Concours EETAA session 2012.

Durée de l'épreuve 2 heures.

I Exercice. (6 points)

1. Factorisons A.

$$\begin{aligned} A &= (2x+3)(2x+3) + (2x+3)(x-4) + (2x+3) \times 1 \\ &= (2x+3)\left[(2x+3) + (x-4) + 1\right] \\ &= (2x+3)(2x+3+x-4+1) \\ &= (2x+3)3x \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 3x(2x+3).}$$

2. Simplifions l'expression de B.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\frac{aa}{a} - \frac{1}{a}}{\frac{1a}{a} + \frac{1}{a}} \\ &= \frac{\frac{a^2-1}{a}}{\frac{a+1}{a}} \\ &= \frac{a^2-1}{a}\left(\frac{a+1}{a}\right)^{-1} \\ &= \frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{a}{a+1} \\ &= \frac{a+1}{a^2-1} \\ &= \frac{a+1}{a^2-1^2} \\ &= \frac{(a+1)\times 1}{(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{1}{a-1} \end{aligned}$$

Finalement

$$B = \frac{1}{a-1}.$$

3. L'idée est de refaire le programme de calcul qui conduit de y à $5+2y$ en l'appliquant à l'encadrement.

   Déterminons un encadrement de $5+2y$.

   Les encadrements suivants sont successivement équivalents :

$$2{,}3 < y < 2{,}4$$

   Puisque $2 > 0$

$$\begin{aligned} 2\times 2{,}3 &< 2y < 2\times 2{,}4 \\ 4{,}6 &< 2y < 4{,}8 \\ 5+4{,}6 &< 5+2y < 5+4{,}8 \\ 9{,}6 &< 5+2y < 9{,}8 \end{aligned}$$

   Si $2{,}3 < y < 2{,}4$ alors $9{,}6 < 5+2y < 9{,}8$.

   Voici une autre méthode pour démontrer ce résultat.

   Déterminons un encadrement de $5+2y$.

   La fonction définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par $f(y) = 5+2y$ est une fonction affine dont le coefficient directeur $a = 2 > 0$ donc est strictement croissante.
   Puisque f est strictement croissante elle conserve l'ordre (stricte) et donc :

$$\begin{aligned} f(2{,}3) &< f(y) < f(2{,}4) \\ 5+2\times 2{,}3 &< 5+2y < 5+2\times 2{,}4 \\ 9{,}6 &< 5+2y < 9{,}8 \end{aligned}$$

   Si $2{,}3 < y < 2{,}4$ alors $9{,}6 < 5+2y < 9{,}8$.

4. Simplifions l'écriture de C.

   Utilisons une identité remarquable.

$$C = \left[\left(\sqrt{3}-2\right) - \left(\sqrt{3}+2\right)\right] \cdot \left[\left(\sqrt{3}-2\right) + \left(\sqrt{3}+2\right)\right]$$

   Développons à l'intérieur des crochets

$$\begin{aligned} &= \left[\sqrt{3}-2-\sqrt{3}-2\right] \cdot \left[\sqrt{3}-2+\sqrt{3}+2\right] \\ &= [-4] \cdot \left[2\sqrt{3}\right] \end{aligned}$$

   Enfin

$$\boxed{C = -8\sqrt{3}}$$

   Simplifions l'écriture de D.

   Pour sommer les fractions réduisons les au même dénominateur.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)\cdot(\sqrt{3}+2)} + \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)\cdot(\sqrt{3}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}-2)\cdot(\sqrt{3}+2)} \end{aligned}$$

   Une identitable est remarquable au dénominateur

$$D = \frac{(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}^2 - 2^2}$$

   Développons au numérateur.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2}{3-4} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{-1} \end{aligned}$$

   Enfin

$$\boxed{D = -2\sqrt{3}}$$

II Exercice. (5 points)

Question 1.

Les calculatrices gèrent dorénavant assez bien ces calculs exactes.

Déterminons la valeur (exacte) de AC.

ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Ce qui équivaut successivment à

$$5^2 + AC^2 = 7^2$$
$$25 + AC^2 = 49$$
$$25 - AC^2 - 25 = 49 - 25$$
$$AC^2 = 24$$
$$AC = \sqrt{24} \quad \text{ou} \quad AC = -\sqrt{24}$$

AC étant une longueur, donc un nombre positif, nécessairement

$$AC = \sqrt{24}$$

Or la décomposition de 24 en facteurs premiers est

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

donc $24 = 2^2 \times 6$ et enfin

$$\boxed{AC = 2\sqrt{6}}$$

Question 2.

Première méthode : longue mais qui fonctionne même si l'équation n'est pas donnée en réponse.

Déterminons l'équation de (AB).

