Concours EETAA session 2014.

Durée de l'épreuve 2 heures.

I Exercice. (5 points)

1. Réduire la fraction : $A = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$.

Réduisons la fraction.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\frac{1\times3}{2\times3}+\frac{2\times2}{3\times2}}{\frac{1\times3}{2\times3}-\frac{2\times2}{3\times2}} \\
&= \frac{\frac{3+4}{6}}{\frac{3-4}{6}} \\
&= \frac{\frac{7}{6}}{\frac{-1}{6}} \\
&= \frac{7}{6}\times\frac{6}{-1} \\
&= \frac{7\times6}{6\times(-1)} \\
&= \frac{7}{-1} \\
&= -7
\end{aligned}$$

$$\boxed{A = -7}$$

2. a et b sont deux nombres tels que :

$$a = 1 - 2\sqrt{b-1},$$

b étant supérieur ou égale à 1 et a inférieur ou égale à 1.
Exprimer b en fonction de a.

Déterminons une expression de b en fonction de a.

Soient $a \leq 1$ et $b \geq 1$ deux nombres réels.

$$
\begin{aligned}
a = 1 - 2\sqrt{b-1} &\Rightarrow a - 1 = 1 - 2\sqrt{b-1} - 1 \\
&\Rightarrow a - 1 = -2\sqrt{b-1} \\
&\Rightarrow \frac{a-1}{-2} = \frac{-2\sqrt{b-1}}{-2} \\
&\Rightarrow \frac{a-1}{-2} = \sqrt{b-1} \\
&\Rightarrow \left(\frac{a-1}{-2}\right)^2 = \sqrt{b-1}^2 \\
&\Rightarrow \left(\frac{a-1}{-2}\right)^2 = b - 1 \\
&\Rightarrow \left(\frac{a-1}{-2}\right)^2 + 1 = b - 1 + 1 \\
&\Rightarrow \left(\frac{a-1}{-2}\right)^2 + 1 = b
\end{aligned}
$$

$$\boxed{b = \left(\tfrac{a-1}{-2}\right)^2 + 1}$$

3. Soit le réel B :

$$B = (2\sqrt{2}+1).(4\sqrt{2}-3) - (\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}+2)$$

Simplifier B, que l'on mettra sous la forme : $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des nombres entiers relatifs.

Déterminons des entiers relatifs a et b tels que $B = a + b\sqrt{2}$.

En distribuant

$$
\begin{aligned}
B = {} & (2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\times(-3) + 1\times 4\sqrt{2} + 1\times(-3)) \\
& - (\sqrt{2}\times\sqrt{2} + \sqrt{2}\times 2 + 1\times\sqrt{2} + 1\times 2) \\
B = {} & (8\sqrt{2}^2 - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3) - (\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2) \\
= {} & (13 - 2\sqrt{2}) - (4 + 3\sqrt{2}) \\
= {} & 13 - 2\sqrt{2} - 4 - 3\sqrt{2} \\
= {} & 9 - 5\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$B = 9 - 5\sqrt{2}$$

4. x et y sont deux réels non nuls et différents l'un de l'autre.

   Simplifier : $C = \dfrac{x^2 - y^2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$

   Simplifions l'expression de C.

   En remarquant une identité remarquable et en mettant les fractions au même dénominateur

$$\begin{aligned} C &= \frac{(x-y)(x+y)}{\frac{y}{xy} - \frac{x}{xy}} \\ &= \frac{(x-y)(x+y)}{\frac{y-x}{xy}} \\ &= (x-y)(x+y) \times \frac{xy}{y-x} \\ &= -xy(x+y) \end{aligned}$$

$$C = -xy(x+y)$$

II Exercice. (5 points)

Soit la fonction f, définie dans l'ensemble des réels et de variable x, par :

$$f(x) = (2x-1)^2 - x^2$$

1. Montrer que : $f(x) = (3x-1).(x-1)$.

   Montrons que, quelque soit x réel, $f(x) = (3x-1)(x-1)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (3x-1)(x-1) &= 3x \times x + 3x \times (-1) + (-1) \times x + (-1) \times (-1) \\ &= 3x^2 - 3x - x + 1 \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(2x-1)^2 - x^2 &= ((2x)^2 - 2\times 2x\times 1 + 1^2) - x^2 \\ &= (4x^2 - 4x + 1) - x^2 \\ &= 3x^2 - 4x + 1\end{aligned}$$

Nous déduisons de ces deux développements par transitivité que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (3x-1)(x-1).}$$

