Épreuve de mathématiques CRPE 2024 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

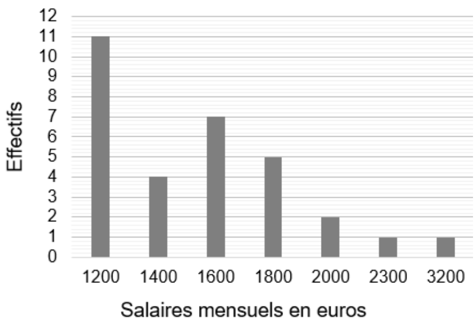
Durée : 3 heures.
Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse sans justification ne sera pas prise en considération lors de la correction.

1. La répartition des salaires mensuels des employés d'une entreprise est présentée dans le diagramme en barres ci-dessous.



Affirmation 1 : le salaire médian dans cette entreprise est de 1 800 €.

Déterminons la médiane Me de la série.

Il n'y a pas de méthode directement graphique de lecture de la médiane. Il faut extraire l'information du diagramme afin de l'exploiter.

Par lecture graphique :

Salaires	1200	1400	1600	1800	2000	2300	3200
Effectifs	11	4	7	5	2	1	1
E.C.C.	11	15	22	27	29	30	31

* La série des salaires est rangée dans l'ordre croissant.
* $\frac{N}{2} = \frac{31}{2} = 15,5$ donc (série impaire, Me est la seizième valeur de la série ordonnée.

* D'après les effectifs cumulés croissants, $Me = 1600$ €.

L'affirmation 1 est fausse.

2. Affirmation 2 : le quotient d'un nombre décimal par un nombre décimal non nul est un nombre décimal.

   $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ sont des nombres décimaux car de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a est un entier et n un entier naturel.

   Or

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} &= \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} \\ &= \frac{1 \times 10}{10 \times 3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

   donc le quotient des nombres décimaux $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ n'est pas un nombre décimal.

   L'affirmation 2 est fausse.

3. Paul mange les deux cinquièmes d'un paquet de 40 gâteaux. Il donne les trois huitièmes de ce qu'il reste à sa sœur.
   Affirmation 3 : Paul a donné 15 gâteaux à sa sœur.

   Deux démarches sont possibles : soit vérifier avec la réponse proposée soit déterminer le nombre de gâteaux donnés.

   Déterminons le nombre n_g de gâteaux donnés.

   Puisque Paul mange les deux cinquièmes d'un paquet de 40, le nombre de gâteaux mangés est

$$\frac{2}{5} \times 40 = 16$$

   Le nombre de gâteaux restant est donc de

$$40 - 16 = 24$$

Puisqu'il donne les trois huitièmes de ce qu'il reste

$$\begin{aligned} n_G &= \frac{3}{8} \times 24 \\ &= 9 \end{aligned}$$

L'affirmation est fausse.

Nous aurions pu multiplier les proportions entre-elles. Trois huitièmes de trois cinquième de 40 égale : $\frac{3}{5} \times \frac{3}{8} \times 40 = 9$

4. Soient a et b deux nombres entiers.

   On effectue la division euclidienne du nombre a par 13.
   Le reste obtenu est 9.

   On effectue la division euclidienne du nombre b par 13.
   Le reste obtenu est 4.

   Affirmation 4 : le nombre $a + b$ est divisible par 13.

   Les quatre nombres intervenant dans la division euclidienne (par exemple : $14 = 3 \times 4 + 2$) sont le dividende (14), le diviseur (3), le quotient (4) et le reste (2). L'énoncé nous parle du dividende, du diviseur et du reste ; nommons donc les quotients.
   Notons

$$\begin{aligned} a &= 13 \times q_a + 9 \quad (1) \\ b &= 13 \times q_b + 4 \quad (2) \end{aligned}$$

   où q_a et q_b sont des entiers naturels.
   En additionnant membre à membre les égalités (1) et (2) on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} a + b &= 13 \times q_a + 9 + 13 \times q_b + 4 \\ a + b &= 13 \times q_a + 13 \times q_b + 9 + 4 \\ a + b &= 13 \times (a + b) + 13 \end{aligned}$$

   Une petite astuce classique de présentation pour permettre la factorisation :

$$\begin{aligned} a + b &= 13 \times (q_a + q_b) + 13 \times 1 \\ a + b &= 13 \times (q_a + q_b) + \times 1 \\ a + b &= 13 \times (q_a + q_b + 1) \end{aligned}$$

Autrement dit la division euclidienne de $a+b$ par 13 donne un reste nul. Autrement dit $a+b$ est divisible par 13.

