Épreuve de mathématiques CRPE 2025 groupe 3.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On donne la série de nombres suivante.

$$4 - 16 - 8 - 15 - 10 - 17 - 10 - 6 - 12 - 9 - 14.$$

Affirmation 1 : la médiane de cette série est égale à 11.

Ordonnons la série : $4 < 6 < 8 < 9 < 10 \leqslant 10 < 12 < 14 < 15 < 16 < 17$.
Il y a 11 valeurs donc la médiane est sixième valeur de la série ordonnée. La médiane est donc 10.

L'affirmation 1 est fausse.

2. Le 4 août 2024, lors d'une épreuve d'athlétisme, Noah Lyles a remporté le titre olympique du 100 m en réalisant un temps de 9,79 s.
Affirmation 2 : Noah Lyles a couru à une vitesse moyenne supérieure à 37 km/h.

La vitesse du sportif est

$$\begin{aligned} v &= \frac{100 \text{ m}}{9{,}79 \text{ s}} \\ &= \frac{100 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{9{,}79 \times \frac{1}{3600} \text{ h}} \\ &= \frac{100}{1000} \times \frac{3600}{9{,}79} \text{ km/h} \\ &\approx 36{,}77 \text{ km/h} \end{aligned}$$

L'affirmation 2 est fausse.

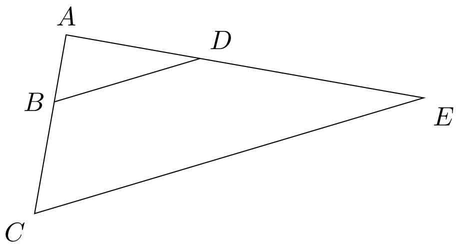
3. **Affirmation 3** : l'aire d'un carré est proportionnelle à la longueur de son côté.

Longueur du côté	1	2
Aire du carré	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$

Or $1 \times 4 \neq 2 \times 1$ donc il n'y a pas proportionnalité.

L'affirmation 3 est fausse.

4. Sur la figure ci-dessous, les droites (BC) et (DE) sont sécantes en A et les droites (BD) et (CE) sont parallèles. $AB = 3$ cm ; $BC = 5$ cm et $CE = 12$ cm.



Affirmation 4 : $BD = 4{,}4$ cm.

* Configuration de Thalès : les points A, B, C d'une part et A, D, E d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Condition de Thalès : $(BD) \parallel (CE)$.

Des points précédents, et d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}.$$

Or $AC = AB + BC = 3 + 5 = 8$ donc

$$\frac{3}{8} = \frac{BD}{12}$$
$$\frac{3}{8} \times 12 = BD$$
$$4{,}5 = BD$$

L'affirmation 4 est fausse.

Exercice 2.

Un enseignant propose l'énigme ci-dessous aux élèves.

Indice A	Je suis un entier supérieur à 1 000 et inférieur à 4 000.
Indice B	Je suis un multiple de 3.
Indice C	Mon chiffre des centaines est le double de celui des unités.
Indice D	Mon nombre de centaines est un multiple de 9.
Indice E	Je ne suis pas divisible par 4.
Indice F	Mon chiffre des unités est 4.
	Quel nombre suis-je ?

Écrire une résolution de l'énigme en détaillant chaque étape.

Soit n le nombre entier recherché.

* Puisque $1000 \leqslant n \leqslant 4000$, n s'écrit avec 4 chiffres.

  Soient a, b, c et d des entiers naturels compris entre 0 et 9 tels que $n = 1000a + 100b + 10c + d$. Nous noterons $n = \overline{abcd}$.
* Le chiffre des unités est 4 donc $d = 4$ et $n = \overline{abc4}$.
* Le chiffre des centaines de n est le double de celui des unités donc $b = 2d = 2 \times 4 = 8$ et $n = \overline{a8c4}$.
* Le nombre de centaines de n est un multiple de 9 autrement dit $\overline{a8}$ est un multiple de 9.

  Or n est compris entre 1000 et 4000 donc $1 \leqslant a \leqslant 4$ et $\overline{a8}$ est égale 18 ou 28 ou 38.

  Seul 18 est un multiple de 9 donc $a = 1$ et $n = \overline{18c4}$.
* n est un multiple de 3 donc $1 + 8 + c + 4 = 13 + c$ est un multiple de 3. Nécessairement $c = 2$ ou $c = 5$ ou $c = 8$. Ainsi $n = 1824$ ou $n = 1854$ ou $n = 1884$.

