

Concours EETAA session 2012.

Durée de l'épreuve 2 heures.

I Exercice.

(6 points)

Vous ferez apparaître les étapes des calculs sur votre copie.
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit x un nombre réel. Factoriser l'expression suivante :

$$A = (2x + 3)^2 + (2x + 3)(x - 4) + 2x + 3$$

Factorisons A .

$$\begin{aligned} A &= (2x + 3)(2x + 3) + (2x + 3)(x - 4) + (2x + 3) \times 1 \\ &= (2x + 3) [(2x + 3) + (x - 4) + 1] \\ &= (2x + 3)(2x + 3 + x - 4 + 1) \\ &= (2x + 3)3x \end{aligned}$$

$$A = 3x(2x + 3).$$

2. a est un réel non nul et différent de (-1) . Simplifiez l'expression suivante :

$$B = \frac{a - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}}$$

Simplifions l'expression de B .

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\frac{aa}{a} - \frac{1}{a}}{\frac{1a}{a} + \frac{1}{a}} \\
 &= \frac{\frac{a^2-1}{a}}{\frac{a+1}{a}} \\
 &= \frac{a^2-1}{a} \left(\frac{a+1}{a} \right)^{-1} \\
 &= \frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{a}{a+1} \\
 &= \frac{a+1}{a^2-1} \\
 &= \frac{a+1}{a^2-1^2} \\
 &= \frac{(a+1) \times 1}{(a+1)(a-1)} \\
 &= \frac{1}{a-1}
 \end{aligned}$$

Finalement

$$B = \frac{1}{a-1}.$$

3. y est un nombre réel tel que : $2,3 < y < 2,4$.
En déduire un encadrement de $5 + 2y$.

L'idée est de refaire le programme de calcul qui conduit de y à $5 + 2y$ en l'appliquant à l'encadrement.

Déterminons un encadrement de $5 + 2y$.

Les encadrements suivants sont successivement équivalents :

$$2,3 < y < 2,4$$

Puisque $2 > 0$

$$2 \times 2,3 < 2y < 2 \times 2,4$$

$$4,6 < 2y < 4,8$$

$$5 + 4,6 < 5 + 2y < 5 + 4,8$$

$$9,6 < 5 + 2y < 9,8$$

$$\text{Si } 2,3 < y < 2,4 \text{ alors } 9,6 < 5 + 2y < 9,8.$$

Voici une autre méthode pour démontrer ce résultat.

Déterminons un encadrement de $5 + 2y$.

La fonction définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par $f(y) = 5 + 2y$ est une fonction affine dont le coefficient directeur $a = 2 > 0$ donc est strictement croissante.

Puisque f est strictement croissante elle conserve l'ordre (stricte) et donc :

$$\begin{aligned} f(2,3) &< f(y) < f(2,4) \\ 5 + 2 \times 2,3 &< 5 + 2y < 5 + 2 \times 2,4 \\ 9,6 &< 5 + 2y < 9,8 \end{aligned}$$

$$\text{Si } 2,3 < y < 2,4 \text{ alors } 9,6 < 5 + 2y < 9,8.$$

4. Simplifier l'écriture des réels suivants :

$$\begin{aligned} C &= (\sqrt{3} - 2)^2 - (\sqrt{3} + 2)^2 \\ D &= \frac{1}{\sqrt{3} - 2} - \frac{1}{\sqrt{3} + 2} \end{aligned}$$

Simplifions l'écriture de C .

Utilisons une identité remarquable.

$$C = [(\sqrt{3} - 2) - (\sqrt{3} + 2)] \cdot [(\sqrt{3} - 2) + (\sqrt{3} + 2)]$$

Développons à l'intérieur des crochets

$$\begin{aligned} &= [\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} - 2] \cdot [\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 2] \\ &= [-4] \cdot [2\sqrt{3}] \end{aligned}$$

Enfin

$$C = -8\sqrt{3}$$

Simplifions l'écriture de D .

Pour sommer les fractions réduisons les au même dénominateur.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{3} + 2}{(\sqrt{3} - 2) \cdot (\sqrt{3} + 2)} + \frac{\sqrt{3} - 2}{(\sqrt{3} + 2) \cdot (\sqrt{3} - 2)} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3} - 2) \cdot (\sqrt{3} + 2)} \end{aligned}$$

Une identité remarquable est remarquable au dénominateur

$$D = \frac{(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2)}{\sqrt{3}^2 - 2^2}$$

Développons au numérateur.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 2}{3 - 4} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{-1} \end{aligned}$$

Enfin

$$D = -2\sqrt{3}$$

II Exercice.

(5 points)

Pour chaque question, une seule des cinq réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée.

Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Les cinq questions sont indépendantes.

Question 1.

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ cm et $BC = 7$ cm.