Il était également possible de remarquer une factorisation avec une identité remarquable

$$\begin{aligned}f(x) &= [(2x-1)-x]\,[(2x-1)+x] \\ &= (x-1)(3x-1)\end{aligned}$$

2. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

   Déjà fait à la question précédente :

$$\boxed{f(x) = 3x^2 - 4x + 1.}$$

3. Calculer, en valeurs exactes, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\sqrt{5}\right)$.

   Calculons $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\right) &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times\frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{4} - 2 + 1 \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4}}$$

Calculons $f\left(\sqrt{5}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{5}\right) &= 3\sqrt{5}^2 - 4\sqrt{5} + 1 \\ &= 16 - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{f\left(\sqrt{5}\right) = 16 - 4\sqrt{5}}$$

4. En utilisant l'expression de f la mieux adaptée, résoudre l'équation : $f(x) = 0$ puis l'équation $f(x) = 1$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$,$f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (3x-1)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x = 1 \text{ ou } x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est

$$\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{1}{3}; 1\right\}.$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 &\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 1\\
&\Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0\\
&\Leftrightarrow 3x \times x - 4 \times x = 0\\
&\Leftrightarrow (3x - 4) \times x = 0\\
&\Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \text{ ou } x = 0\\
&\Leftrightarrow 3x - 4 + 4 = 0 + 4 \text{ ou } x = 0\\
&\Leftrightarrow 3x = 4 \text{ ou } x = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \text{ ou } x = 0\\
&\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = 0
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 1$ est

$$\mathcal{S}_2 = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}.$$

III Exercice. (5 points)

Pour chaque question, une seule des cinq réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque question exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée.

Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Les cinq questions sont indépendantes.

Question 1.

L'inéquation : $3 - 2x \leq 1 + 6x$ a comme ensemble de solutions dans l'ensemble des réels :

- $\left]-\infty; \frac{1}{4}\right[$.
- $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.
- $\left]-\infty; \frac{1}{4}\right]$.

- $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$.
- $[4;+\infty[$.

Résolvons l'inéquation.

$$\begin{aligned}
3-2x\leq 1+6x &\Leftrightarrow 3-2x-6x\leq 1+6x-6x\\
&\Leftrightarrow 3-8x\leq 1\\
&\Leftrightarrow 3-8x-3\leq 1-3\\
&\Leftrightarrow -8x\leq -2\\
&\Leftrightarrow \frac{-8x}{-8}\geq\frac{-2}{-8},\quad \text{car -8<0}\\
&\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solution de l'inéquation est

$$\mathcal{S}_3=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[.$$

Question 2.

Un triangle isocèle rectangle a son hypoténuse qui mesure 10 cm.
L'un de ses côtés de l'angle droit mesure, en cm :

- 50
- $2\sqrt{5}$
- $5\sqrt{2}$
- 5
- $\sqrt{10}$

Déterminons la mesure d'un côté de l'angle droit.

Notons x la mesure en centimètre de la longueur d'un des côtés de l'angle droit.
Le triangle étant rectangle, d'après le théorème de Pythagore

$$x^2+x^2=10^2$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux pour la résoudre nous pouvons essayer de la factoriser.

Elle équivaut successivement à

$$2x^2 = 100$$
$$2x^2 - 100 = 100 - 100$$
$$2x^2 - 100 = 0$$
$$2(x^2 - 50) = 0$$
$$2(x^2 - \sqrt{50}^2) = 0$$
$$2(x - \sqrt{50})(x + \sqrt{50}) = 0$$
$$x = \sqrt{50} \text{ ou } x = -\sqrt{50}$$

Dans ce cas particulier l'absence du monôme de degré un autorise une résolution en isolant le x.

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 = 10^2 &\Leftrightarrow 2x^2 = 100 \\ &\leftrightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{100}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 50 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{50} \text{ ou } x = -\sqrt{50} \end{aligned}$$

Nous retrouvons les mêmes alternatives que précédemment.

x désignant une longueur il ne peut être que positif, donc, nécessairement $x = \sqrt{50}$.

L'un des côtés de l'angle droit mesure $\sqrt{50}$ cm.

Question 3.

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coordonnées, dans un repère orthonormé, sont : $\vec{u}(7;3)$ et $\vec{v}(x;6)$, où x est un réel à déterminer.

Sachant que les vecteurs sont colinéaires, alors x est égale à :

- 3,5
- $-3{,}5$
- -14

- 14
- 42

Déterminons l'abscisse x de $\vec{v}$.

Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, donc s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} 7 = \alpha x \\ 3 = \alpha 6 \end{array} \right.$

De la seconde équation nous déduisons que $\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. La première équation peut donc s'écrire $7 = \frac{1}{2}x$. Nous en déduisons

$$\boxed{x = 14.}$$

Il était possible de faire un tableau de proportionnalité avec les coordonnées des vecteurs.

