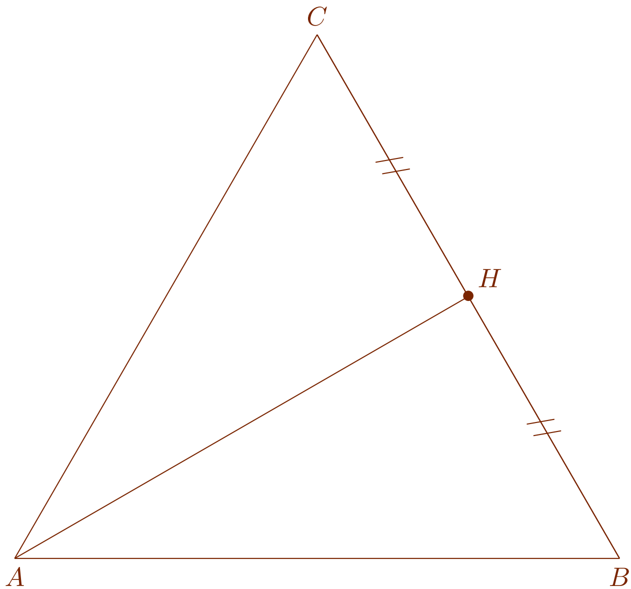
Concours EETAA session 2013.

Durée de l'épreuve 2 heures.

I Exercice. (5 points)

1. Construire un triangle équilatéral ABC de côté 8 cm.
   Soit H le milieu du segment $[BC]$.
   Placer le point H et tracer le segment $[AH]$.



2. Montrer que la longueur AH est égale à $\sqrt{48}$ cm. Justifier soigneusement votre démarche.

   Calculons AH.

   AH est une médiane de ABC. ABC étant équilatéral ses médianes et ses hauteurs se confondent. Donc AHC est rectangle en H.
   D'après le théorème de Pythagore nous pouvons alors affirmer l'égalité

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$

   D'où nous déduisons successivement

$$AH^2 = AC^2 - HC^2$$

H étant le milieu de $[BC]$

$$\begin{aligned} AH^2 &= 8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 \\ &= 48 \end{aligned}$$

AH étant une longueur et donc un nombre positif nous obtenons enfin

$$\boxed{AH = \sqrt{48}}$$

3. Écrire la longueur AH sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un nombre réel à déterminer.

   Déterminons a.

   Décomposons 48 en facteurs premiers : $48 = 2^4 \times 3$.
   Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{48} &= \sqrt{2^4 \times 3} \\ &= \sqrt{(2^2)^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2^2\sqrt{3} \\ &= 4 \times \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{AH = a\sqrt{3} \text{ avec } a = 4.}$$

4. Calculer en cm^2 l'aire du triangle ABC. On donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur approchée de cette aire à 1 mm^2 près par défaut.

   Calculons l'aire du triangle ABC.

   AH est la hauteur de ABC issue de A donc l'aire de ABC est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times BC \times AH \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} \\ &= 16\sqrt{3} \end{aligned}$$

L'aire de ABC est $16\sqrt{3}$ cm^2 dont une valeur approchée au 1 mm^2 près par défaut est 27,71 cm^2.

1 cm^2 = 10 mm^2

II Exercice. (5 points)

Pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Chaque question exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.
Les cinq questions sont indépendantes.

Question 1.

Un article voit son prix baissé de 4 %.
Pour obtenir son nouveau prix, il faut multiplier l'ancien prix par :

- 1,04
- 0,96
- 0,04
- 0,4
- 0,6

Déterminons le coefficient multiplicateur.

Si x est le prix initial de l'article, alors après une baisse de 4 % il devient

$$\begin{aligned} x + \frac{-4}{100}x &= 1 \times x + \frac{-4}{100}x \\ &= \left(1 + \frac{-4}{100}\right)x \end{aligned}$$

Ainsi l'article a été multiplié par

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + \frac{-4}{100} \\ &= 0{,}96 \end{aligned}$$

Dire qu'une quantité baisse de 4 % c'est dire qu'elle est multiplié par 0,96.

Question 2.

Les notes d'un devoir de mathématiques sont réparties de la manière suivante :

Note	5	8	9	10	11	12	13	16	18
Effectif	1	3	4	3	5	7	3	5	2

On note Q_1 le premier quartile de cette série statistique. La valeur de Q_1 est :

- $Q_1 = 5$
- $Q_1 = 8$
- $Q_1 = 9$
- $Q_1 = 10$
- $Q_1 = 12$

Déterminons Q_1.

Les valeurs de la série sont regroupées par modalités nous aurons donc besoin des effectifs cumulés croissants.

Note	5	8	9	10	11	12	13	16	18
Effectif	1	3	4	3	5	7	3	5	2
E.C.C.	1	4	8	11	16	23	26	31	33

Les valeurs de la série (les notes) sont rangées dans l'ordre croissant.
$\frac{N}{4} = \frac{33}{4} = 8{,}25$. Le premier quartile est donc la neuvième valeurs de la série.
Donc, d'après les E.C.C.

$$\boxed{Q_1 = 10}$$

Question 3.