L'affirmation 4 est vraie.

Nous aurions pu travailler directement sur le quotient en manipulant des fractions.

$$\frac{a}{13} = q_a + \frac{9}{13} \text{et} \frac{b}{13} = q_b + \frac{4}{13}$$
$$\frac{a}{13} + \frac{b}{13} = q_a + \frac{9}{13} + q_b + \frac{4}{13}$$

Les fractions ayant les mêmes dénominateurs :

$$\frac{a+b}{13} = q_a + q_b + \frac{4+9}{13}$$
$$\frac{a+b}{13} = q_a + q_b + 1$$

Ainsi nous obtenons bien un nombre entier en divisant $a+b$ par 13.

Méthode schématique à la Singapour (mais je n'ai pas le temps de faire les schémas avec des patates pour illustrer).
a est formé d'un certain nombre de paquets de 13 et 9 unités.
b est formé d'un certain nombre de paquets de 13 et de 4 unités.
En réunissant a et b on obtient davantage de paquets de 13 et 9 + 3 unités c'est-à-dire un nouveau paquet de 12.

5. Affirmation 5 : l'image par une fonction linéaire de la somme de deux nombres est égale à la somme des images de ces deux nombres.

   Soit f une fonction linéaire. Il existe donc un nombre a tel que $f(x) = ax$ pour tout nombre x.
   Considérons n'importe quel couple de nombres que nous noterons x et y et déterminons l'image de leur somme par f.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) \\ &= a \times x + a \times y \\ &= ax + ay \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

   L'image de la somme égale la somme des images.

   L'affirmation 5 est vraie.

Exercice 2.

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Une élève joue avec deux dés cubiques (dés à 6 faces numérotées de 1 à 6) non truqués.

Elle lance deux dés. On appelle paire un tirage constitué de deux nombres identiques.

À chaque lancer de deux dés, elle marque des points :

- si elle obtient une paire de 1, elle gagne 1 000 points ;
- si elle obtient une autre paire, elle gagne 100 fois la valeur d'un dé, soit 200 points pour une paire de 2, 300 points pour une paire de 3, etc. ;
- si elle obtient un résultat autre qu'une paire (par exemple 2 sur un des dés et 5 sur l'autre), elle gagne 50 points.

Le jeu se termine lorsque l'on obtient au moins 1 000 points.

1. Quelle est la probabilité de terminer le jeu avec un seul lancer ?

   Calculons la probabilité d'obtenir 1 000 points en un lancer.

   Modélisons l'expérience probabiliste.
   Considérons que l'un des dés est bleu et l'autre rouge. Notons d'abord le nombre affiché par le dé bleu puis celui affiché par le dé rouge. Ainsi $(1; 5)$ signifie obtenir 1 avec le dé bleu et 5 avec le dé rouge.
   Pour représenter tous les couples possibles et déterminer le nombre de points associés à chacun dessinons un tableau double entrée.

bleu \ rouge	1	2	3	4	5	6
1	1000	50	50	50	50	50
2	50	200	50	50	50	50
3	50	50	300	50	50	50
4	50	50	50	400	50	50
5	50	50	50	50	500	50
6	50	50	50	50	50	600

   Nous obtenons ainsi $6 \times 6 = 36$ couples de nombres qui ont tous la même probabilité d'être obtenus puisque les dés ne sont pas truqués.
   Il n'y a qu'un seul lancer parmi les 36 lancers équiprobables qui permettent d'obtenir 1000 points donc :

   la probabilité d'obtenir 1000 point en un lancer est de $\frac{1}{36}$.

2. L'élève a réalisé deux lancers et a obtenu exactement 650 points.

   (a) Expliquer l'ensemble des résultats qu'elle a pu obtenir lors de ces deux lancers.

   Précisons l'ensemble des résultats possibles.

   L'énoncé semble distinguer les points des résultats. Les premiers désignent le système de points décrit dans l'énoncé et le second les nombres affichés par les dés. Cependant faire une énumération de tous les couples possibles semble très fastidieux et nous nous contenterons d'une description en français.

   Du fait des 50 points apparaissant dans 650 il est nécessaire que l'un des lancers n'ai pas été une paire.
   Dans ce cas l'autre lancer donnait 600 points.
   Finalement

l'un des deux lancers donne une paire de 6 et l'autre ne donne pas de paire.

   (b) Quelle est la probabilité de terminer le jeu avec un troisième lancer ?

   Notons A l'événement « obtenir une victoire au troisième lancer après avoir obtenu 650 points aux deux précédents.

