Concours EETAA session 2014.

Durée de l'épreuve 2 heures.

I Exercice. (5 points)

1. Réduisons la fraction.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{1\times3}{2\times3}+\frac{2\times2}{3\times2}}{\frac{1\times3}{2\times3}-\frac{2\times2}{3\times2}} \\ &= \frac{\frac{3+4}{6}}{\frac{3-4}{6}} \\ &= \frac{\frac{7}{6}}{\frac{-1}{6}} \\ &= \frac{7}{6}\times\frac{6}{-1} \\ &= \frac{7\times6}{6\times(-1)} \\ &= \frac{7}{-1} \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\boxed{A=-7}$$

2. Déterminons une expression de b en fonction de a.

   Soient $a \leq 1$ et $b \geq 1$ deux nombres réels.

$$\begin{aligned}
a = 1 - 2\sqrt{b-1} &\Rightarrow a - 1 = 1 - 2\sqrt{b-1} - 1 \\
&\Rightarrow a - 1 = -2\sqrt{b-1} \\
&\Rightarrow \frac{a-1}{-2} = \frac{-2\sqrt{b-1}}{-2} \\
&\Rightarrow \frac{a-1}{-2} = \sqrt{b-1} \\
&\Rightarrow \left(\frac{a-1}{-2}\right)^2 = \sqrt{b-1}^2 \\
&\Rightarrow \left(\frac{a-1}{-2}\right)^2 = b - 1 \\
&\Rightarrow \left(\frac{a-1}{-2}\right)^2 + 1 = b - 1 + 1 \\
&\Rightarrow \left(\frac{a-1}{-2}\right)^2 + 1 = b
\end{aligned}$$

$$\boxed{b = \left(\tfrac{a-1}{-2}\right)^2 + 1}$$

3. Déterminons des entiers relatifs a et b tels que $B = a + b\sqrt{2}$.

   En distribuant

$$\begin{aligned}
B &= (2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \times (-3) + 1 \times 4\sqrt{2} + 1 \times (-3)) \\
&\quad - (\sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 2 + 1 \times \sqrt{2} + 1 \times 2) \\
B &= (8\sqrt{2}^2 - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3) - (\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2) \\
&= (13 - 2\sqrt{2}) - (4 + 3\sqrt{2}) \\
&= 13 - 2\sqrt{2} - 4 - 3\sqrt{2} \\
&= 9 - 5\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{B = 9 - 5\sqrt{2}}$$

4. Simplifions l'expression de C.

En remarquant une identité remarquable et en mettant les fractions au même dénominateur

$$\begin{aligned}
C &= \frac{(x-y)(x+y)}{\frac{y}{xy} - \frac{x}{xy}} \\
&= \frac{(x-y)(x+y)}{\frac{y-x}{xy}} \\
&= (x-y)(x+y) \times \frac{xy}{y-x} \\
&= -xy(x+y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{C = -xy(x+y)}$$

II Exercice. (5 points)

1. Montrons que, quelque soit x réel, $f(x) = (3x-1)(x-1)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(3x-1)(x-1) &= 3x \times x + 3x \times (-1) + (-1) \times x + (-1) \times (-1) \\
&= 3x^2 - 3x - x + 1 \\
&= 3x^2 - 4x + 1
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
(2x-1)^2 - x^2 &= ((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2) - x^2 \\
&= (4x^2 - 4x + 1) - x^2 \\
&= 3x^2 - 4x + 1
\end{aligned}$$

   Nous déduisons de ces deux développements par transitivité que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (3x-1)(x-1).}$$

   Il était également possible de remarquer une factorisation avec une identité remarquable

$$\begin{aligned} f(x) &= [(2x-1)-x]\,[(2x-1)+x] \\ &= (x-1)(3x-1) \end{aligned}$$

2. Déjà fait à la question précédente :

$$\boxed{f(x) = 3x^2 - 4x + 1.}$$

3. Calculons $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{4} - 2 + 1 \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4}}$$

Calculons $f\left(\sqrt{5}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{5}\right) &= 3\sqrt{5}^2 - 4\sqrt{5} + 1 \\ &= 16 - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{f\left(\sqrt{5}\right) = 16 - 4\sqrt{5}}$$

4. Résolvons dans $\mathbb{R}$,$f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (3x-1)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x = 1 \text{ ou } x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est

$$\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{1}{3}; 1\right\}.$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 &\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 1 \\
&\Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x \times x - 4 \times x = 0 \\
&\Leftrightarrow (3x - 4) \times x = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \text{ ou } x = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x - 4 + 4 = 0 + 4 \text{ ou } x = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x = 4 \text{ ou } x = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \text{ ou } x = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = 0
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 1$ est

$$\mathcal{S}_2 = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}.$$

III Exercice. (5 points)

Question 1.

Résolvons l'inéquation.

$$\begin{aligned}
3-2x \leq 1+6x &\Leftrightarrow 3-2x-6x \leq 1+6x-6x \\
&\Leftrightarrow 3-8x \leq 1 \\
&\Leftrightarrow 3-8x-3 \leq 1-3 \\
&\Leftrightarrow -8x \leq -2 \\
&\Leftrightarrow \frac{-8x}{-8} \geq \frac{-2}{-8}, \text{ car -8<0} \\
&\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solution de l'inéquation est

$$\mathcal{S}_3 = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[.$$

Question 2.