La distance AC est égale à :

$$AC = 2 \text{ cm}$$

$$AC = 4,9 \text{ cm}$$

$$AC = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$AC = \sqrt{23} \text{ cm}$$

$$AC = 4,8 \text{ cm}$$

Les calculatrices gèrent dorénavant assez bien ces calculs exactes.

Déterminons la valeur (exacte) de AC .

ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Ce qui équivaut successivement à

$$5^2 + AC^2 = 7^2$$

$$25 + AC^2 = 49$$

$$25 - AC^2 - 25 = 49 - 25$$

$$AC^2 = 24$$

$$AC = \sqrt{24} \quad \text{ou} \quad AC = -\sqrt{24}$$

AC étant une longueur, donc un nombre positif, nécessairement

$$AC = \sqrt{24}$$

Or la décomposition de 24 en facteurs premiers est

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

donc $24 = 2^2 \times 6$ et enfin

$$AC = 2\sqrt{6}$$

Question 2.

Dans un repère du plan, la droite (D) passe par les points $A(1; 1)$ et $B(2; -1)$.

L'équation de la droite (D) est

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = -2x + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = 3x - 2$$

$$y = -2x - \frac{3}{2}$$

Première méthode : longue mais qui fonctionne même si l'équation n'est pas donnée en réponse.

Déterminons l'équation de (AB) .

Le coefficient directeur de (AB) est donné par la formule du taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_A - y_B}{x_1 - x_B} \\ &= \frac{1 - (-1)}{1 - 2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine de (AB) vérifie :

$$y_A = mx_A + p$$

Avec les valeurs numériques

$$1 = -2 \times 1 + p$$

Ce qui équivaut successivement à

$$1 = -2 + p$$

$$1+2 = -2 + p+2$$

$$3 = p$$

Finalement

$$(AB) : y = -2x + 3$$

Deuxième méthode : il s'agit par des vérifications de retrouver la réponse correcte.

une seule équation est vérifiée par les coordonnées de B à savoir, la deuxième :

$$-1 = -2 \times 2 + 3$$

Troisième méthode : entrer les expressions des fonctions affines associées aux équations réduite dans la calculatrice et trouvée graphiquement celle qui passe effectivement par A et B .

Question 3.

Dans un repère du plan, on considère la droite (D_1) d'équation $y = -5x + 1$.
Soit le point $C(a; a + 2)$ où a est un réel.

La valeur de a pour que la droite passe par le point C est :

$$a = -\frac{1}{6}$$

$$a = -\frac{1}{5}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

$$a = \frac{1}{6}$$

Déterminons les valeurs possibles pour a .

Dire que la droite passe par C équivaut à dire que les coordonnées de C vérifient l'équation de (D_1) .

ce qui équivaut successivement à :

$$y_C = -5x_A + 1$$

Et comme $C(a; a + 2)$

$$a + 2 = -5a + 1$$

Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré que nous résolvons en isolant l'inconnue a .

$$a + 2 + 5a = -5a + 1 + 5a$$

$$6a + 2 = 1$$

$$6a + 2 - 2 = 1 - 2$$

$$6a = -1$$

$$\frac{6a}{6} = \frac{-1}{6}$$

Dire que C appartient à la droite équivaut à dire que $a = -\frac{1}{6}$.

Il était également possible de vérifier si les coordonnées de C vérifiaient l'équation pour les différentes valeurs proposées pour a .

Question 4.

L'ensemble S des solutions de l'inéquation $-3x + 5 < 3$ est :

$$S =]-\infty; \frac{2}{3}[$$

$$S =]-\infty; -\frac{1}{5}[$$

$$S =]-\frac{2}{3}; +\infty[$$

$$S =]\frac{2}{3}; +\infty[$$

$$S =]-\frac{1}{5}; +\infty[$$

Résolvons l'inéquation.

Il s'agit d'une inéquation linéaire du premier degré pour la résoudre nous isolons l'inconnue.

$$-3x + 5 < 3$$

équivaut successivement à

$$-3x + 5 - 5 < 3 - 5$$

$$-3x < -2$$

-3 étant négatif l'ordre est inversé.

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3}$$

$$x > \frac{2}{3}$$

$$x \in]\frac{2}{3}; +\infty[$$

$$S = \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$$

Question 5.

Les notes à l'épreuve de mathématiques d'un concours se sont réparties de la manière suivante :

Note	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	13	22	32	83	90	127	120	110

Note	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectif	70	95	28	72	49	25	24	11

On note Me la médiane de cette série statistique. La valeur de Me est :

$$Me = 11$$

$$Me = 10$$

$$Me = 9$$

$$Me = 8$$

$$Me = 7$$

Déterminons la moyenne de la série statistique.

