Épreuve de mathématiques CRPE 2025 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation 1** : $\dfrac{35}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

   $\frac{35}{7} = 5$ donc c'est un nombre décimal.

   L'affirmation 1 est fausse.

2. **Affirmation 2** : 22,9 est un nombre rationnel.

   $22{,}9 = \frac{229}{10}$ est un nombre rationnel.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. **Affirmation 3** : la somme de sept nombres entiers consécutifs est un multiple de 7.

   Soit n un nombre entier. Les 6 entiers qui le suivent sont $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ e $n+6$. La somme de ces 7 entiers consécutifs est donc

$$\begin{aligned} S &= n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) \\ &= 7n + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\ &= 7n + 28 \\ &= 7n + 7 \times 4 \\ &= 7(n+4) \end{aligned}$$

   Or $n+4$ est un nombre entier donc S est divisible par 7.

   L'affirmation 3 est vraie.

4. Un nombre entier positif est parfait signifie qu'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs stricts (tout diviseur hormis lui-même). Par exemple, 6 est un nombre parfait car $6 = 1 + 2 + 3$.

   Affirmation 4 : 496 est un nombre parfait.

   Déterminons tous les diviseurs de 496 en testant les entiers naturels dans l'ordre croissant (méthode lente mais très élémentaire, un arbre serait plus adapté).

$$
\begin{aligned}
1 \times 496 &= 496 \\
2 \times 248 &= 496 \\
4 \times 124 &= 496 \\
8 \times 62 &= 496 \\
16 \times 31 &= 496 \\
31 \times 16 &= 496
\end{aligned}
$$

   $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$.

   L'affirmation 4 est vraie.

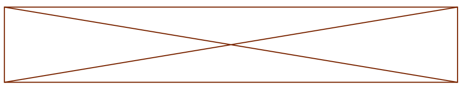
5. **Affirmation 5** : quelque soit le nombre réel positif x, la racine carrée de x est inférieure ou égale à x.

   $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

   L'affirmation 5 est fausse.

6. **Affirmation 6** : tout rectangle a pour axes de symétrie ses diagonales.

   Le rectangle ci-dessous n'est pas symétrique par rapport à ses diagonales :



   L'affirmation 6 est fausse.

Exercice 2.

Claire, éleveuse et productrice de lait fabrique et commercialise du beurre. Elle utilise 8 L de lait pour fabriquer 1 L de crème fraîche. Pour produire 1 kg de beurre, 3 L de cette crème sont nécessaires. L'éleveuse possède 248 vaches. Chaque vache fournit en moyenne 30 L de lait chaque jour.

1. La transformation du lait en crème entraîne une réduction du volume. Montrer que cette réduction est de 87,5 %.

   Calculons le taux d'évolution, t_1, du volume.

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{1-8}{8} \times 100 \\ &= -87{,}5 \end{aligned}$$

   La transformation s'accompagne d'une diminution du volume de 87,5 %.

2. Déterminer la masse de beurre, en kilogrammes, que peut espérer fabriquer Claire chaque jour, si elle utilise la totalité du lait produit par ses vaches.

   * Les 248 vaches produisent 248×30 L $= 7440$ L de lait.
   * Puisque 8 L de lait permettent de fabriquer 1 L de crème fraîche, par proportionnalité, en une journée elle peut produire $\frac{7440 \text{ L}}{8} = 180$ L de crème.
   * Puisque 3 L de crème permettent de produire 1 kg de beurre, par proportionnalité, elle produira $\frac{180 \text{ L}}{3 \text{ L}} \times 1$ kg $= 60$ kg.

   Elle peut produire chaque jour 60 kg de beurre.

3. Claire décide de vendre son beurre en plaquette de 250 g. Chaque plaquette a une forme pouvant être assimilée à un pavé droit dont les dimensions sont 10 cm de longueur, 6,5 cm de largeur et 3,5 cm de hauteur.

(a) Déterminer le volume d'une plaquette de beurre. On exprimera le résultat en cm^3.

Puisque la plaquette est une pavé droit sont volume est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= (10 \text{ cm}) \times (6{,}5 \text{ cm}) \times (3{,}5 \text{ cm}) \\ &= 10 \times 6{,}5 \times 3{,}5 \text{ cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 = 227{,}5 \text{ cm.}}$$

(b) On donne la formule permettant de calculer la masse volumique ρ du beurre, $\rho = \frac{m}{v}$ avec m la masse du beurre et v son volume.
La masse volumique du lait est de 1,03 kg/L.
Comparer la masse volumique du beurre avec celle du lait.

