Épreuve de mathématiques CRPE 2024 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Exercice 1.

1. Déterminons la médiane Me de la série.

   Il n'y a pas de méthode directement graphique de lecture de la médiane. Il faut extraire l'information du diagramme afin de l'exploiter.

   Par lecture graphique :

Salaires	1200	1400	1600	1800	2000	2300	3200
Effectifs	11	4	7	5	2	1	1
E.C.C.	11	15	22	27	29	30	31

   * La série des salaires est rangée dans l'ordre croissant.
   * $\frac{N}{2} = \frac{31}{2} = 15,5$ donc (série impaire, Me est la seizième valeur de la série ordonnée.
   * D'après les effectifs cumulés croissants, $Me = 1600$ €.

   L'affirmation 1 est fausse.

2. $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ sont des nombres décimaux car de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a est un entier et n un entier naturel.

   Or

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} &= \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} \\ &= \frac{1 \times 10}{10 \times 3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

   donc le quotient des nombres décimaux $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ n'est pas un nombre décimal.

   L'affirmation 2 est fausse.

3. Deux démarches sont possibles : soit vérifier avec la réponse proposée soit déterminer le nombre de gâteaux donnés.

   Déterminons le nombre n_g de gâteaux donnés.

   Puisque Paul mange les deux cinquièmes d'un paquet de 40, le nombre de gâteaux mangés est

   $$\frac{2}{5} \times 40 = 16$$

   Le nombre de gâteaux restant est donc de

   $$40 - 16 = 24$$

   Puisqu'il donne les trois huitièmes de ce qu'il reste

   $$\begin{aligned} n_G &= \frac{3}{8} \times 24 \\ &= 9 \end{aligned}$$

   L'affirmation est fausse.

   Nous aurions pu multiplier les proportions entre-elles. Trois huitièmes de trois cinquième de 40 égale : $\frac{3}{5} \times \frac{3}{8} \times 40 = 9$

4. Les quatre nombres intervenant dans la division euclidienne (par exemple : $14 = 3 \times 4 + 2$) sont le dividende (14), le diviseur (3), le quotient (4) et le reste (2). L'énoncé nous parle du dividende, du diviseur et du reste ; nommons donc les quotients.
   Notons

   $$\begin{aligned} a &= 13 \times q_a + 9 \quad (1) \\ b &= 13 \times q_b + 4 \quad (2) \end{aligned}$$

   où q_a et q_b sont des entiers naturels.
   En additionnant membre à membre les égalités (1) et (2) on obtient l'égalité

   $$\begin{aligned} a + b &= 13 \times q_a + 9 + 13 \times q_b + 4 \\ a + b &= 13 \times q_a + 13 \times q_b + 9 + 4 \\ a + b &= 13 \times (a + b) + 13 \end{aligned}$$

Une petite astuce classique de présentation pour permettre la factorisation :

$$a + b = 13 \times (q_a + q_b) + 13\times 1$$
$$a + b = 13\times(q_a + q_b) + \times 1$$
$$a + b = 13\times(q_a + q_b + 1)$$

Autrement dit la division euclidienne de $a + b$ par 13 donne un reste nul. Autrement dit $a + b$ est divisible par 13.

L'affirmation 4 est vraie.

Nous aurions pu travailler directement sur le quotient en manipulant des fractions.

$$\frac{a}{13} = q_a + \frac{9}{13} \text{et} \frac{b}{13} = q_b + \frac{4}{13}$$
$$\frac{a}{13} + \frac{b}{13} = q_a + \frac{9}{13} + q_b + \frac{4}{13}$$

Les fractions ayant les mêmes dénominateurs :

$$\frac{a+b}{13} = q_a + q_b + \frac{4+9}{13}$$
$$\frac{a+b}{13} = q_a + q_b + 1$$

Ainsi nous obtenons bien un nombre entier en divisant $a + b$ par 13.

Méthode schématique à la Singapour (mais je n'ai pas le temps de faire les schémas avec des patates pour illustrer).

a est formé d'un certain nombre de paquets de 13 et 9 unités.

b est formé d'un certain nombre de paquets de 13 et de 4 unités.

