AB)$.

   Nous reconnaissons une configuration de Thalès : les points C, N, B d'une part et C, M et A d'autre part sont alignés dans cet ordre.

D'après le théorème le Thalès pour que $(MN)//(AB)$ il faut et il suffit que $\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{CA}$.
Or $\frac{CN}{CB} = \frac{2,25}{3} = \frac{3}{4}$ et $\frac{CM}{CA} = \frac{5,4}{7,2} = \frac{3}{4}$ donc, d'après le théorème de Thalès,

$$\boxed{(MN)//(AB).}$$

IV Exercice. (5 points)

Question 1.

Si $x = -2$ alors $-1,5 \times (-2) + 2 = 5$.

$$\boxed{(d) \text{ passe par le point } C.}$$

Question 2.

Résolvons l'inéquation.

Celle-ci est linéaire du premier degré et équivaut successivement à

$$\begin{aligned} -3x + 7 - 7 &\geq 5 - 7 \\ -3x &\geq -2 \\ \frac{-3x}{-3} &\leq \frac{-2}{-3}, \text{ car } -3 < 0 \\ x &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'inéquation sont les nombres } x \text{ vérifiant } x \leq \tfrac{2}{3}.}$$

Question 3.

Calculons la moyenne pondérée de la série regroupée par modalités.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{1 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots + 1 \times 20}{1 + 3 + \cdots + 1} \\ &= 6{,}44\end{aligned}$$

Il y a, en moyenne, 6,44 fautes d'orthographe par copie.

Question 4.

Calculons le taux d'évolution du prix de l'article en pourcentage.

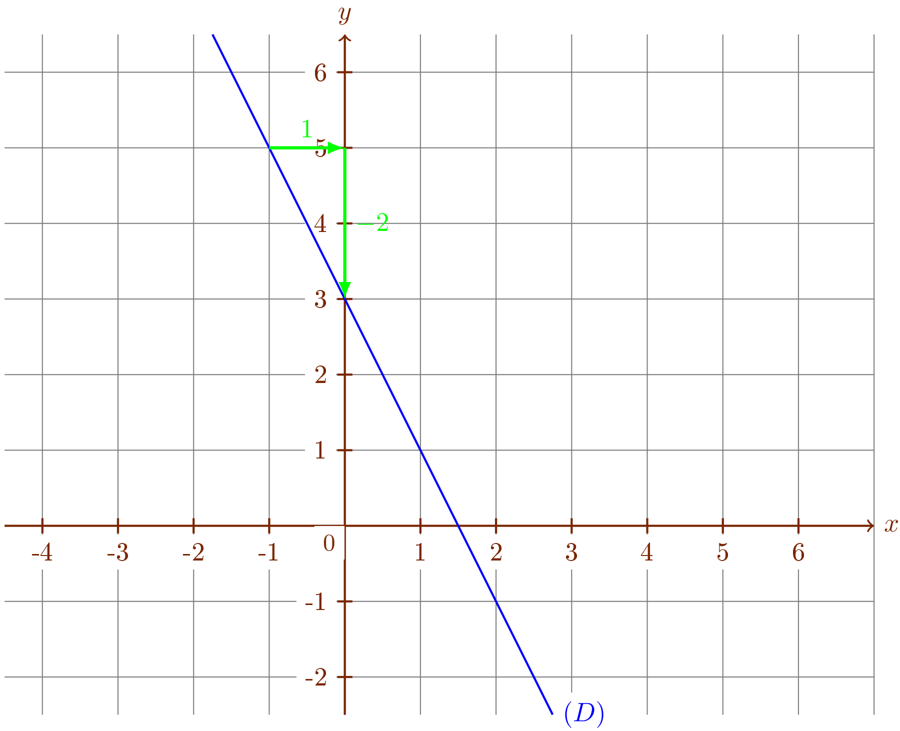
$$\begin{aligned}t &= \frac{29{,}92 - 28}{28} \times 100 \\ &\approx 0{,}6686\end{aligned}$$

Le pourcentage d'augmentation le plus proche est 6,5 %.

Question 5.

* Recherche du coefficient directeur a.

Par lecteur graphique :

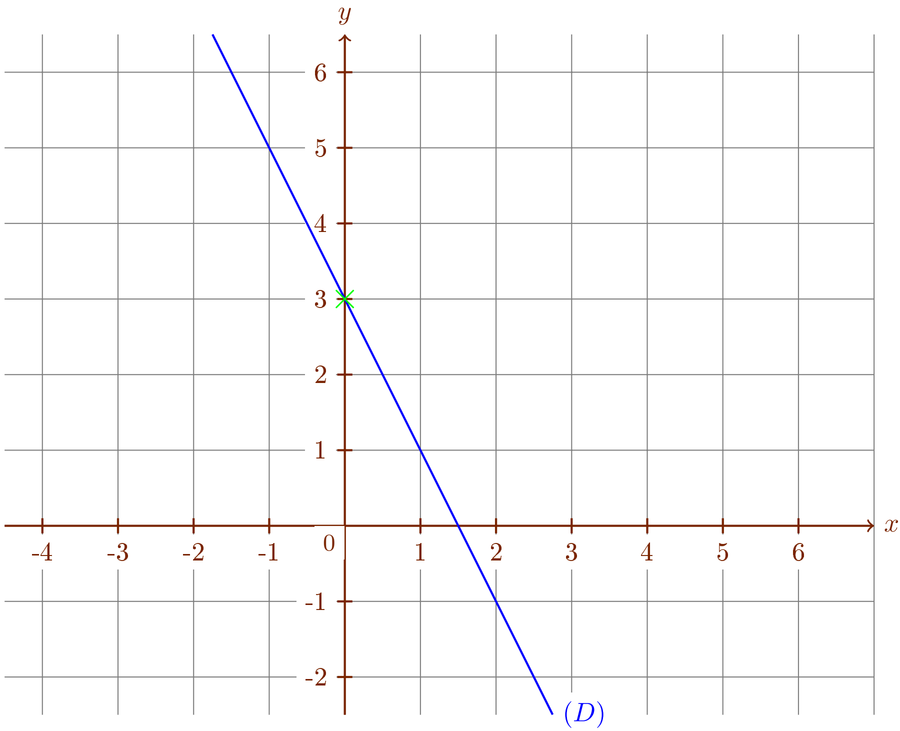


Donc $a = -2$.

Autre méthode en calculant le taux d'accroissement. Les points $A(-1;5)$ et $B(0;3)$ appartiennent à la droite donc :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{3-5}{0-(-1)} \\ &= -2 \end{aligned}$$

* Déterminons l'ordonnée à l'origine.



Par lecture graphique

$$b = 3.$$