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   Si x désigne le nombre de points obtenus au troisième lancer on doit avoir

$$x + 650 > 100$$

   Autrement dit :

$$\begin{aligned} x + 650 - 650 &> 1000 - 650 \\ x &> 350 \end{aligned}$$

   Ainsi A est réalisé si le troisième lancer donne strictement plus que 350.
   Autrement dit A est réalisé si le troisième lancer est un double 4 ou un double 5 ou un double 6 ou un double 1.
   Les couples de nombres sont équiprobables, il y a 36 couples possibles et 4 réalise A donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{9}.$$

Exercice 3.

On rappelle ci-dessous le fonctionnement du bloc« s'orienter à » dans le langage Scratch.

s'orienter à (90)	s'orienter à (-90)	s'orienter à (0)	s'orienter à (180)
Ce bloc permet d'orienter le lutin vers la droite.	Ce bloc permet d'orienter le lutin vers la gauche.	Ce bloc permet d'orienter le lutin vers le haut.	Ce bloc permet d'orienter le lutin vers le bas.
			

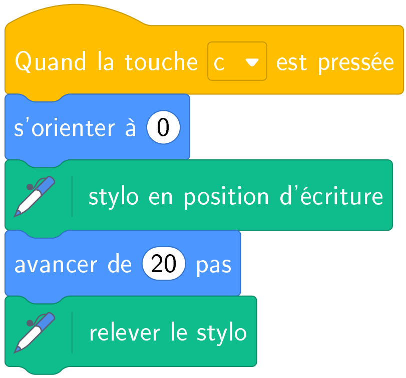
On écrit sur Scratch les trois programmes donnés ci-dessous. Ils permettent de tracer des segments en pressant une des trois touches du clavier a, b ou c.

```
Quand la touche a est pressée
s'orienter à (90)
stylo en position d'écriture
avancer de (20) pas
relever le stylo
```

Programme de la touche a.

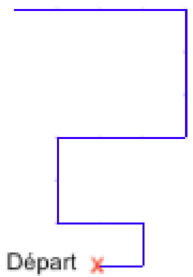
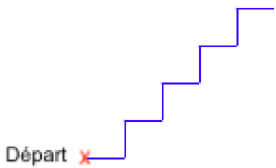
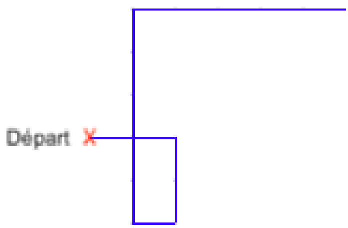
```
Quand la touche b est pressée
s'orienter à (-90)
stylo en position d'écriture
avancer de (20) pas
relever le stylo
```

Programme de la touche b.



Programme de la touche c.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, une seule ne pourra pas être réalisée par un enchaînement des touches a, b, c. Laquelle ? Expliquer.

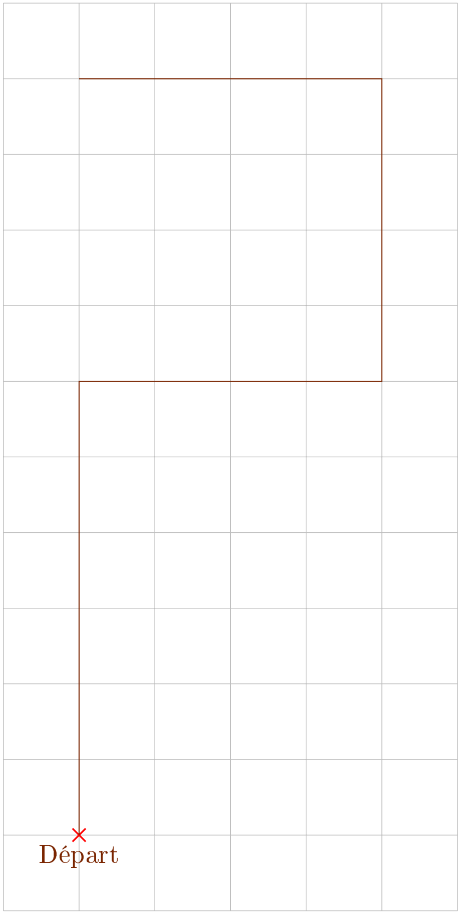
Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
		

Le programme de la touche a déplace le lutin en ligne droite vers la droite.
Le programme de la touche b déplace le lutin en ligne droite vers la gauche.
Le programme de la touche c déplace le lutin en ligne droite vers le haut.
Le lutin ne peut donc se déplacer vers le bas.