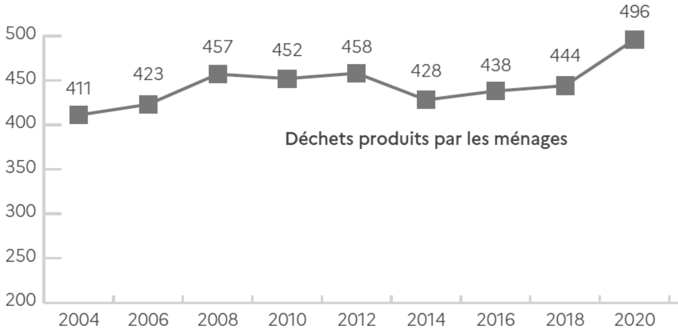
  De plus n n'est pas divisible par 4 autrement dit ses deux derniers chiffres ne forment pas un nombre divisible par 4. 1824 et 1884 étant divisibles par 4 nécessairement

$$\boxed{= 1854.}$$

Exercice 3.

Les graphiques de cet exercice sont extraits du document Déchets chiffres-clés Édition 2023 publié par l'agence de la transition écologique.

1. Le graphique ci-dessous illustre l'évolution, entre 2004 et 2020, de la quantité de déchets ménagers collectés en France par le service public de gestion des déchets. Les données sont exprimées en kilogrammes par habitant.



Source : Eurostat, RSD

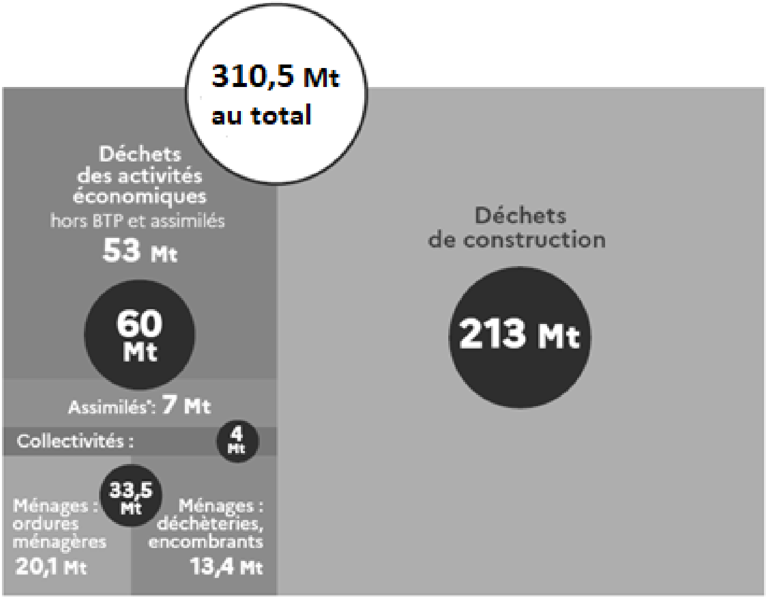
À l'aide des données du graphique, calculer la masse moyenne de déchets ménagers collectés par habitant au cours de cette période. Arrondir le résultat au kilogramme.

Calculons la masse moyenne $\overline{x}$ des déchets par habitant.

$$\overline{x} = \frac{411 + 423 + 457 + 453 + 458 + 428 + 438 + 444 + 496}{9}$$

$$\boxed{\overline{x} = 445 \text{ kg.}}$$

2. L'infographie ci-dessous représente la répartition des différents secteurs dans la production des déchets en France.



Source: Règlement Statistiques sur les Déchets, 2020; ADEME, Enquête Collecte 2019; Estimations IN NUMERI par calage des résultats de l'enquête collecte 2019 sur les données du RSD 2020.

En s'appuyant sur l'infographie ci-dessus, calculer la part de l'ensemble des déchets produits par les ménages dans la production totale de déchets. Exprimer cette part en pourcentage arrondi à l'unité.

Calculons la part en pourcentage, p, des déchets ménagers.

$$p = \frac{33{,}5}{310{,}5} \times 100$$

Les déchets ménagers représentent 11 % de l'ensemble.