Calculons la masse volumique ρ_b du beurre.

La masse d'une tablette est de 250 g donc

$$\begin{aligned}\rho_b &= \frac{250 \text{ g}}{227{,}5 \text{ cm}^3} \\ &= \frac{0{,}25 \text{ kg}}{0{,}2275 \text{ dm}^3}\end{aligned}$$

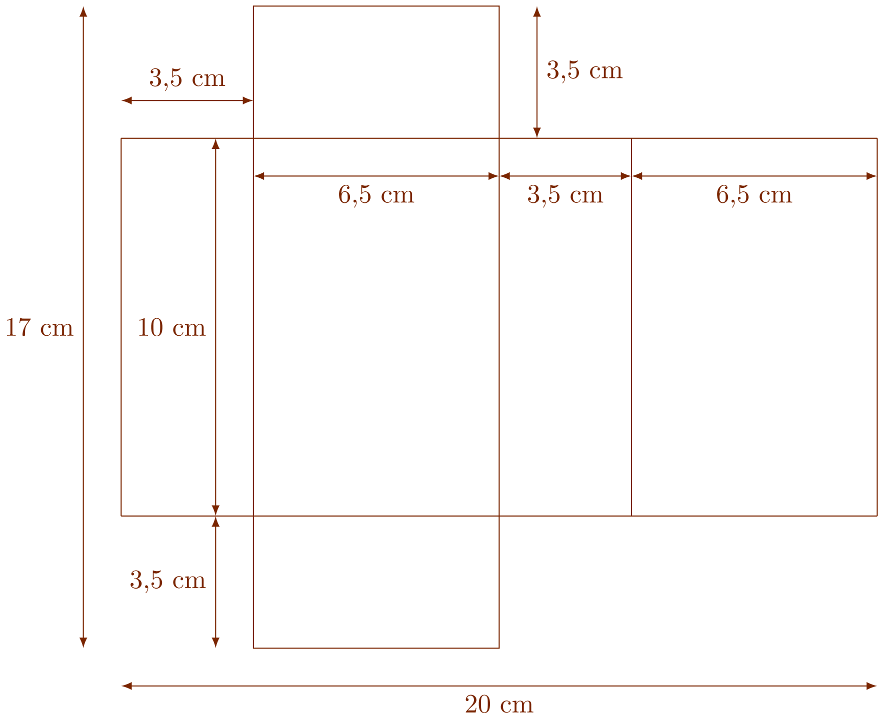
Or 1 dm^3 = 1 L donc

$$\rho_b = 0{,}91 \text{ kgL}$$

$$\boxed{\text{La masse volumique du beurre est plus petite que celle du lait.}}$$

4. Pour emballer chaque plaquette de beurre, Claire utilise une feuille rectangulaire de papier alimentaire de dimensions 23 cm et 20 cm.

   (a) Montrer qu'il est possible d'emballer une plaquette de beurre dans le papier alimentaire choisi par Claire. Une réponse sous la forme d'un schéma sera acceptée.



(b) On note A l'aire totale de la surface du pavé droit représentant la plaquette de beurre. Calculer A en cm^2.

On additionne les aires des rectangles constituant le patron du parallélépipède rectangle.

$A = 2 \times (3{,}5\text{ cm} \times 10\text{ cm}) + 2 \times (10\text{ cm} \times 6{,}5\text{ cm}) + 2 \times (3{,}5\text{ cm} \times 6{,}5\text{ cm})$

$$\boxed{A = 245{,}5\text{ cm}^2.}$$

(c) Claire pense que l'aire A représente au moins 60 % de l'aire de la feuille de papier alimentaire. A-t-elle raison ?

Calculons la proportion p de la feuille utilisée pour l'emballage.

L'aire de la feuille alimentaire est $23\text{cm} \times 20\text{ cm} = 460\text{ cm}^2$.

$$\begin{aligned} p &= \frac{245{,}5}{460} \\ &\approx 0{,}5337 \end{aligned}$$

Elle a tord l'aire A représente strictement moins que 60 %.