En réunissant a et b on obtient davantage de paquets de 13 et 9 + 3 unités c'est-à-dire un nouveau paquet de 12.

5. Soit f une fonction linéaire. Il existe donc un nombre a tel que $f(x) = ax$ pour tout nombre x.
   Considérons n'importe quel couple de nombres que nous noterons x et y et déterminons l'image de leur somme par f.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) \\ &= a \times x + a \times y \\ &= ax + ay \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

L'image de la somme égale la somme des images.

> L'affirmation 5 est vraie.

Exercice 2.

1. Calculons la probabilité d'obtenir 1 000 points en un lancer.

   Modélisons l'expérience probabiliste.

   Considérons que l'un des dés est bleu et l'autre rouge. Notons d'abord le nombre affiché par le dé bleu puis celui affiché par le dé rouge. Ainsi $(1;5)$ signifie obtenir 1 avec le dé bleu et 5 avec le dé rouge.

   Pour représenter tous les couples possibles et déterminer le nombre de points associés à chacun dessinons un tableau double entrée.

bleu \ rouge	1	2	3	4	5	6
1	1000	50	50	50	50	50
2	50	200	50	50	50	50
3	50	50	300	50	50	50
4	50	50	50	400	50	50
5	50	50	50	50	500	50
6	50	50	50	50	50	600

   Nous obtenons ainsi $6 \times 6 = 36$ couples de nombres qui ont tous la même probabilité d'être obtenus puisque les dés ne sont pas truqués.

   Il n'y a qu'un seul lancer parmi les 36 lancers équiprobables qui permettent d'obtenir 1000 points donc :

   > la probabilité d'obtenir 1000 point en un lancer est de $\frac{1}{36}$.

2. (a) Précisons l'ensemble des résultats possibles.

   L'énoncé semble distinguer les points des résultats. Les premiers désignent le système de points décrit dans l'énoncé et le second les nombres affichés par les dés. Cependant faire une énumération de tous les couples possibles semble très fastidieux et nous nous contenterons d'une description en français.

   Du fait des 50 points apparaissant dans 650 il est nécessaire que l'un des lancers n'ai pas été une paire.

Dans ce cas l'autre lancer donnait 600 points.
Finalement

l'un des deux lancers donne une paire de 6 et l'autre ne donne pas de paire.

(b) Notons A l'événement « obtenir une victoire au troisième lancer après avoir obtenu 650 points aux deux précédents.

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Si x désigne le nombre de points obtenus au troisième lancer on doit avoir

$$x + 650 > 100$$

Autrement dit :

$$x + 650 - 650 > 1000 - 650$$
$$x > 350$$

Ainsi A est réalisé si le troisième lancer donne strictement plus que 350. Autrement dit A est réalisé si le troisième lancer est un double 4 ou un double 5 ou un double 6 ou un double 1.
Les couples de nombres sont équiprobables, il y a 36 couples possibles et 4 réalise A donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36}$$

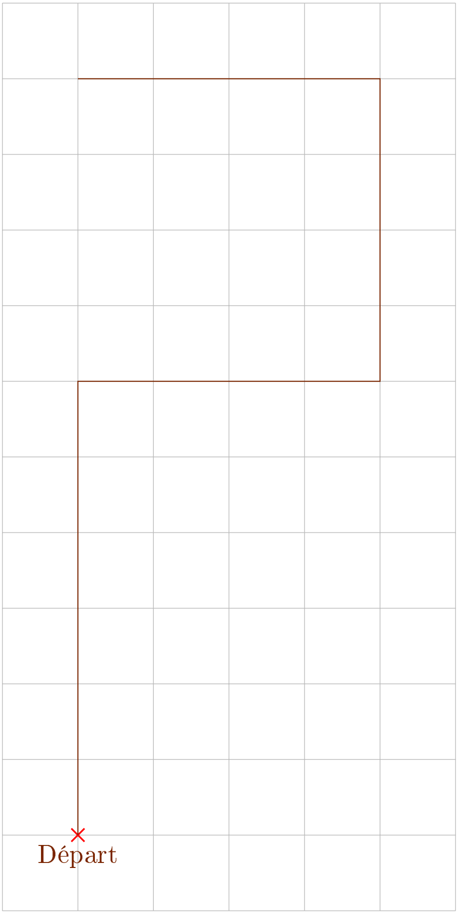
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{9}.$$

Exercice 3.