Question 4.

On donne la droite (d) d'équation : $y = -x$, et le point $K(1;2)$ dans un repère du plan.

La droite (D) parallèle à (d) et passant par K a pour équation :

- $y = x + 3$
- $y = -x + 3$
- $y = x - 3$
- $y = -x - 3$
- $y = x$

Déterminons l'équation de (D).

Puisque $(D)//(d)$ les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux. Donc il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $(D) : \; y = -x + p$.

Comme de plus $K \in D$,

$$y_K = -x_k + p$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned} 2 &= -1 + p \\ 2+1 &= -1 + p+1 \\ 3 &= p \end{aligned}$$

Enfin l'équation réduite de (D) est $y = -x + 3$.

$$\boxed{D:\ y = -x + 3}$$

Question 5.

L'expression X, où x est un réel autre que (-2) et 2, telle que :

$$X = \frac{1}{2+x} - \frac{x-1}{x-2}$$

peut aussi s'écrire :

- $-\dfrac{1}{4}$
- $\dfrac{2-x}{2x}$
- $-\dfrac{x^2}{x^2-4}$
- $-\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$
- $-\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$

Réduisons l'expression fractionnaire de X.

Réduisons au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1 \times (x-2)}{(2+x)(x-2)} - \frac{(x-1)(x+2)}{(2+x)(x-2)} \\
&= \frac{1 \times (x-2) - (x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}
\end{aligned}$$

Développons, ordonnons puis réduisons l'expression polynômiale qui est au numérateur :

$$\begin{aligned}
X &= \frac{x - 2 - (x \times x + x \times 2 + (-1) \times x + (-1) \times 2)}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{x - 2 - (x^2 + x - 2)}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{-x^2}{(x+2)(x-2)}
\end{aligned}$$

Remarquons enfin une identité remarquable au dénominateur :

$$\begin{aligned} X &= \frac{-x^2}{x^2-2^2} \\ &= -\frac{x^2}{x^2-4} \end{aligned}$$

$$\boxed{X = -\frac{x^2}{x^2-4}}$$

On pouvait plus simplement tester les propositions avec des valeurs particulières choisies pour x et trouver ainsi celle qui donne les mêmes valeurs.

IV Exercice. (5 points)

Les 30 élèves d'une classe de 1$^{\text{ère}}$ ont obtenu les notes suivantes, lors d'un devoir de mathématiques :

Notes	3	5	8	9	10	11	12	14	15	18
Effectif	1	3	5	4	3	6	3	2	2	1

1. Déterminer l'étendue et le mode cette série.

   L'étendue est : $e = max - min = 18 - 3 = 15$.

   $$\boxed{e = 15}$$

   Le mode est la modalité (note) qui apparaît le plus donc :

   $$\boxed{Mod = 11}$$

2. Calculer la moyenne de cette série.

   Utilisons la formule de la moyenne pondérée.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{1\times 3 + 3\times 5 + \cdots + 1\times 18}{1+3+\cdots+1} \\ &= \frac{151}{15} \approx 10{,}07 \end{aligned}$$

$$\overline{x} \approx 10{,}07$$

3. Déterminer sa médiane.

   Recherchons la médiane de la série des notes.

   Ajoutons la ligne des effectifs cumulés croissants au tableau.

Notes	3	5	8	9	10	11	12	14	15	18
Effectif	1	3	5	4	3	6	3	2	2	1
E.C.C.	1	4	9	13	16	22	25	27	29	30

   - La série des notes est déjà ordonnée.
   - $\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$. La série étant paire la médiane est donc la moyenne entre la quinzième et la seizième valeurs.
   - $Me = \frac{10+10}{2}$

   Enfin : $Me = 10$.

4. Quel est le premier quartile de cette série ?

   Recherchons le premier quartile de la série des notes.

   - La série des notes est déjà ordonnée.
   - $\frac{N}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5$. Le troisième quartile est donc la huitième valeur.
   - $Q_1 = 8$.

   Le premier quartile de la série est donc $Q_1 = 8$.

5. Quel est le pourcentage d'élèves ayant une note au moins égale à 12 ?

   Calculons la proportion d'élèves dont la note est au moins 12.

   Le nombre d'élèves ayant une note au moins égale à 12 est $3 + 2 + 2 + 1 = 8$.
   Ceci représente un pourcentage de $\frac{8}{30} \times 100 \approx 26{,}67$.

   26,67 % des élèves ont une note au moins égale à 12.