L'ensemble S des solutions de l'équation $2x + 5 = 3x - 7$ est :

- $S = \{-11\}$
- $S = \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$
- $S = \left\{\dfrac{1}{12}\right\}$
- $S = \left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$
- $S = \{12\}$

Résolvons l'équation.

Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré la méthode de résolution consiste à isoler l'inconnue.

L'équation proposée est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} 2x+5-5 &= 3x-7-5 \\ 2x &= 3x-12 \\ 2x-3x &= 3x-12-3x \\ -x &= -12 \\ \frac{-x}{-1} &= \frac{-12}{-1} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions des l'équation est

$$S = \{12\}$$

Il était également possible de tester toutes les solutions proposées.

Question 4.

L'ensemble S des solutions de l'inéquation $3x+8 > -1$ est :

- $S =]-3;+\infty[$
- $S =]-\infty;-3[$
- $S =]-6;+\infty[$
- $S = \left]-\frac{7}{3};+\infty\right[$
- $S = \left]-\frac{1}{24};+\infty\right[$

Résolvons l'inéquation.

Il s'agit d'une inéquation linéaire du premier degré, la méthode de résolution consiste donc à isoler l'inconnue.

L'inéquation proposée est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} 3x+8-8 &> -1-8 \\ 3x &> -9 \end{aligned}$$

3 étant strictement positif

$$\frac{3x}{3} > \frac{-9}{3}$$
$$x > -3$$

Ainsi

L'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S =]-3; +\infty[$$

Question 5.

On note $A(x) = \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$.

L'expression $A(x)$ peut aussi s'écrire :

- $A(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$
- $A(x) = \dfrac{2x+4}{x^2-4}$
- $A(x) = \dfrac{2x+8}{x^2-4}$
- $A(x) = \dfrac{2}{x-2}$
- $A(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$

Exprimons $A(x)$ sous forme d'une seule expression fractionnaire.

Réduisons tout d'abord au même dénominateur

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{1(x-2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{3(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

Remarquons une identité remarquable au dénominateur

$$A(x) = \frac{3(x+2)-(x-2)}{x^2-2^2}$$

Développons, ordonnons puis réduisons le numérateur

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{3 \times x + 3 \times 2 - x - (-2)}{x^2 - 4} \\ &= \frac{3x + 6 - x + 2}{x^2 - 4} \\ &= \frac{3x - x + 6 + 2}{x^2 - 4} \\ &= \frac{2x + 8}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{A(x) = \frac{2x + 8}{x^2 - 4}}$$

Il était également possible de tester la validité des formules proposées en testant des valeurs particulières de x.

III Exercice. (6 points)

f est la fonction définie pour tout x réel par :

$$f(x) = 2x^2 - 8x - 10$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; I; J)$ du plan.

1. (a) Déterminer l'image de 3 par f.

Calculons $f(3)$.

$$\begin{aligned} f(3) &= 2 \times 3^2 - 8 \times 3 - 10 \\ &= -16 \end{aligned}$$

L'image de 3 par f est -16.

(b) Déterminer le ou les antécédents par f du nombre (-10).

Recherchons les antécédents de -10 par f.

Autrement dit nous cherchons les nombres x réels tels que $f(x) = -10$.
Résolvons cette équation.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = -10$$

Il s'agit dune équation polynomiale de degré deux pour la résoudre nous allons donc nous ramener à une équation produit.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 + 10 = -10 + 10 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-8)x = 0 && \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 8 + 8 = 0 + 8 \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 8 \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \text{ ou } x = 0 \\ &\leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{0; 4\}$.

-10 admet deux antécédents par f qui sont 0 et 4.

2. (a) Vérifier que la forme factorisée de f est définie pour tout x réel par :

$$f(x) = 2(x+1)(x-5).$$

Démontrons que quelque soit x réel : $2(x+1)(x-5) = f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Développons l'expression proposée.

$$2(x+1)(x-5) = 2\left[x \times x + x \times (-5) + 1 \times x + 1 \times (-5)\right]$$

Ordonnons puis réduisons l'expression entre crochets.

$$\begin{aligned}
&= 2\left[x^2 - 5x + x - 5\right] \\
&= 2\left[x^2 - 4x - 5\right] \\
&= 2 \times x^2 + 2 \times (-4)x + 2 \times (-5) \\
&= 2x^2 - 8x - 10 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

la forme factorisée de f est $f(x) = 2(x+1)(x-5)$ pour tout x réel.

(b) Déterminez les coordonnées des points A et B d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

Déterminons les coordonnées de A et B.

Puisque A et B sont sur l'axe des abscisses leur ordonnée est nulle. Comme de plus ce sont des points de C_f leur abscisses annulent f. Or, d'après la forme factorisée de f, les valeurs qui l'annule sont -1 et 5 (équation produit), donc

les coordonnées de A et B sont $(-1;0)$ et $(5;0)$.