Le coefficient directeur de (AB) est donné par la formule du taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_A - y_B}{x_1 - x_B} \\ &= \frac{1-(-1)}{1-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine de (AB) vérifie :

$$y_A = mx_A + p$$

Avec les valeurs numériques

$$1 = -2 \times 1 + p$$

Ce qui équivaut uccessivement à

$$\begin{aligned} 1 &= -2 + p \\ 1+2 &= -2 + p+2 \\ 3 &= p \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(AB) : \quad y = -2x + 3}$$

Deuxième méthode : il s'agit par des vérifications de retrouver la réponse correcte.

une seule équation est vérifiée par les coordonnées de B à savoir, la deuxième :

$$-1 = -2 \times 2 + 3$$

Troisième méthode : entrer les expressions des fonctions affines associées aux équations réduite dans la calculatrice et trouvée graphiquement celle qui passe effectivement par A et B.

Question 3.

Déterminons les valeurs possibles pour a.

Dire que la droite passe par C équivaut à dire que les coordonnées de C vérifient l'équation de (D_1).

ce qui équivaut successivement à :

$$y_C = -5x_A + 1$$

Et comme $C(a; a+2)$

$$a + 2 = -5a + 1$$

Il s'agit d'une équation linéaire du premier degr que nous résolvons en isolant l'inconnue a.

$$\begin{aligned} a + 2 + 5a &= -5a + 1 + 5a \\ 6a + 2 &= 1 \\ 6a + 2 - 2 &= 1 - 2 \\ 6a &= -1 \\ \frac{6a}{6} &= \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

Dire que C appartient à la droite équivaut à dire que $a = -\frac{1}{6}$.

Il était également possible de vérifier si les coordonnées de C vérifiaient l'équation pour les différentes valeurs proposées pour a.

Question 4.

Résolvons l'inéquation.

Il s'agit d'une inéquation linéaire du premier degré pour la résoudre nous isolons l'inconnue.

$$-3x + 5 < 3$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} -3x + 5 - 5 &< 3 - 5 \\ -3x &< -2 \end{aligned}$$

-3 étant négatif l'ordre est inversé.

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3}$$
$$x > \frac{2}{3}$$
$$x \in \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$$

$$S = \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$$

Question 5.

Déterminons la moyenne de la série statistique.

Il s'agit d'une série de modalité accompagnée d'une série d'effectifs correspondant pour détermine a médiane nous allons déterminer les effectifs cumulés croissants.

Ajoutons la ligne des effectifs cumulés croissants au tableau.

Note	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	13	22	32	83	90	127	120	110
E.C.C.	13	35	67	150	240	367	487	597

Note	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectif	70	95	28	72	49	25	24	11
E.C.C.	667	762	790	862	911	936	960	971

- La série des notes est déjà ordonnée.
- $\frac{N}{2} = \frac{971}{2} = 485{,}5$. La série étant impaire la médiane est donc la 486-ième donnée.
- Donc, d'après les effectifs cumulés croissants, $Me = 9$.

Enfin : $Me = 9$.

III Exercice. (9 points)

1. (a) Développons, ordonnons puis réduisons l'expression donnée.

$$\begin{aligned}
&(x-4)(5x-24)\\
&= x\times(5x) + x\times(-24) + (-4)\times(5x) + (-4)\times(-24)\\
&= 5x^2 - 24x - 20x + 96\\
&= 5x^2 - 44x + 96
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(x-4)(5x-24) = 5x^2 - 44x + 96.}$$

(b) Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux. Pour la résoudre il faut l'écrire sous forme d'équation produit.

D'après la question précédente, nous avons les équivalences successives

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-4)(5x-24) = 0\\
&\Leftrightarrow x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 24 = 0\\
&\Leftrightarrow x - 4 + 4 = 0 + 4 \quad \text{ou} \quad 5x - 24 + 24 = 0 + 24\\
&\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad 5x = 24\\
&\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad \frac{5x}{5} = \frac{24}{5}\\
&\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad x = \frac{24}{5}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est

$$\mathscr{S} = \left\{4; \frac{24}{5}\right\}$$

2. (a) Nous pouvons reconnaître la forme canonique d'une fonction polynomiale de degré deux. Il est possible de retrouver cette expression à partir de forme développée de f, $f(x) = ax^2 + bx + c$ grâce aux formule : $\alpha = -\frac{b}{a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Nous pourrions également retrouver cette forme canonique en factorisant astucieusement la forme développée de f.

Démontrons que, quelque soit le réel x, $5\left(x-\dfrac{22}{5}\right)^2-\dfrac{4}{5}=f(x)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
5\left(x-\frac{22}{5}\right)^2-\frac{4}{5} &= 5\left[x^2-2\times x\times\frac{22}{5}+\left(\frac{22}{5}\right)^2\right]-\frac{4}{5}\\
&= 5\left[x^2-\frac{44}{5}x+\frac{22^2}{5^2}\right]-\frac{4}{5}\\
&= 5\left[x^2-\frac{44}{5}x+\frac{484}{25}\right]-\frac{4}{5}\\
&= 5\times x^2+5\times\left(-\frac{44}{5}x\right)+5\times\frac{484}{25}-\frac{4}{5}\\
&= 5x^2-44x+\frac{484}{5}-\frac{4}{5}\\
&= 5x^2-44x+96
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=5\left(x-\frac{22}{5}\right)^2-\frac{4}{5}}$$

(b) Déterminons le minimum de f et la valeur pour laquelle il est atteint.

