Concours EETAA session 2015.

Durée de l'épreuve 2 heures.

I Exercice. (5 points)

Dans cet exercice les questions sont indépendantes. Vous détaillerez les calculs :

1. Écrire A sous forme d'une fraction irréductible : $A = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3} \div \dfrac{8}{15}$

   Réduisons la fraction A.

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{15}{8} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2 \times 15}{3 \times 8} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \\ &= -\frac{2}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi : $A = -\frac{1}{2}$.

2. On donne $B = \dfrac{3 \times 10^5 \times 4 \times \left(10^{-4}\right)}{16 \times 10^{-1}}$. Donner l'écriture décimale de B puis son écriture scientifique.

   Déterminons les écritures décimales et scientifiques de B.

$$\begin{aligned} B &= \frac{3 \times 4 \times 10^5 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-1}} \\ &= \frac{12}{16} \times \frac{10^{5-4}}{10^{-1}} \\ &= 0{,}75 \times 10^1 \times 10^1 \\ &= 0{,}75 \times 10^2 \\ &= 75 \end{aligned}$$

L'écriture décimale de B est donc $B = 75$ et son écriture scientifique est $B = 7{,}5 \times 10^1$, puisque $0 \leq 7{,}5 < 10$.

3. Écrire sous la forme $a\sqrt{6}$, où a est un nombre entier relatif :

$$\sqrt{16 \times 6} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{150}$$

Écrivons le nombre sous la forme $a\sqrt{6}$, $a \in \mathbb{Z}$.

Faisons apparaître le facteur 6 sous chaque radical.

$$\begin{aligned}
\sqrt{16 \times 6} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{150} &= \sqrt{(2^4) \times 6} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{6 \times 5^2} \\
&= \sqrt{2^4} \times \sqrt{6} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{5^2} \times \sqrt{6} \\
&= 2^2\sqrt{6} + 5\sqrt{6} - 3 \times 5\sqrt{6} \\
&= 4\sqrt{6} + 5\sqrt{6} - 15\sqrt{6} \\
&= -6\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Évidemment $-6 \in \mathbb{Z}$.

Donc : $\sqrt{16 \times 6} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{150} = -6\sqrt{6}$

4. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 5x + y = 23 \end{cases}$$

Résolvons le système.

Il est possible en faisant apparaître des équations réduites d'anticiper les nombre de solutions du système.
En écrivant le système sous la forme :

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = -5x + 23 \end{cases}$$

nous pouvons interpréter le problème comme la recherche du point d'intersection de deux droites qui n'ont pas le même coefficient directeur et qui par conséquent sont sécantes.

Le système admet dont une unique solution.

D'après la seconde équation $y = 23 - 5x$ donc en substituant dans la première équation

$$2x - 3(23 - 5x) = -1$$

Cette équation linéaire du premier degré est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} 2x - 69 + 15x &= -1 \\ 17x &= 68 \\ \frac{17x}{17} &= \frac{68}{17} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Si $x = 4$ alors la seconde équation du système peut s'écrire $5 \times 4 + y = 23$ et donc $y = 3$.
Nous vérifions aisément que le couple $(4; 3)$ est bien solution du système.

L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \{(4; 3)\}$.

II Exercice. (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$.

1. Calculer $f(-1)$ puis $f\left(1 + 2\sqrt{2}\right)$.

Calculons $f(-1)$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= -2(-1 - 1)^2 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$f(-1) = 0.$

Calculons $f(1 + 2\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} f\left(1+2\sqrt{2}\right) &= -2\left(1+2\sqrt{2}-1\right)^2+8 \\ &= -2\left(2\sqrt{2}\right)^2+8 \\ &= -2\times 4\times 2+8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(1+2\sqrt{2})=8}$$

2. Justifier que l'expression développée et réduite de f est : $f(x)=-2x^2+4x+6$.

   Développons, ordonnons et réduisons l'expression de f.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x-1)^2+8 \\ &= -2(x^2-2x+1)+8 \\ &= -2x^2+2\times 2x-2\times 1+8 \\ &= -2x^2+4x+6 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-2x^2+4x+6.}$$

3. Justifier que, pour tout réel x, $f(x)=(2x+2)(-x+3)$.

   Développons, ordonnons et réduisons l'expression proposée.

$$\begin{aligned} (2x+2)(-x+3) &= 2x\times(-x)+2x\times 3+2\times(-x)+2\times 3 \\ &= -2x^2+6x-2x+6 \\ &= -2x^2+4x+6 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(2x+2)(-x+3).}$$

4. Pour les questions suivantes vous utiliserez la forme la plus adaptée de $f(x)$:

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (2x+2)(-x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x+2 = 0 \text{ ou } -x+3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x+2-2 = 0-2 \text{ ou } -x+3+x = 0+x \\ &\Leftrightarrow 2x = -2 \text{ ou } 3 = x \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} \text{ ou } 3 = x \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathcal{S}_1 = \{-1; 3\}.}$$

(b) Déterminer les éventuels antécédents de 6 par f.