3. On considère que la masse d'un mètre cube de déchets verts est égale à 0,2 t. En 2023, la masse de déchets verts produits par habitant est égale à 88 kg.

   (a) Calculer, en mètre cube, le volume de déchets verts produits par un lotissement de soixante personnes en 2023.

   Calculons le volume V de déchets verts pour un lotissement de soixante personnes.

* La masse de déchets produits par 60 personnes est : $M_1 = 60 \times 88$ kg = 5280 kg.
* Donc, par proportionnalité le volume de déchets verts est $V = \frac{5280}{0,2}$ m^3.

$$\boxed{V = 26\,400 \text{ m}^3.}$$

(b) On considère qu'à l'issue du processus de compostage, la masse de compost obtenu représente environ 55 % de la masse initiale de déchets verts.
Calculer la masse de compost obtenu par ce lotissement pour l'année 2023. On donnera la réponse en kg.

Calculons la masse M_2 de composte.

On applique la proportion : $M_2 = \frac{55}{100} \times M_1 = \frac{55}{100} \times 5280$ kg.

$$\boxed{M_2 = 2904 \text{ kg.}}$$

Exercice 4.

Un élève dispose de deux dés équilibrés : un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et un dé à dix faces numérotées de 1 à 10.

Les probabilités seront toutes données sous forme de fraction irréductible.

Partie A.

L'élève lance les deux dés et il effectue le produit des nombres obtenus sur chacun des deux dés.

1. Montrer que la probabilité que le produit obtenu soit égal à 35 est $\dfrac{1}{60}$.

Calculons la probabilité d'obtenir 35.

Modélisons l'expérience aléatoire : l'univers est formé des couples de nombres obtenus qui sont tous équiprobables de plus il y a $6\times10 = 60$ couples possibles.
La décomposition en facteurs premiers : $35 = 5 \times 7$, nous montre que le seul produit possible avec les deux dés est 5 avec le dé à 6 faces et 7 avec celui à 10. Autrement dit un seul des 60 couples possibles permet d'obtenir 35 et comme il y a équiprobabilité entre les couples

la probabilité d'obtenir 35 est de $\frac{1}{60}$.

2. Donner la probabilité que le produit obtenu soit égal à 16.

Schématisons l'expérience à l'aide d'un tableau double entrée.

Dé 6 faces / Dé 10 faces	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36
7	7	14	21	28	35	42
8	8	16	24	32	40	48
9	9	18	27	36	45	54
10	10	20	30	40	50	60

Il y a équiprobabilité l'univers contient 60 issues et l'événement « obtenir 16 » est réalisé par deux issues donc

la probabilité d'obtenir 16 est $\frac{1}{30}$.

3. Donner la probabilité que le produit obtenu soit un multiple de 3.

En reprenant le raisonnement précédent les multiples de 3 sont dans les colonnes 3 et 6 et dans les lignes 3, 6 et 9 donc

le probabilité d'obtenir un multiple de 3 est $\frac{32}{60} = \frac{8}{15}$.

Partie B.

Pour obtenir une fraction, l'élève procède désormais de la façon suivante :

— il lance le dé à dix faces pour obtenir le numérateur de la fraction ;
— il lance le dé à six faces pour obtenir le dénominateur de la fraction.

On demande à l'élève de décomposer la fraction obtenue en la somme d'un entier naturel et d'une fraction strictement inférieure à 1.

1. L'élève obtient le nombre 10 avec le premier dé et 3 avec le second dé. Quelle est la décomposition attendue ?

   On procède à la division euclidienne du numérateur par lé dénominateur : $\frac{10}{3} = \frac{3\times3+1}{3} = \frac{3\times3}{3} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$.

   La décomposition attendue est $3 + \frac{1}{3}$.

2. Déterminer la probabilité que l'entier obtenu dans la décomposition soit égal à 0.

   Dénombrons le nombre de couples correspondant à l'événement.

   Nous adopterons la notation suivante : le premier nombre du couple est le résultat du dé à 10 faces et le second celui du dé à 6 faces.

   Les couples qui réalisent l'événement sont

   $$\begin{array}{l}(1;2)\\(1;3),(2;3)\\(1;4),(2;4),(3;4)\\(1;5),(2;5),(3;5),(4;5)\\(1;6),(2;6),(3;6),(4;6),(5,6)\end{array}$$

   La probabilité que la partie entière soit nulle est $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$.