Il est ici possible de répondre directement en utilisant la forme canonique trouvée à la question précédente : $a=5$, $\alpha=\frac{22}{5}$ et $\beta=-\frac{4}{5}$. Donc f admet un minimum (car $a>0$) égale à $-\frac{4}{5}$ et il est atteint pour $\frac{22}{5}$.

Nous avons déterminé la forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ à la question précédente avec : $a=5$, $\alpha=\frac{22}{5}$ et $\beta=-\frac{4}{5}$.
Puisque $a=5>0$ la parabole est orientée vers le haut et nous en déduisons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{22}{5}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{4}{5}$	$\nearrow$

Par lecture du tableau :

f admet un minimum égale à $-\frac{4}{5}$ qui est atteint pour $\frac{22}{5}$.

(c) Résolvons l'équation $f(x) = -1$.

D'après la question précédente f est toujours strictement plus grand que -1. Il n'y aucune solution à cette équation.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -1$ est

$$\mathscr{S} = \varnothing$$

(d) Résolvons l'équation $f(x) = \frac{12}{5}$.

Il s'agit à nouveau d'une équation polynomiale de degré deux. Nous devons donc essayer de nous ramener à une équation produit.

$$f(x) = \frac{12}{5}$$

équivaut successivement à

$$5\left(x-\frac{22}{5}\right)^2-\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$$
$$5\left(x-\frac{22}{5}\right)^2-\frac{4}{5}-\frac{12}{5}=\frac{12}{5}-\frac{12}{5}$$
$$5\left(x-\frac{22}{5}\right)^2-\frac{16}{5}=0$$
$$5\left(x-\frac{22}{5}\right)^2-\frac{5}{5}\cdot\frac{16}{5}=0$$
$$5\left[\left(x-\frac{22}{5}\right)^2-\frac{16}{25}\right]=0$$
$$5\left[\left(x-\frac{22}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]=0$$
$$5\left[x-\frac{26}{5}\right]\left[x-\frac{18}{5}\right]=0$$
$$x-\frac{26}{5}=0 \quad \text{ou} \quad x-\frac{18}{5}=0$$
$$x-\frac{26}{5}+\frac{26}{5}=0+\frac{26}{5} \quad \text{ou} \quad x-\frac{18}{5}+\frac{18}{5}=0+\frac{18}{5}$$
$$x=\frac{26}{5} \quad \text{ou} \quad x=\frac{18}{5}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=\frac{12}{5}$ est

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{26}{5};\frac{18}{5}\right\}$$

3. (a) La somme des aires de ces carrés est égale à 25 se traduit exactement par

$$x^2+y^2=25$$

Le périmètre, p, de la figure s'obtient en parcourant la figure dans le sens directe par

$$p=x+x+x+y+y+y+(x-y)$$

Autrement dit : $p = 4x + 2y$.
Et comme le périmètre de la figure formée est égale à 22 :

$$4x + 2 = 22$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\times(4x+2) &= \frac{1}{2}\times 22 \\ \frac{1}{2}\times(4x) + \frac{1}{2}\times 2 &= 11 \\ 2x + 1 &= 11 \end{aligned}$$

(b) Montrons que nécessairement $5x^2 - 44x + 96 = 0$.

Exprimons y en fonction de x dans la seconde équation :

$$\begin{aligned} 2x + y = 11 &\Leftrightarrow 2x + y - 2x = 11 - 2x \\ &\Leftrightarrow y = 11 - 2x \end{aligned}$$

En substituant à y cette expression en fonction de x dans la première équation nous obtenons

$$x^2 + (11-2x)^2 = 25$$

ce qui est successivement équivalent à

$$\begin{aligned} x^2 + (11-2x)^2 - 25 &= 25 - 25 \\ x^2 + (11-2x)^2 - 25 &= 0 \\ x^2 + 11^2 - 2\times 11\times(2x) + (2x)^2 - 25 &= 0 \\ x^2 + 121 - 44x + 2^2\cdot x^2 - 25 &= 0 \\ x^2 + 121 - 44x + 4x^2 - 25 &= 0 \\ x^2 + 4x^2 - 44x + 96 &= 0 \\ 5x^2 - 44x + 96 &= 0 \end{aligned}$$

Si x est solution du système alors nécessairement

$$x^2 - 44x + 96 = 0$$

(c) Déterminons toutes les valeurs possibles pour x et t.

D'après la question 1(b) l'équation précédente admet deux solutions : 4 et $\frac{24}{5}$.
Les valeurs correspondantes pour y sont respectivement :

$$y = 11 - 2 \times 4 = 3 \text{ et } y = 11 - 2 \times \frac{24}{5} = \frac{7}{5}$$

Il y a donc deux couples possibles $(4;3)$ et $\left(\frac{24}{5};\frac{7}{5}\right)$.
Comme l'énoncé impose $x > y$, finalement

il n'y a qu'une seule figure et elle est obtenue pour $x = 4$ et $y = 3$.