1. Le programme de la touche a déplace le lutin en ligne droite vers la droite.
   Le programme de la touche b déplace le lutin en ligne droite vers la gauche.
   Le programme de la touche c déplace le lutin en ligne droite vers le haut.
   Le lutin ne peut donc se déplacer vers le bas.

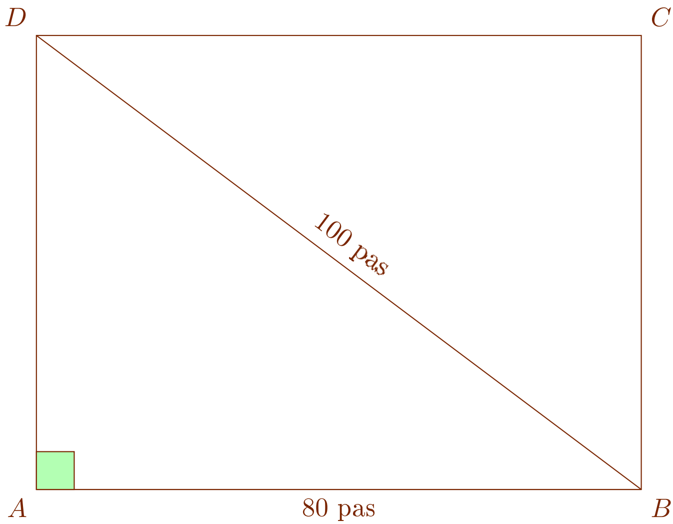
   La proposition 3 ne pourra pas être réalisée en appuyant sur les touches a, b ou c.

2. Chaque pesée sur une touche trace un segment de 20 pas = 2 cm.



3. Calculons la longueur de la largeur du rectangle.

Schématiquement nous avons la situation suivante :



Le triangle ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BA^2 + AC^2 = BC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$BA^2 + AC^2 - AC^2 = BC^2 - AC^2$$

En exprimant les longueurs en pas :

$$BA^2 = 100^2 - 80^2$$
$$BA^2 = 3600$$

BA étant une longueur et donc un nombre positif, nécessairement

$$BA = \sqrt{3600}$$
$$BA = 60$$

Nous pouvons maintenant indiquer les touches qui traceront, dans ce sens, $ABCD$:

a a a a c c c b b b b d d d

Exercice 4.

Partie A.

1. (a) Déterminons l'aire $\mathscr{A}(ABED)$ du polygone $ABED$.

Puisque la dalle est un prisme droit dont $ABED$ est une bas son volume est le produit de $\mathscr{A}(ABED)$ par la hauteur 15 cm = 0, 15 m et donc

$$9,825 \text{ m}^3 = \mathscr{A}(ABED) \times 0,15 \text{ m}$$

Une équation du premier degré dont l'inconnue est l'aire :

$$\frac{9,825 \text{ m}^3}{0,15 \text{ m}} = \frac{\mathscr{A}(ABED) \times 0,15 \text{ m}}{0,15 \text{ m}}$$
$$\frac{9,825}{0,15} \frac{\text{m}^3}{\text{m}} = \mathscr{A}(ABED)$$

Nous obtenons bien

$$\boxed{65,5 \text{ m}^2 = \mathscr{A}(ABED).}$$

(b) Déterminons CE.

Une situation de plus en plus rare dans tous les concours et examens, il faut ici connaître des formules géométriques.