3. Déterminer la probabilité que la fraction obtenue soit égale à un nombre entier.

   Le résultat sera un nombre entier si le nombre obtenu avec le dé à 10 faces est multiple du nombre obtenu avec le dé à 6 faces.

Les issues convenant sont

$(1;1)$
$(2;1)$,$(2;2)$
$(3;1)$,$(3;3)$
$(4;1)$,$(4;2)$,$(4;4)$
$(5;1)$,$(5;5)$
$(6;1)$,$(6;2)$,$(6;3)$,$(6;6)$
$(7;1)$,$(7;7)$
$(8;1)$,$(8;2)$,$(8;4)$,$(8;8)$
$(9;1)$,$(9;3)$,$(9;9)$
$(10;1)$,$(10;2)$,$(10;5)$,$(10;10)$

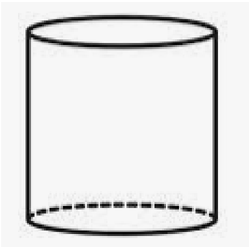
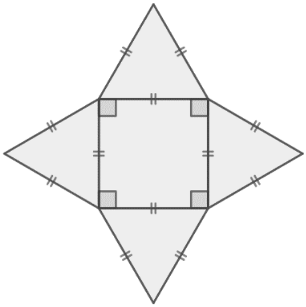
La probabilité d'obtenir un entier est $\frac{27}{60} = \frac{9}{20}$.

Exercice 5.

Une directrice d'une école de trois classes organise des ateliers de confection de bougies. Pour cela, elle utilise des ustensiles décrits ci-dessous, des mèches à bougie et de la cire.

Louche

Le cuilleron de la louche utilisée est une demi-sphère de diamètre 5 cm.

Moule de type A : un cylindre	**Moule de type B : une pyramide régulière à base carrée**
 Cylindre de rayon 2,5 cm.	Patron du moule de type B  Les arêtes du moule de type B ont toutes pour longueur 4 cm.

On rappelle ci-dessous quelques formules de volumes.

Volume d'une boule de rayon r : $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Volume d'un prisme droit : *aire de la base* × *hauteur*.

Volume d'un cylindre : *aire de la base* × *hauteur*.

Volume d'une pyramide : $\frac{1}{3}$ × *aire de la base* × *hauteur*.

1. (a) Montrer que le volume du cuilleron de la louche utilisée, arrondi au dixième de cm^3, est 32,7 cm^3.

Calculons le volume V_1 du cuilleron.

Puisque c'est une demi-boule

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5}{2}\right)^3 \\ &= \frac{5^3}{2^2 \times 3}\pi \\ &\approx 32{,}72 \end{aligned}$$

$$V_1 \approx 32{,}7 \text{ cm}^3.$$

(b) Déterminer la hauteur minimale h du moule de type A, arrondie au millimètre, permettant d'y verser une louche pleine de cire.

Déterminons la hauteur minimale de h permettant d'y verser une louche pleine.

On cherche h tel que, en notant V_2 le volume du cylindre qu'est le moule A on ait