Recherchons les antécédents de 6 par f s'ils existent.

$x \in \mathbb{R}$ est un antécédent de 6 par f si et seulement si $f(x) = 6$, ce qui équivaut successivement à

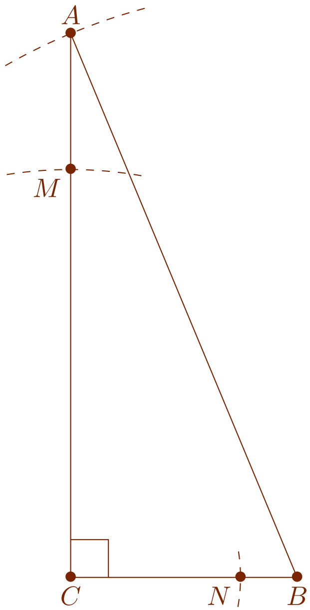
$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x + 6 &= 6 \\ -2x^2 + 4x &= 0 \\ x(-x+4) &= 0 \\ x = 0 &\text{ ou } -x+4 = 0 \\ x = 0 &\text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des antécédents de 6 par } f \text{ est } \mathcal{S}_2 = \{0; 4\}.}$$

III Exercice. (5 points)

L'unité de longueur est le cm.
On considère un triangle ABC rectangle en C tel que $AB = 7{,}8$ et $BC = 3$.

1. Faire une figure en vraie grandeur.



2. On souhaite calculer la valeur exacte de AC.

   (a) Quel théorème peut-on utiliser ?

   ABC étant rectangle et connaissant les longueurs de deux de ses côtés il semble pertinent d'utiliser le

théorème de Pythagore.

   (b) Prouver que $AC = 7{,}2$.

   Calculons AC.

   ABC est rectangle en C donc, d'après le théorème de Pythagore

   $$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

   Cette égalité équivaut successivement à

   $$AC^2 = AB^2 - BC^2$$
   $$AC^2 = 7{,}8^2 - 3^2$$
   $$AC^2 = 51{,}84$$

AC étant une longueur donc positive

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{51{,}84} \\ AC &= 7{,}2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } AC = 7{,}2 \text{ cm.}}$$

3. (a) Calculer la tangente de l'angle $\widehat{CAB}$. On donnera le résultat arrondi au millième.

   Calculons $\tan\left(\widehat{CAB}\right)$.

   ABC étant rectangle en B

$$\begin{aligned} \tan\left(\widehat{CAB}\right) &= \frac{CB}{CA} \\ &= \frac{3}{7{,}2} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \tan\left(\widehat{CAB}\right) \approx 0{,}417.}$$

   (b) En déduire une valeur approchée de $\widehat{CAB}$ au degré près.

   Déterminons une mesure en degré de $\widehat{CAB}$.

   Une mesure en degré de $\widehat{CAB}$ est

$$\begin{aligned} \widehat{CAB} &= \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \\ &\approx 23 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \widehat{CAB} \approx 23°.}$$

4. On place sur le segment $[BC]$ le point N tel que $CN = 2{,}25$ et sur le segment $[AC]$ le point M tel que $CM = 5{,}4$.
   Les droites (AB) et (MN) sont-elles parallèles ? Justifier à l'aide d'un théorème.

   Démontrons : $(MN)//(AB)$.

   Nous reconnaissons une configuration de Thalès : les points C, N, B d'une part et C, M et A d'autre part sont alignés dans cet ordre.

   D'après le théorème le Thalès pour que $(MN)//(AB)$ il faut et il suffit que $\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{CA}$.
   Or $\frac{CN}{CB} = \frac{2{,}25}{3} = \frac{3}{4}$ et $\frac{CM}{CA} = \frac{5{,}4}{7{,}2} = \frac{3}{4}$ donc, d'après le théorème de Thalès,

   $$\boxed{(MN)//(AB).}$$

IV Exercice. (5 points)

Pour chaque question, une seule des cinq réponses proposées est exacte.
Le candidat indique sur la copie le numéro de la question et recopie la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en cas de réponse fausse ou d'absence de réponse.
Les cinq questions sont indépendantes.

Question 1.