Le polygone est formé d'un rectangle $ABCD$ dont l'aire est $(10 \text{ m}) \times (5 \text{ m}) = 10 \times 5 \text{ m} \cdot \text{m} = 50 \text{ m}^2$ et d'un triangle rectangle en C dont l'aire est $\frac{1}{2} \times CE \times BC = \frac{1}{2} \times CE \times (5 \text{ m} = CE \times (2,5 \text{ m})$ donc

$$65,5 \text{ m}^2 = 50 \text{ m}^2 + CE \times (2,5 \text{ m})$$
$$65,5 \text{ m}^2 - 50 \text{ m}^2 = 50 \text{ m}^2 + CE \times (2,5 \text{ m}) - 50 \text{ m}^2$$
$$15,5 \text{ m}^2 = CE \times (2,5 \text{ m})$$
$$\frac{15,5 \text{ m}^2}{2,5 \text{ m}} = \frac{CE \times (2,5 \text{ m})}{2,5 \text{ m}}$$
$$\frac{15,5}{2,5} \frac{\text{m}^2}{\text{m}} = CE$$

$$\boxed{CE = 6,2 \text{ m}.}$$

2. Calculons le volume $\mathscr{V}_p$ de la dalle haute de 15 cm.

   Puisque la dalle a la forme d'un pavé droit de longueur 5 m, de largeur 3 m et de hauteur 15 cm = 0, 15 m, son volume (en coulant tout le béton) vérifie

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_p &= (5\text{ m}) \times (3\text{ m}) \times (0,15\text{ m})\\ &= 5 \times 3 \times 0,15\text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}\\ &= 2,25\text{ m}^3\end{aligned}$$

   Le volume de béton restant est $12\text{ m}^3 - 9,825\text{ m}^3 = 2,175\text{ m}^3$ et donc

   il est impossible d'obtenir une dalle de hauteur 15 cm.

   Il est possible de raisonner autrement en résolvant une équation ou une inéquation en cherchant la hauteur h obtenue en coulant le reste de béton.

Partie B.

1. Déterminons la formule en `C2`.

   Le taux de TVA est de 20 % donc le montant de la TVA est : $\frac{20}{100} \times$ `B2`. Reste à lui ajouter le prix HT :

   `= 20/100 * B2 + B2.`

   Nous aurions pu utiliser un coefficient multiplicateur :

   `= 1.2 * B2`

   mais l'énoncé n'y incite pas.

2. `= A2 * C2 + D2.`

3. Calculons la proportion p_l du prix de livraison par rapport au prix total.

   Pour calculer cette proportion il faut faire le rapport de la quantité de la partie et la quantité du tout.

   * Les frais de livraison sont de 58 €.

* Pour 3 m^3 le prix total est de 526 €.

Donc

$$p_l = \frac{58\text{ €}}{526\text{ €}} \approx 0,1102 \text{ en tronquant} \approx 0,11 \text{ en arrondissant au centième}$$

Pour l'exprimer en pourcentage il reste à multiplier par 100.

$$p_l = 11\ \%.$$

4. Déterminons le prix total.

* Pour obtenir 12 m^3 il faudra deux camions. Le premier sera complètement rempli (7 m^3. Le deuxième contiendra 12 m^3 − 7m^3 = 5 m^3.
* Le prix en euro pour le premier camion (celui complètement rempli) est : $7 \times 156 + 58 = 1150$.
* Le prix en euro pour le second camion (celui contenant 5 m^3) est : $5 \times 156 + 58 = 838$.
* Nous en déduisons le coût total en euro : $1150 + 858$.

Le coût total pour 12 m^3 est 1 988 €.

Partie C.

1. Calculons la proportion p_s de sable dans le mélange.

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{120\text{ kg}}{120\text{ kg} + 180\text{ kg}} \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

$$p_s = 40\ \%.$$

2. Le mot « granulosité » n'existe apparemment pas. Il faut lui substituer le mot granularité.

   Notons x la quantité de sable à ajouter.

Déterminons x.