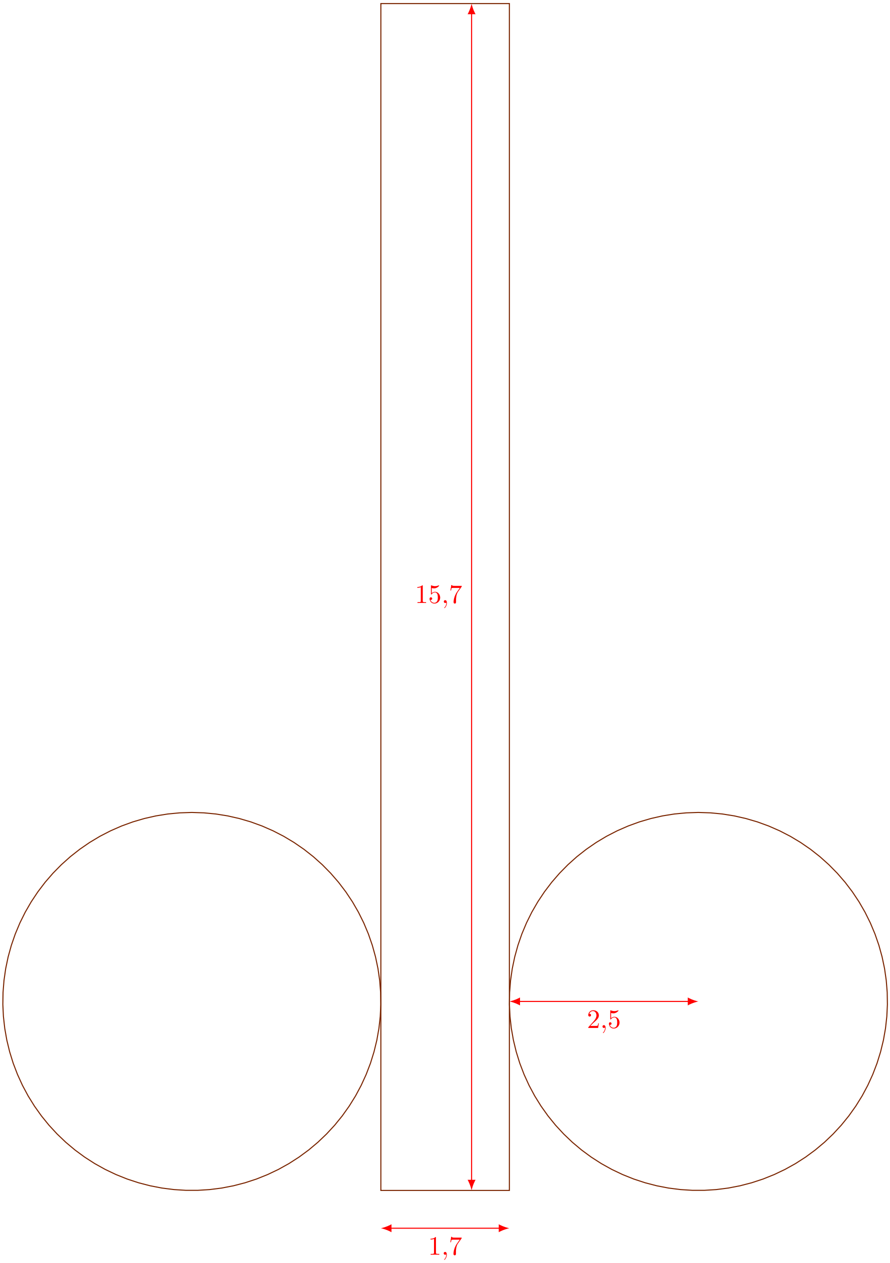
$$\begin{aligned} V_2 &\geqslant V_1 \\ \pi r^2 \times h &\geqslant \frac{5^3}{2^2 \times 3}\pi \\ 2{,}5^2 h &\geqslant \frac{5^3}{2^2 \times 3} \\ h &\geqslant \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Or $\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$ donc

il faut que la hauteur soit a minima de 1,7 cm.

(c) Tracer à main levée un patron du moule de type A de hauteur h. On indiquera sur ce patron les dimensions permettant de fabriquer ce moule, arrondies au millimètre.

Longueur du cercle de la base du cylindre $2\pi r = 2 \times \pi \times 2{,}5 \approx 15{,}7$.



2. Sur l'étiquette de la cire à faire fondre, on lit l'indication suivante : « 90 g de cire fondue permettent de remplir un moule de 100 mL ».

(a) Déterminer la masse de cire à faire fondre pour remplir le cuilleron de la louche. Arrondir le résultat au gramme.

$V_1 = 32{,}7\ \text{cm}^3 = 0{,}0327\ \text{dm}^3 = 0{,}0327\ \ell = 32{,}7\ \text{m}\ell$.
Par proportionnalité la masse de cire nécessaire est

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{32{,}7}{100} \times 90\ \text{g} \\ &= 29{,}43\ \text{g} \end{aligned}$$

Il faut faire fondre 29 g.

(b) On utilise les moules de type A de hauteur h en versant une louche pleine de cire par bougie fabriquée. Avec 1 kg de cire, combien de bougies cylindriques peut-on fabriquer ?

$\frac{1\ \text{kg}}{29\ \text{g}} = \frac{1000\ \text{g}}{29\ \text{g}} \approx 34{,}4827$.

Avec 1 kg il peut faire 34 bougies cylindriques.