Il s'agit d'une série de modalité accompagnée d'une série d'effectifs correspondant pour déterminer la médiane nous allons déterminer les effectifs cumulés croissants.

Ajoutons la ligne des effectifs cumulés croissants au tableau.

Note	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	13	22	32	83	90	127	120	110
E.C.C.	13	35	67	150	240	367	487	597

Note	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectif	70	95	28	72	49	25	24	11
E.C.C.	667	762	790	862	911	936	960	971

- La série des notes est déjà ordonnée.
- $\frac{N}{2} = \frac{971}{2} = 485,5$. La série étant impaire la médiane est donc la 486-ième donnée.
- Donc, d'après les effectifs cumulés croissants, $Me = 9$.

Enfin : $Me = 9$.

III Exercice.

(9 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = 5x^2 - 44x + 96$.

1. (a) Développer l'expression $(x - 4)(5x - 24)$.

Développons, ordonnons puis réduisons l'expression donnée.

$$\begin{aligned} (x - 4)(5x - 24) &= x \times (5x) + x \times (-24) + (-4) \times (5x) + (-4) \times (-24) \\ &= 5x^2 - 24x - 20x + 96 \\ &= 5x^2 - 44x + 96 \end{aligned}$$

Finalement

$$(x - 4)(5x - 24) = 5x^2 - 44x + 96.$$

- (b) Résoudre ensuite l'équation $f(x) = 0$.

Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux. Pour la résoudre il faut l'écrire sous forme d'équation produit.

D'après la question précédente, nous avons les équivalences successives

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x - 4)(5x - 24) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 4 + 4 = 0 + 4 \quad \text{ou} \quad 5x - 24 + 24 = 0 + 24 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad 5x = 24 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad \frac{5x}{5} = \frac{24}{5} \\ &\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad x = \frac{24}{5} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ 4; \frac{24}{5} \right\}$$

2. (a) Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = 5 \left(x - \frac{22}{5}\right)^2 - \frac{4}{5}$.

Nous pouvons reconnaître la forme canonique d'une fonction polynomiale de degré deux. Il est possible de retrouver cette expression à partir de forme développée de f , $f(x) = ax^2 + bx + c$ grâce aux formules : $\alpha = -\frac{b}{a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Nous pourrions également retrouver cette forme canonique en factorisant astucieusement la forme développée de f .

Démontrons que, quelque soit le réel x , $5 \left(x - \frac{22}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} = f(x)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} 5 \left(x - \frac{22}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} &= 5 \left[x^2 - 2 \times x \times \frac{22}{5} + \left(\frac{22}{5}\right)^2 \right] - \frac{4}{5} \\ &= 5 \left[x^2 - \frac{44}{5}x + \frac{22^2}{5^2} \right] - \frac{4}{5} \\ &= 5 \left[x^2 - \frac{44}{5}x + \frac{484}{25} \right] - \frac{4}{5} \\ &= 5 \times x^2 + 5 \times \left(-\frac{44}{5}x\right) + 5 \times \frac{484}{25} - \frac{4}{5} \\ &= 5x^2 - 44x + \frac{484}{5} - \frac{4}{5} \\ &= 5x^2 - 44x + 96 \end{aligned}$$

Nous avons démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 5 \left(x - \frac{22}{5}\right)^2 - \frac{4}{5}$$

- (b) Quelle est la valeur minimale prise par $f(x)$? Et pour quelle valeur de x ?

Déterminons le minimum de f et la valeur pour laquelle il est atteint.

Il est ici possible de répondre directement en utilisant la forme canonique trouvée à la question précédente : $a = 5$, $\alpha = \frac{22}{5}$ et $\beta = -\frac{4}{5}$. Donc f admet un minimum (car $a > 0$) égale à $-\frac{4}{5}$ et il est atteint pour $\frac{22}{5}$.

Nous avons déterminé la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ à la question précédente avec : $a = 5$, $\alpha = \frac{22}{5}$ et $\beta = -\frac{4}{5}$.

Puisque $a = 5 > 0$ la parabole est orientée vers le haut et nous en déduisons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{22}{5}$	$+\infty$
$f(x)$			

Par lecture du tableau :

f admet un minimum égale à $-\frac{4}{5}$ qui est atteint pour $\frac{22}{5}$.

- (c) Résoudre l'équation $f(x) = -1$.

Résolvons l'équation $f(x) = -1$.

D'après la question précédente f est toujours strictement plus grand que -1 . Il n'y aucune solution à cette équation.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -1$ est

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

- (d) En utilisant $f(x) = 5 \left(x - \frac{22}{5}\right)^2 - \frac{4}{5}$, résoudre l'équation $f(x) = \frac{12}{5}$.

Résolvons l'équation $f(x) = \frac{12}{5}$.