5. Claire fixe le prix du beurre à 2,5 € la plaquette. Afin de tenir la comptabilité de ses ventes mensuelles de plaquettes de beurre, elle utilise la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C
1	**Ventes mars 2025**		
2	**Client**	**Nombre de plaquettes vendues**	**Prix total**
3	Coopérative laitière	18400	
4	Supermarché A	8800	
5	Supermarché B	6100	
6	Épicerie fine	1300	
7	Vendeur marché	1438	
8	Vente à la ferme	327	
9	TOTAL		

(a) Proposer une formule qui peut être saisie dans la cellule `B9` pour obtenir le nombre total de plaquettes de beurre vendues en mars 2025. Aucune justification n'est attendue.

= SOMME(`B3 : B8`)

(b) Proposer une formule qui peut être saisie dans la cellule `C3` puis recopiée vers le bas pour compléter la colonne `C`. Aucune justification n'est attendue.

= 2,5 * `B3`

Exercice 3.

La pratique du saut en longueur comprend une course d'élan suivie d'un saut. Une planche d'appel est placée sur la piste d'élan. Si le pied de l'athlète touche ou dépasse cette planche, le saut n'est pas mesuré. Dans ces deux cas, on dit que l'athlète a « mordu ». Si l'athlète n'a pas « mordu », on dit que le saut est réussi.

Pour chaque saut de l'athlète Jean-Baptiste, on considère que :

— les événements « toucher la planche », « dépasser la planche » et « réussir le saut » sont équiprobables,
— le succès ou l'échec d'un saut n'influence pas le saut suivant.

Jean-Baptiste, effectue deux sauts.

Pour chaque question, les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Déterminer la probabilité que Jean-Baptiste réussisse chacun de ses deux sauts.

   Si la modélisation avec un arbre probabiliste pondéré comme on peut le faire en première est très simple, la modélisation avec des outils de collège (donc un tableau double entrée en utilisant l'équiprobabilité) l'est moins.

Premier \ Second	Toucher la planche	Dépasser la planche	Réussir le saut
Toucher la planche			
Dépasser la planche			
Réussir le saut			

   Dans ce tableau chacune des cases vides représente un résultat possible concernant les deux sauts.

   Puisque les événements « toucher la planche », « dépasser la planche » et « réussir le saut » sont équiprobables, et puisque les deux sauts sont indépendants il y a équiprobabilité entre les cases du tableau.

   Ainsi il y a équiprobabilité, l'univers contient 9 issues et l'événement réussir les deux saut est réalisé par une issue donc

   $\boxed{\text{la probabilité de réussir les deux sauts est de } \frac{1}{9}.}$

2. Déterminer la probabilité qu'il « morde » au premier saut et qu'il réussisse le second saut.

   En raisonnant comme précédemment à partir du tableau double entrée

Premier \ Second	Toucher la planche	Dépasser la planche	Réussir le saut
Toucher la planche			
Dépasser la planche			
Réussir le saut			

   on peut affirmer :

la probabilité qu'il « morde » au premier saut et qu'il réussisse le second saut est de $\frac{2}{9}$.

3. Déterminer la probabilité qu'il « morde » exactement une fois.

En raisonnant comme précédemment

Second Premier	Toucher la planche	Dépasser la planche	Réussir le saut
Toucher la planche			
Dépasser la planche			
Réussir le saut			

la probabilité qu'il « morde » exactement une fois est de $\frac{4}{9}$.

4. Déterminer la probabilité qu'il « morde » au moins une fois lors de ses deux sauts.

En raisonnant comme précédemment

Second Premier	Toucher la planche	Dépasser la planche	Réussir le saut
Toucher la planche			
Dépasser la planche			
Réussir le saut			

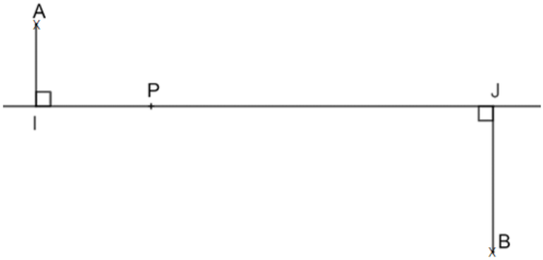
la probabilité qu'il « morde » au moins une fois lors de ses deux sauts est de $\frac{4}{9}$.

Exercice 4.

Alice et Bob vivent dans deux maisons situées de part et d'autre d'un ruisseau. Ils décident de construire un pont sur le ruisseau pour se rendre d'une maison à l'autre. Pour placer le pont, ils hésitent entre les deux possibilités.