La droite (d) d'équation $y = -1{,}5x + 2$ passe par le point :

- $A(1{,}5\ ;\ 2)$
- $B(2\ ;\ 5)$
- $C(-2\ ;\ 5)$
- $D(-2\ ;\ 1)$
- $E(0\ ;\ 0)$

Si $x = -2$ alors $-1{,}5 \times (-2) + 2 = 5$.

$$\boxed{(d) \text{ passe par le point } C.}$$

Question 2.

Les solutions de l'inéquation $-3x+7 \geq 5$ sont les nombres x vérifiant :

- $x \geq \dfrac{7}{3}$
- $x \leq -\dfrac{2}{3}$
- $x \geq \dfrac{2}{3}$
- $x \leq \dfrac{2}{3}$
- $x \leq -4$

Résolvons l'inéquation.

Celle-ci est linéaire du premier degré et équivaut successivement à

$$\begin{aligned} -3x+7-7 &\geq 5-7 \\ -3x &\geq -2 \\ \frac{-3x}{-3} &\leq \frac{-2}{-3}, \text{ car } -3<0 \\ x &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres x vérifiant $x \leq \frac{2}{3}$.

Question 3.

On a relevé le nombre de fautes d'orthographe d'un paquet de 25 copies d'examen.

Voici les résultats :

Nombre des fautes	0	2	3	4	5	10	14	20
Effectifs	1	3	2	4	7	5	2	1

La moyenne de la série précédente (arrondie aux dixième) est :

- 7,3
- 4,5
- 10

- 6,4
- 5

Calculons la moyenne pondérée de la série regroupée par modalités.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{1 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots + 1 \times 20}{1 + 3 + \cdots + 1} \\ &= 6{,}44\end{aligned}$$

Il y a, en moyenne, 6,44 fautes d'orthographe par copie.

Question 4.

En un mois, le prix d'un article est passé de 28 € à 29,92 €. Le pourcentage d'augmentation est :

1. 94,9 %
2. 6,5 %
3. 1,82 %
4. 6,1 %
5. 1,065 %

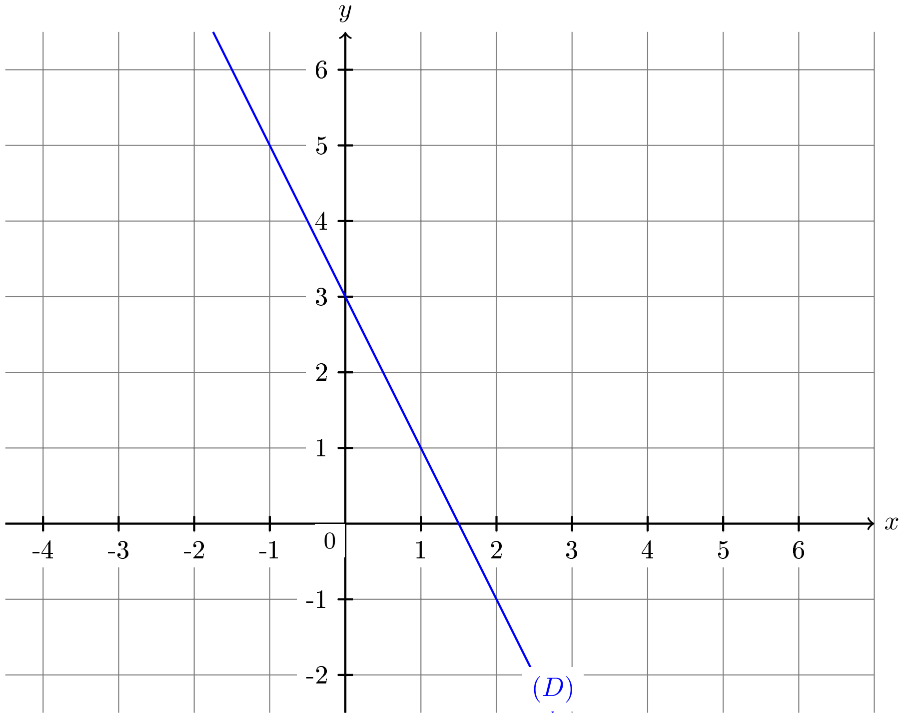
Calculons le taux d'évolution du prix de l'article en pourcentage.

$$\begin{aligned}t &= \frac{29{,}92 - 28}{28} \times 100 \\ &\approx 0{,}6686\end{aligned}$$

Le pourcentage d'augmentation le plus proche est 6,5 %.

Question 5.

La droite (D) a pour équation $y = ax + b$.