3. (a) Calculer la longueur de la diagonale de la face carrée du moule de type B. On arrondira le résultat au millimètre.

En usant du théorème de Pythagore on obtient la longueur de la diagonale : $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

La longueur de la diagonale de la face carrée est 5,7 cm.

(b) Déterminer la valeur arrondie au millimètre de la hauteur du moule de type B.

La hauteur du moule est

$$\begin{aligned} h' &= \sqrt{4^2 - \left(\frac{5{,}7}{2}\right)^2} \\ &\approx 2{,}8 \end{aligned}$$

$h' \approx 2{,}8$ cm.

(c) Un moule de type B peut-il recevoir une louche pleine de cire ? Justifier la réponse.

Le volume V_3 du moule B est

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2{,}8 \\ &\approx 14{,}933 \end{aligned}$$

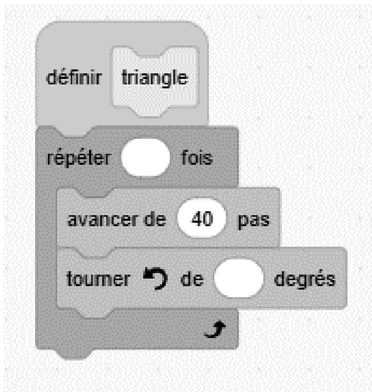
$V3 < V_1$ donc

un moule de type B ne peut pas contenir une pleine louche.

4. (a) Indiquer comment compléter les lignes L1 et L2 du bloc « triangle » ci-dessous pour qu'il permette de tracer un triangle équilatéral de côté 40 pas. Aucune justification n'est attendue.

L1

L2

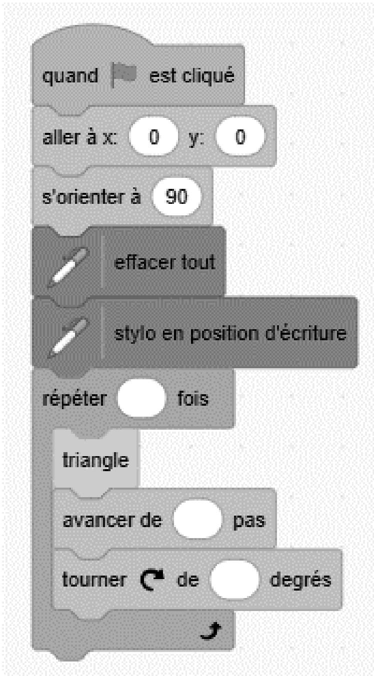


L1 : 3
L2 : 120

(b) Indiquer comment compléter les lignes L3, L4 et L5 du script ci-dessous pour qu'il trace le patron du moule de type B représenté dans le tableau en début d'énoncé (10 pas représentent 1 cm).

On rappelle que « s'orienter à 90 » signifie s'orienter vers la droite.

Lutin



L3

L4

L5

L3 : 4
L4 : 40
L5 : 90

5. Pour les bougies fabriquées avec le moule de type A, la directrice prévoit une mèche de 3 cm et pour celles fabriquées avec le moule de type B, une mèche de 4 cm.

   Afin de disposer d'une longueur de mèche suffisante, elle commande, pour chaque classe, une longueur de mèche 5 % plus grande que la longueur nécessaire.

   En prévision de la commande de mèches, la directrice élabore la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D
1		**Nombre de bougies avec le moule de type A**	**Nombre de bougies avec le moule de type B**	**Longueur de ficelle commandée (en cm)**
2	**Classe 1**	12	13	
3	**Classe 2**	10	15	
4	**Classe 3**	7	17	
5	**École**			

(a) Donner une formule qui peut être saisie en `B5` puis recopiée vers la droite en `C5` pour calculer le nombre total de bougies de chaque type.

= SOMME(B2 : B4)

(b) Donner une formule qui peut être saisie dans la cellule `D2` puis recopiée vers le bas pour déterminer la longueur de mèche commandée pour chaque classe.

$= (3 * \texttt{B2} + 4 * \texttt{C2}) * 1{,}05$

(c) Quelle longueur de mèche totale la directrice doit-elle commander pour l'école ?

$((12 + 10 + 7) \times 3 + (13 + 15 + 17) \times 4) \times 1{,}05 = 280{,}35$

Il faut commander 281 cm de mèche.