Déterminons la mesure d'un côté de l'angle droit.

Notons x la mesure en centimètre de la longueur d'un des côtés de l'angle droit. Le triangle étant rectangle, d'après le théorème de Pythagore

$$x^2 + x^2 = 10^2$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux pour la résoudre nous pouvons essayer de la factoriser.

Elle équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
2x^2 &= 100 \\
2x^2 - 100 &= 100 - 100 \\
2x^2 - 100 &= 0 \\
2(x^2 - 50) &= 0 \\
2(x^2 - \sqrt{50}^2) &= 0 \\
2(x-\sqrt{50})(x+\sqrt{50}) &= 0 \\
x = \sqrt{50} \text{ ou } x = -\sqrt{50}
\end{aligned}$$

Dans ce cas particulier l'absence du monôme de degré un autorise une résolution en isolant le x.

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 = 10^2 &\Leftrightarrow 2x^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{100}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 50 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{50} \text{ ou } x = -\sqrt{50} \end{aligned}$$

Nous retrouvons les mêmes alternatives que précédemment.

x désignant une longueur il ne peut être que positif, donc, nécessairement $x = \sqrt{50}$.

L'un des côtés de l'angle droit mesure $\sqrt{50}$ cm.

Question 3.

Déterminons l'abscisse x de $\vec{v}$.

Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, donc s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} 7 = \alpha x \\ 3 = \alpha 6 \end{array}\right.$

De la seconde équation nous déduisons que $\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. La première équation peut donc s'écrire $7 = \frac{1}{2}x$. Nous en déduisons

$x = 14.$

Il était possible de faire un tableau de proportionnalité avec les coordonnées des vecteurs.

Question 4.

Déterminons l'équation de (D).

Puisque $(D)//(d)$ les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux. Donc il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que (D) : $y = -x + p$.

Comme de plus $K \in D$,

$$y_K = -x_k + p$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned}2 &= -1+p\\ 2+1 &= -1+p+1\\ 3 &= p\end{aligned}$$

Enfin l'équation réduite de (D) est $y=-x+3$.

$$\boxed{D:\ y=-x+3}$$

Question 5.

Réduisons l'expression fractionnaire de X.

Réduisons au même dénominateur :

$$\begin{aligned}X &= \frac{1\times(x-2)}{(2+x)(x-2)}-\frac{(x-1)(x+2)}{(2+x)(x-2)}\\ &= \frac{1\times(x-2)-(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}\end{aligned}$$

Développons, ordonnons puis réduisons l'expression polynômiale qui est au numérateur :

$$\begin{aligned}X &= \frac{x-2-(x\times x+x\times 2+(-1)\times x+(-1)\times 2)}{(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{x-2-(x^2+x-2)}{(x+2)(x-2)}\\ &= \frac{-x^2}{(x+2)(x-2)}\end{aligned}$$

Remarquons enfin une identité remarquable au dénominateur :

$$\begin{aligned}X &= \frac{-x^2}{x^2-2^2}\\ &= -\frac{x^2}{x^2-4}\end{aligned}$$

$$\boxed{X = -\frac{x^2}{x^2 - 4}}$$

On pouvait plus simplement tester les propositions avec des valeurs particulières choisies pour x et trouver ainsi celle qui donne les mêmes valeurs.

IV Exercice. (5 points)

1. L'étendue est : $e = max - min = 18 - 3 = 15$.

$$\boxed{e = 15}$$

Le mode est la modalité (note) qui apparaît le plus donc :

$$\boxed{Mod = 11}$$

2. Utilisons la formule de la moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{1 \times 3 + 3 \times 5 + \cdots + 1 \times 18}{1 + 3 + \cdots + 1} \\ &= \frac{151}{15} \approx 10{,}07\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 10{,}07}$$

3. Recherchons la médiane de la série des notes.

Ajoutons la ligne des effectifs cumulés croissants au tableau.

Notes	3	5	8	9	10	11	12	14	15	18
Effectif	1	3	5	4	3	6	3	2	2	1
E.C.C.	1	4	9	13	16	22	25	27	29	30

- La série des notes est déjà ordonnée.

- $\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$. La série étant paire la médiane est donc la moyenne entre la quinzième et la seizième valeurs.
- $Me = \frac{10+10}{2}$

Enfin : $Me = 10$.

4. Recherchons le premier quartile de la série des notes.

- La série des notes est déjà ordonnée.
- $\frac{N}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5$. Le troisième quartile est donc la huitième valeur.
- $Q_1 = 8$.

Le premier quartile de la série est donc $Q_1 = 8$.

5. Calculons la proportion d'élèves dont la note est au moins 12.

Le nombre d'élèves ayant une note au moins égale à 12 est $3 + 2 + 2 + 1 = 8$. Ceci représente un pourcentage de $\frac{8}{30} \times 100 \approx 26{,}67$.

26,67 % des élèves ont une note au moins égale à 12.