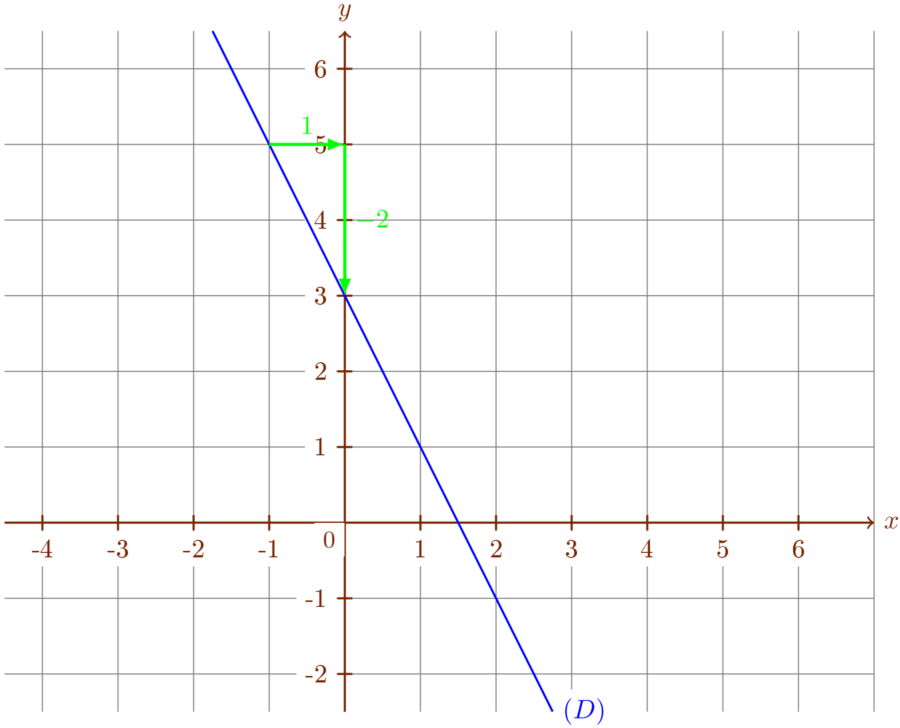


Les valeurs de a et b sont :

- $a = 3$ et $b = 1{,}5$
- $a = 1{,}5$ et $b = 3$
- $a = 2$ et $b = 3$
- $a = -2$ et $b = 1{,}5$
- $a = -2$ et $b = 3$

* Recherche du coefficient directeur a.

Par lecteur graphique :

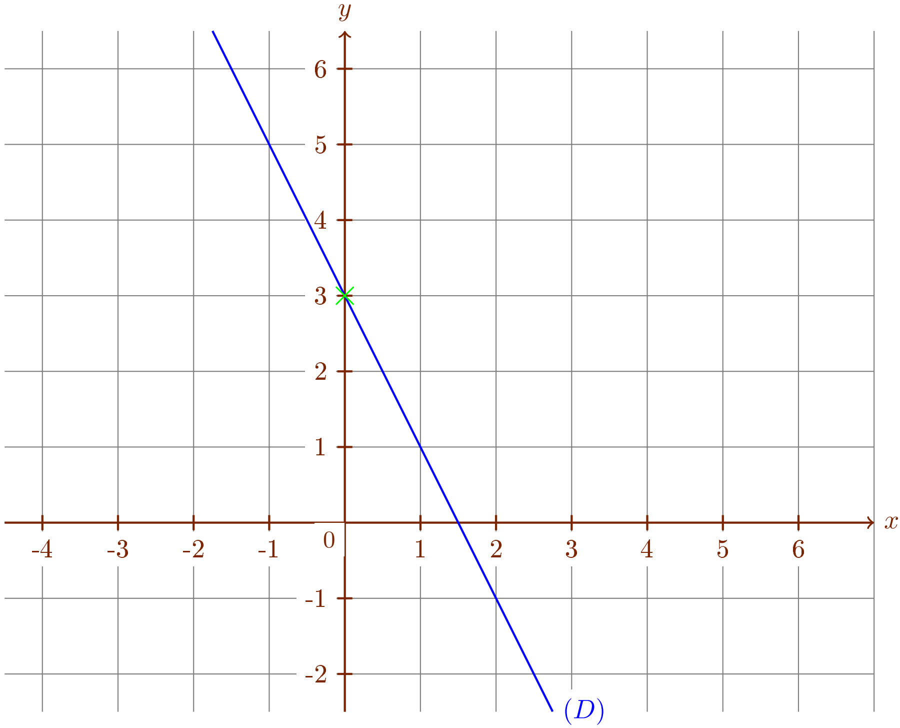


Donc $a = -2$.

Autre méthode en calculant le taux d'accroissement. Les points $A(-1;5)$ et $B(0;3)$ appartiennent à la droite donc :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{3-5}{0-(-1)} \\ &= -2 \end{aligned}$$

* Déterminons l'ordonnée à l'origine.



Par lecture graphique

$$b = 3.$$