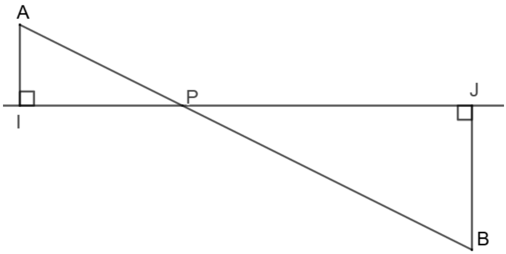
La figure ci-dessous représente le schéma qu'Alice et Bob ont réalisé de leur quartier. Les points A et B représentent leurs maisons respectives, la droite (IJ) représente le ruisseau et le point P la position du pont. Sur ce schéma et dans tout l'exercice, on considère le ruisseau rectiligne et sa largeur négligeable.

On sait que $IJ = 120$ m, $IA = 30$ m et $JB = 46$ m. On note x la longueur, en mètre, du segment $[IP]$.



1. **Première possibilité** : le pont sera placé à l'intersection du segment reliant les deux maisons et du segment représentant le ruisseau. La figure 1 ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle) représente la modélisation de cette première possibilité.

Figure 1.



Déterminer la longueur du segment $[IP]$ dans cette configuration. On donnera le résultat arrondi au mètre.

Calculons IP.

* Configuration de Thalès. Les points I, P, J d'une part et A, P, B d'autre part sont alignés dans le même ordre.
* Condition pour l'utilisation du théorème de Thalès. $(AI) \perp (IJ)$ et $(BJ) \perp (IJ)$ par construction donc $(AI) \parallel (BJ)$.

Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{IP}{JP} = \frac{IA}{JB}.$$

Cette dernière égalité équivaut successivement à :

$$\frac{x}{IJ - IP} = \frac{30}{46}$$
$$\frac{x}{120 - x} = \frac{30}{46}$$

Avec un produit en croix :

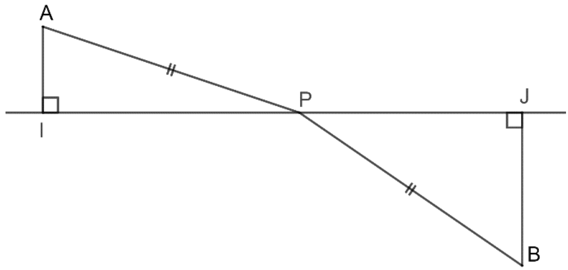
$$\begin{aligned} x \times 46 &= 30 \times (120 - x) \\ 46x &= 30 \times 120 - 30 \times x \\ 46x &= 3600 - 30x \\ 46x+30x &= 3600 - 30x+30x \\ 76x &= 3600 \\ \frac{76x}{76} &= \frac{3600}{76} \end{aligned}$$

Donc $x \approx 47{,}3$ (en tronquant au dixième) et

$$IP \approx 47 \text{ m.}$$

2. **Deuxième possibilité** : le pont sera placé sur le ruisseau à égale distance des deux maisons. La figure 2 ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle) représente la modélisation de cette seconde possibilité.

Figure 2.



   (a) Déterminer AP^2 et PB^2 en fonction de x. En déduire que la longueur du segment $[IP]$, arrondie au mètre, est égale à 65 m.

   * Exprimons AP^2 en fonction de x.

   IAP est rectangle en I donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AP^2 &= AI^2 + IP^2 \\ &= 30^2 + x^2 \end{aligned}$$

$$AP^2 = x^2 + 900.$$

* Exprimons PB^2 en fonction de x.

JBP est rectangle en J donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BP^2 &= BJ^2 + JP^2 \\ &= 46^2 + (120 - x)^2 \\ &= 2116 + 120^2 - 2 \times 120 \times x + x^2 \\ &= x^2 - 240x + 16516 \end{aligned}$$

$$\boxed{BP^2 = x^2 - 240x + 16516.}$$

* Calculons IP.