(c) Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation : $f(x) = x + 1$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$: $f(x) = x + 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Utilisons la forme factorisée de f.

$$\begin{aligned}
f(x) = x + 1 &\Leftrightarrow 2(x+1)(x-5) = x + 1 \\
&\Leftrightarrow 2(x+1)(x-5) - (x+1) = x + 1 - (x+1) \\
&\Leftrightarrow 2(x+1)(x+5) - 1 \times (x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+1)\left[2(x-5) - 1\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+1)\left[2 \times x + 2 \times (-5) - 1\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+1)\left[2x - 11\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de $f(x) = x + 1$ est

$$\mathscr{S} = \left\{-1; \frac{11}{5}\right\}$$

IV Exercice. (4 points)

On considère la droite (D_1) d'équation $y = -2x+3$ et la droite (D_2) d'équation $y = \dfrac{2}{3}x + 1$.

1. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite (D_1) ?

   L'équation donnée de (D_1) est son équation réduite donc

   son coefficient directeur est $p_1 = 3$.

   Que vaut son coefficient directeur ?

   et

   son coefficient directeur est $m_1 = -2$.

2. (a) Dans un repère orthonormal $(O; I, J)$ du plan d'unité graphique 1 cm, tracer les droites (D_1) et (D_2).

   Représentons les droites.

   D'après les ordonnées à l'origine des droites nous pouvons affirmer que (D_1) passe par le point de coordonnées $(0; 3)$ et que la droite (D_2) passe par le point de coordonnées $(0; 1)$.

   Calculons les ordonnées des points des deux droites d'abscisse, par exemple, 3.

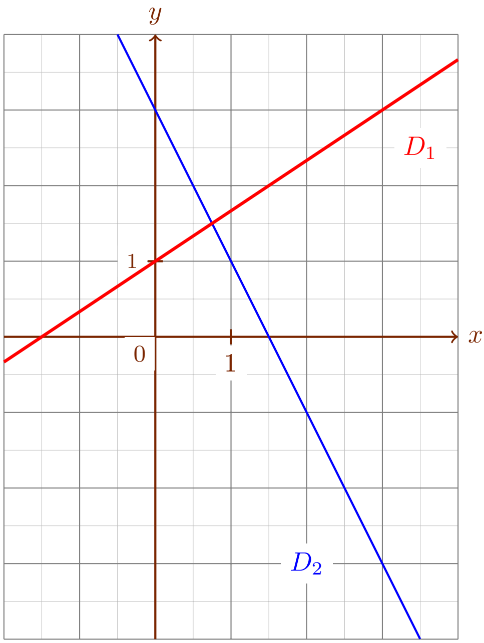
   $$-2 \times 3 + 3 = -3$$

   et

   $$\frac{2}{3} \times 3 + 1 = 3$$

   Nous en déduisons que (D_1) passe par le point de coordonnées $(3; -3)$ tandis que (D_2) passe par celui de coordonnées $(3; 3)$.

   Dessinons ces points et les droites.



(b) Déterminer graphiquement les coordonnées du point I situé à l'intersection des droites (D_1) et (D_2). On donnera des valeurs approchées des coordonnées.

Par lecture graphique nous obtenons que

$$I(0{,}7; 1{,}5).$$

(c) Déterminer par le calcul les coordonnées exactes du point I.

Déterminons par le calcul les coordonnées de I.

I appartient aux deux droites donc ses coordonnées $(x; y)$ vérifient les deux équations. Autrement dit

$$\begin{cases} -2x + 3 = y \\ \frac{2}{3}x + 1 = y \end{cases}$$

D'où en soustrayant les équations membres à membres :

$$-2x + 3 - \left(\frac{2}{3}x + 1\right) = 0$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
-\frac{8}{3}x + 2 &= 0 \\
-\frac{8}{3}x + 2 - 2 &= 0 - 2 \\
-\frac{8}{3}x &= -2 \\
-\frac{8}{3}x \times \left(-\frac{3}{8}\right) &= -2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \\
x &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

D'où nous déduisons

$$y = -2 \times \frac{3}{4} + 3 = \frac{3}{2}$$

Nous vérifions aisément que le couple $\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right)$ est effectivement une solution du système d'équation.
Enfin

$$\boxed{I\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right)}$$

3. Déterminer une équation de la droite (D_3) parallèle à la droite (D_1) passant par le point $A(5; 2)$.

Déterminons une équation de (D_3).

Puisque (D_3) et (D_1) sont parallèles (D_3) admet une équation réduite et son coefficient directeur est le même que celui de (D_1). Donc

$$(D_3) : \; y = -2x + p_3$$

Déterminons l'ordonnée à l'origine p_3.
Puisque $A \in (D_3)$, ses coordonnées vérifient l'équation *i.e.*

$$y_A = -2x_A + p_3$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
2 &= -2 \times 5 + p_3 \\
2 &= -10 + p_3 \\
2 + 8 &= -8 + p_3 + 8 \\
10 &= p_3
\end{aligned}$$

Finalement

une équation réduite de (D_3) est

$$y = -2x + 10$$