Il s'agit à nouveau d'une équation polynomiale de degré deux. Nous devons donc essayer de nous ramener à une équation produit.

$$f(x) = \frac{12}{5}$$

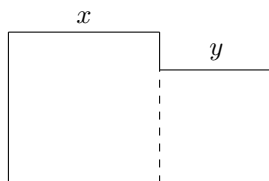
équivalent successivement à

$$\begin{aligned}
 & 5 \left(x - \frac{22}{5} \right)^2 - \frac{4}{5} = \frac{12}{5} \\
 & 5 \left(x - \frac{22}{5} \right)^2 - \frac{4}{5} - \frac{12}{5} = \frac{12}{5} - \frac{12}{5} \\
 & 5 \left(x - \frac{22}{5} \right)^2 - \frac{16}{5} = 0 \\
 & 5 \left(x - \frac{22}{5} \right)^2 - \frac{5}{5} \cdot \frac{16}{5} = 0 \\
 & 5 \left[\left(x - \frac{22}{5} \right)^2 - \frac{16}{25} \right] = 0 \\
 & 5 \left[\left(x - \frac{22}{5} \right)^2 - \left(\frac{4}{5} \right)^2 \right] = 0 \\
 & 5 \left[x - \frac{26}{5} \right] \left[x - \frac{18}{5} \right] = 0 \\
 & x - \frac{26}{5} = 0 \quad \text{ou} \quad x - \frac{18}{5} = 0 \\
 & x - \frac{26}{5} + \frac{26}{5} = 0 + \frac{26}{5} \quad \text{ou} \quad x - \frac{18}{5} + \frac{18}{5} = 0 + \frac{18}{5} \\
 & x = \frac{26}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{18}{5}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = \frac{12}{5}$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{26}{5}; \frac{18}{5} \right\}$$

3. Soient deux carrés de côtés x et y tels que $x > y$, disposés comme l'indique la figure :



On sait que :

- La somme des aires de ces carrés est égale à 25.
- Le périmètre de la figure formée est égale à 22.

- (a) Montrer que les deux équations précédentes conduisent au système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

La somme des aires de ces carrés est égale à 25 se traduit exactement par

$$x^2 + y^2 = 25$$

Le périmètre, p , de la figure s'obtient en parcourant la figure dans le sens directe par

$$p = x + x + x + y + y + y + (x - y)$$

Autrement dit : $p = 4x + 2y$.

Et comme le périmètre de la figure formée est égale à 22 :

$$4x + 2 = 22$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times (4x + 2) &= \frac{1}{2} \times 22 \\ \frac{1}{2} \times (4x) + \frac{1}{2} \times 2 &= 11 \\ 2x + 1 &= 11 \end{aligned}$$

- (b) Montrer que le système précédent conduit à l'équation en x : $5x^2 - 44x + 96 = 0$.

Montrons que nécessairement $5x^2 - 44x + 96 = 0$.

Exprimons y en fonction de x dans la seconde équation :

$$\begin{aligned} 2x + y = 11 &\Leftrightarrow 2x + y - 2x = 11 - 2x \\ &\Leftrightarrow y = 11 - 2x \end{aligned}$$

En substituant à y cette expression en fonction de x dans la première équation nous obtenons

$$x^2 + (11 - 2x)^2 = 25$$

ce qui est successivement équivalent à

$$\begin{aligned} x^2 + (11 - 2x)^2 - 25 &= 25 - 25 \\ x^2 + (11 - 2x)^2 - 25 &= 0 \\ x^2 + 11^2 - 2 \times 11 \times (2x) + (2x)^2 - 25 &= 0 \\ x^2 + 121 - 44x + 2^2 \cdot x^2 - 25 &= 0 \\ x^2 + 121 - 44x + 4x^2 - 25 &= 0 \\ x^2 + 4x^2 - 44x + 96 &= 0 \\ 5x^2 - 44x + 96 &= 0 \end{aligned}$$

Si x est solution du système alors nécessairement

$$x^2 - 44x + 96 = 0$$

- (c) Trouver alors les longueurs des côtés des deux carrés. Combien y a-t-il de figures possibles ?

Déterminons toutes les valeurs possibles pour x et t .

D'après la question 1(b) l'équation précédente admet deux solutions : 4 et $\frac{24}{5}$.

Les valeurs correspondantes pour y sont respectivement :

$$y = 11 - 2 \times 4 = 3 \text{ et } y = 11 - 2 \times \frac{24}{5} = \frac{7}{5}$$

Il y a donc deux couples possibles $(4; 3)$ et $(\frac{24}{5}; \frac{7}{5})$.

Comme l'énoncé impose $x > y$, finalement

il n'y a qu'une seule figure et elle est obtenue pour $x = 4$ et $y = 3$.