Puisque $AP = BP$, d'après les questions précédentes on doit avoir :

$$x^2 + 900 = x^2 - 240x + 16516.$$

Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$\begin{gathered} x^2 + 900 - x^2 + 240x - 900 = x^2 - 240x + 16516 - x^2 + 240x - 900 \\ 240x = 15616 \\ \frac{240x}{240} = \frac{15616}{240} \end{gathered}$$

$$\boxed{IP \approx 65 \text{ m}.}$$

3. Le pont est construit selon la seconde possibilité.

(a) Alice part de chez elle pour se rendre chez Bob en suivant le chemin $[AP]$ puis $[PB]$. Elle marche à une vitesse moyenne de 4,5 km/h. Combien de temps met-elle pour parcourir ce trajet ? Donner le résultat en minutes et secondes, arrondi à la seconde.

* Calculons AP.
Nous savons que $AP^2 = x^2 + 900$ or $x = 65$ donc $AP^2 = 65^2 + 900 = 5125$. Enfin AP étant une longueur c'est un nombre positif : $AP = \sqrt{5125} \approx 72$.

* Le temps mit pour parcourir $[AP]$ est donc de

$$\begin{aligned}\frac{72\text{ m}}{4{,}5\text{ km/h}} &= \frac{72\text{ m}}{4500\text{ m}}\text{ h}\\ &= \frac{72}{4500}\times 60\text{ min}\\ &= 0{,}96\text{ min}\end{aligned}$$

* Calculons la durée du trajet.
Le trajet complet durera donc $2 \times 0{,}96$ min $= 1{,}92$ min $= 1$ min $+ 0{,}92 \times 60$ s $= 1$ min $+ 55{,}2$ s.

Le trajet durera 1 min et 55 s.

(b) Bob part de chez lui en courant pour se rendre chez Alice en suivant le chemin $[BP]$ puis $[PA]$. Il met 57 s pour parcourir ce trajet. Déterminer sa vitesse en km/h. Arrondir le résultat à l'unité.

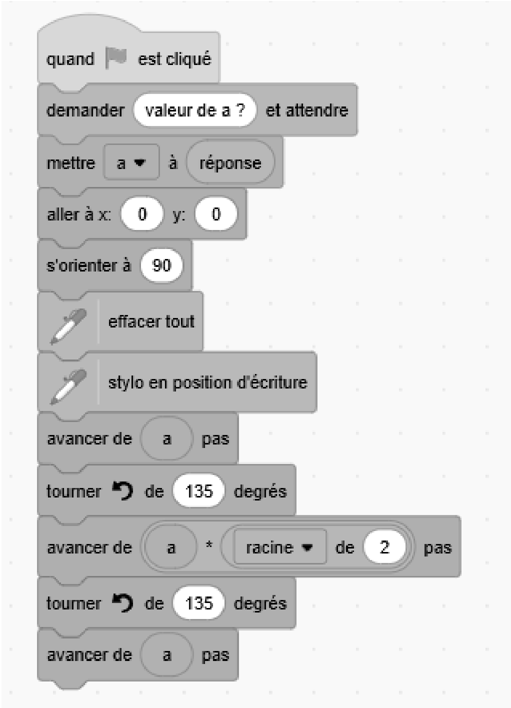
Calculons la vitesse v de Bob.

$$\begin{aligned}v &= \frac{2\times 65\text{ m}}{57\text{ s}}\\ &= \frac{130\frac{1}{1000}\text{ km}}{57\times\frac{1}{3600}\text{ h}}\\ &= \frac{130}{1000}\times\frac{3600}{57}\;\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 8{,}21\text{km/h}\end{aligned}$$

$v \approx 8$ km/h.

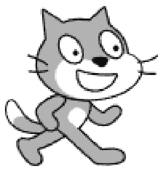
Exercice 5.

On considère le programme ci-dessous écrit à l'aide du logiciel Scratch.



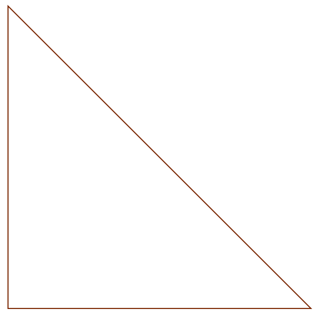
Lorsque le drapeau de la première instruction est cliqué, le lutin demande la valeur de a puis il trace une figure à l'écran. On admet que la figure tracée est un triangle rectangle isocèle.

On rappelle que « s'orienter à 90 » signifie que le lutin s'oriente vers droite.



Lutin

1. On suppose pour cette question que $a = 40$. Tracer sur la copie, à la règle graduée et au compas, la figure obtenue à l'écran en choisissant comme échelle 1 cm pour représenter 10 pas. Laisser apparents les traits de construction. Aucune justification n'est attendue.