On souhaite avoir une proportion de sable 55 % dans le mélange autrement dit, en exprimant toutes les grandeurs en kilogramme :

$$\frac{x+120}{x+120+180} = \frac{55}{100}$$
$$\frac{x+120}{x+300} = 0,55$$

Du fait du x au dénominateur cette équation n'est pas du premier degré. Mais nous pouvons nous ramener à une équation du premier degré en faisant, par exemple, un produit en croix. Je choisis de procéder autrement mais la démarche est équivalente.

$$\begin{aligned}
\frac{x+120}{x+300}\times(x+300) &= 0,55\times(x+300)\\
x+120 &= 0,55\times x + 0,55\times 300\\
x+120 &= 0,55x+165\\
x+120-0,55x &= 0,55x+165-0,55x\\
(1-0,55)x+120 &= 165\\
0,45x+120-120 &= 165-120\\
0,45x &= 45\\
\frac{0,45x}{0,45} &= \frac{45}{0,45}\\
x &= 100
\end{aligned}$$

Il faut ajouter 100 kg de sable.

Une fois la réponse trouvée (par n'importe quel moyen, en tâtonnant, à la calculatrice) on peut donner une réponse se contentant de vérifier que cela fonctionne en ajoutant 100 kg de sable.

3. Les parties semblent indépendantes et cette question est donc à lier avec la question précédente. Il est rare qu'une question dépende d'un résultat précédent qui n'est pas donné dans l'énoncé.

Déterminons le prix p_c payer pour le ciment.

* Le mélange a une masse de 120 kg + 180 kg + 100 kg = 400 kg.

* Par proportionnalité on en déduit la quantité de ciment nécessaire pour cette masse :

Ciment (en kg)	250	$\frac{250}{1000} \times 400 = 100$
Mélange (en kg)	1000	400

* Puisque $\frac{100 \text{ kg}}{35 \text{ kg}} \approx 2,8$ il faudra 3 sacs de ciments pour avoir suffisamment de ciment.
* Chaque sac coûtant 7, 75 €,

$$p_c = 3 \times 7,75 \text{ €}$$

$$\boxed{p_c = 23,25 \text{ €}.}$$

Exercice 5.

1. (a) Déterminons la transformation transformant M en M_3.

Les transformations à disposition du candidat sont : symétrie axiale, translation, rotation, homothétie, symétrie centrale (encore que cette dernière soit un cas particulier de rotation).

Deux possibilités

M_3 est l'image de M par la symétrie axiale d'axe (AB),

et

M_3 et l'image de M par la symétrie de centrale de centre le milieu de $[AB]$.

Une autre formulation de cette dernière réponse M_3 est l'image de M par la rotation de centre le milieu de $[AB]$ et d'angle 180°.

(b) Déterminons la transformation qui transforme M en M_1.

On cherche une transformation dans la liste précédente. Le segment commun $[BC]$ aux deux pentagones suggère une symétrie axiale ou un rotation. La symétrie est rapidement écartée en considérant les angles.

La transformation transformant M en M_1 est la rotation de centre C et de rayon 90° (dans le sens direct donc).

2. (a) Déterminons une mesure de $\widehat{CAB}$.

ABC est isocèle rectangle en B, or la somme des angles d'un triangle vaut 180° donc une mesure de $\widehat{CAB}$ est $(180 - 90)/2$.

$$\boxed{\widehat{CAB} = 45°.}$$

(b) Déterminons la mesure des angles du pentagone.

* Par construction

$$\boxed{\widehat{DEA} = \widehat{ABC} = 90°.}$$

* En raisonnant comme à la question précédente : $\widehat{ADE} = \widehat{EAD} = \widehat{CAB} = \widehat{BCA} = 45°$.

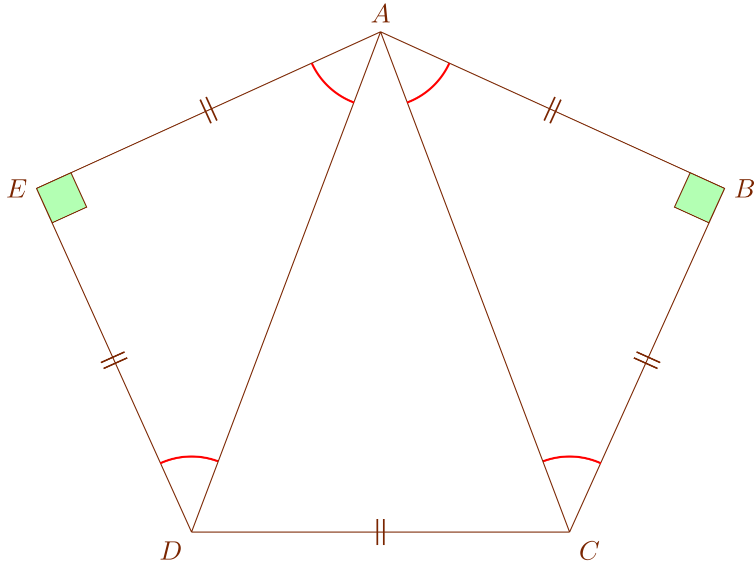


Figure 2.

D'après l'énoncé $\widehat{DAC} = 41°$ et ADC est isocèle en A (nous pouvons considérer que c'est un implicite lié à la symétrie du pentagone) donc, la somme des angles du triangle valant 180° : $\widehat{CAD} = \widehat{ACD} = (180 - 41)/2 = 69,5°$.

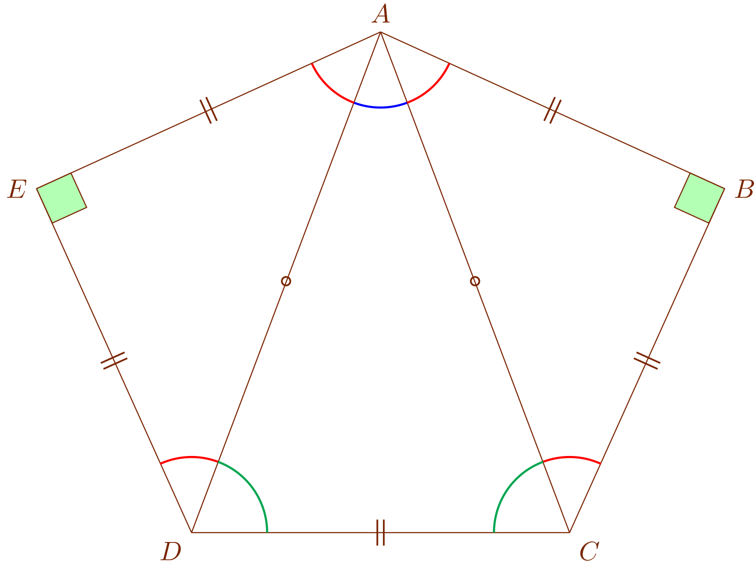


Figure 2.

* Nous déduisons de ce qui précède, et d'après la relation de Chasles : $\widehat{CDE} = \widehat{CDA} + \widehat{ADE} = 69,5^\circ + 45^\circ$ donc

$$\boxed{\widehat{CDE} = 114,5^\circ \text{ et de même } \widehat{BCD} = 114,5^\circ.}$$

* Par un procédé similaire : $\widehat{EAB} = \widehat{EAD} + \widehat{DAC} + \widehat{CAB} = 45^\circ + 41^\circ + 45^\circ$.

$$\boxed{\widehat{EAB} = 131^\circ.}$$

(c) En sommant les mesures d'angles :

$$\widehat{DEA} + \widehat{ABC} + \widehat{CDE} + \widehat{BCD} + \widehat{EAB} = 2 \times 90^\circ + 2 \times 114,5^\circ + 131^\circ$$

$$\boxed{\text{La somme des angles du pentagone est donc } 540^\circ.}$$

(d) Tout pentagone non croisé et convexe peut être découpé en trois triangles et la somme des angles des triangles égale la somme des angles du pentagone : $3 \times 180^\circ = 540^\circ$.

Je n'ai pas essayé pour un pentagone concave. Peut-être également possible.

La somme des mesures des angles d'un pentagone convexe est 540°.