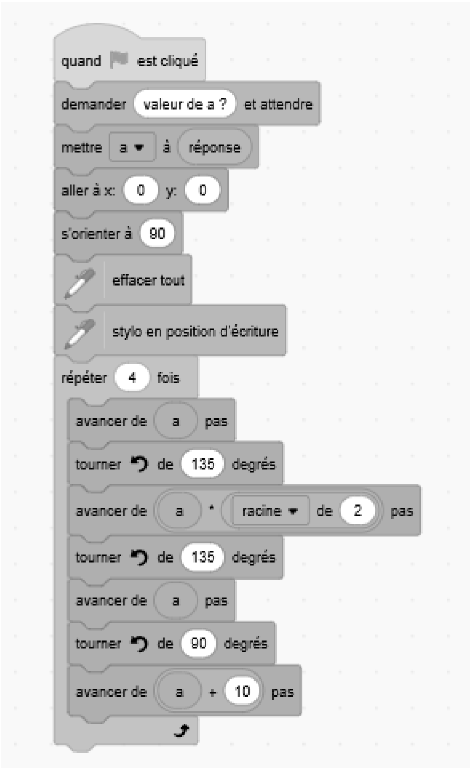
2. Indiquer l'orientation du lutin à la fin du programme. Aucune justification n'est attendue.

   Il est orienté vers le bas.

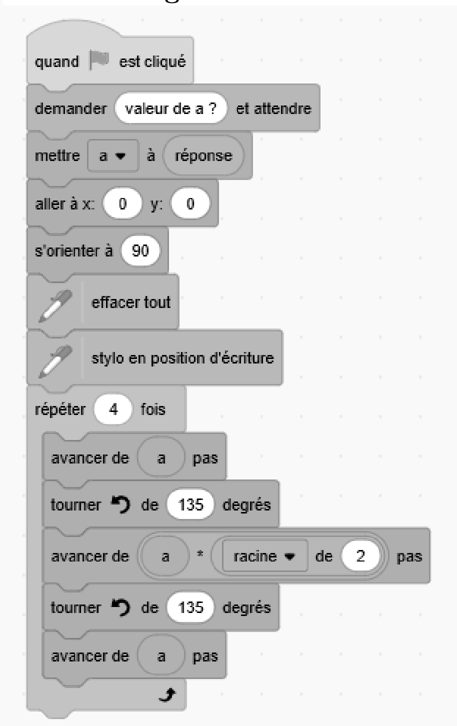
   Il est orienté à 0.

3. On modifie le programme de trois façons différentes. On obtient les 3 programmes ci-dessous.

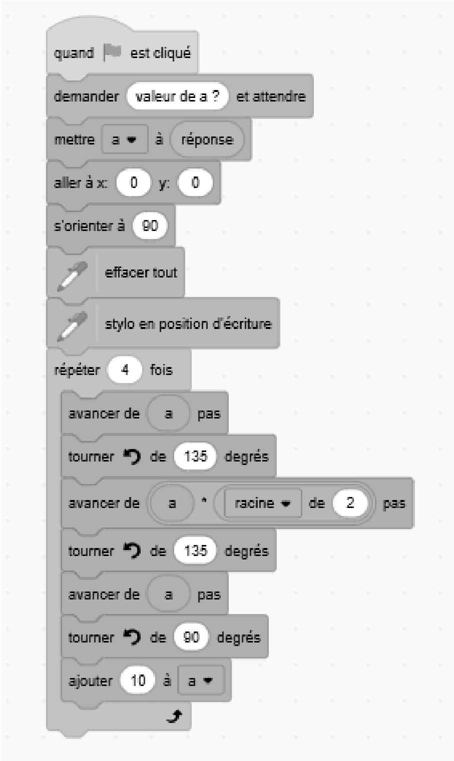
Programme A



Programme B



Programme C



Chacun des trois programmes permet d'obtenir l'une des quatre figures ci-dessous.

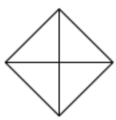


Figure 1

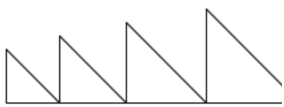


Figure 2

Figure 3

Figure 4

Associer, sans justifier, chaque programme à la figure correspondante.

Le programme A correspond à la figure 3.
Le programme B correspond à la figure 1.
Le programme C correspond à la figure 4.