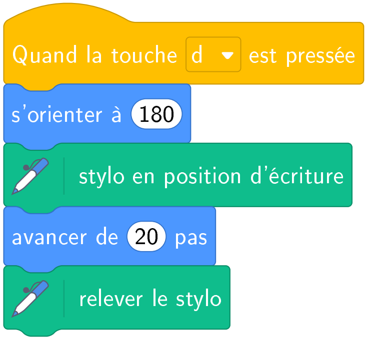
La proposition 3 ne pourra pas être réalisée en appuyant sur les touches a, b ou c.

2. En prenant 1 cm pour 10 pas, tracer la figure obtenue après avoir réalisé l'enchaînement de touches suivant : c c c a a c c b b.

Chaque pesée sur une touche trace un segment de 20 pas = 2 cm.



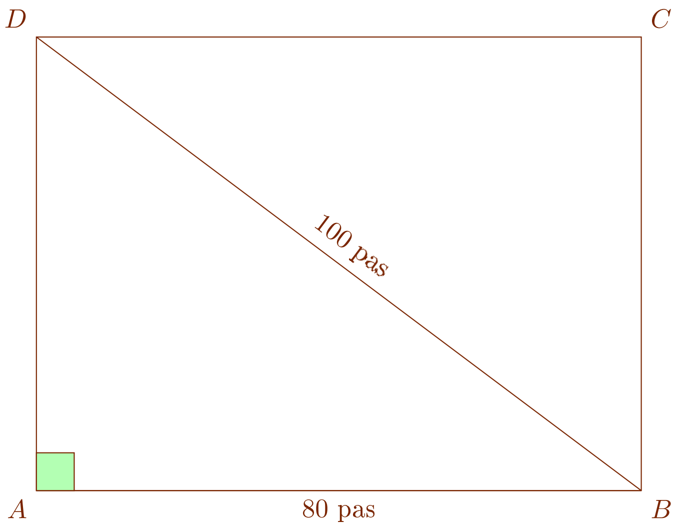
3. On a ajouté un quatrième programme ci-dessous, appelé *Programme d*, associé à la touche d.



Donner un enchaînement de touches permettant d'obtenir un rectangle de longueur 80 pas et dont les diagonales mesurent 100 pas. Expliquer les étapes du raisonnement suivi.

Calculons la longueur de la largeur du rectangle.

Schématiquement nous avons la situation suivante :



Le triangle ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BA^2 + AC^2 = BC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$BA^2 + AC^2 - AC^2 = BC^2 - AC^2$$

En exprimant les longueurs en pas :

$$BA^2 = 100^2 - 80^2$$
$$BA^2 = 3600$$

BA étant une longueur et donc un nombre positif, nécessairement

$$BA = \sqrt{3600}$$
$$BA = 60$$

Nous pouvons maintenant indiquer les touches qui traceront, dans ce sens, $ABCD$:

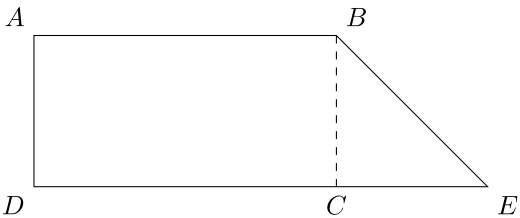
a a a a c c c b b b b d d d

Exercice 4.

Partie A.

Lors de la construction de sa maison, Claire décide de construire une dalle pour sa terrasse.

Cette dalle a la forme d'un prisme droit de hauteur 15 cm dont la vue de dessus est donnée par le schéma ci-dessous.



$ABCD$ est un rectangle de longueur $DC = 10$ m et de largeur $AD = 5$ m.
Les points D, C et E sont alignés.

1. Le volume de la dalle est égale à $9,825$ m^3.

   (a) Justifier que l'aire du polygone $ABED$ est $65,5$ m^2.

   Déterminons l'aire $\mathscr{A}(ABED)$ du polygone $ABED$.

Puisque la dalle est un prisme droit dont $ABED$ est une bas son volume est le produit de $\mathscr{A}(ABED)$ par la hauteur 15 cm = 0,15 m et donc

$$9,825\ \text{m}^3 = \mathscr{A}(ABED) \times 0,15\ \text{m}$$

Une équation du premier degré dont l'inconnue est l'aire :

$$\frac{9,825\ \text{m}^3}{0,15\ \text{m}} = \frac{\mathscr{A}(ABED) \times 0,15\ \text{m}}{0,15\ \text{m}}$$
$$\frac{9,825}{0,15}\ \frac{\text{m}^3}{\text{m}} = \mathscr{A}(ABED)$$

Nous obtenons bien

$$\boxed{65,5\ \text{m}^2 = \mathscr{A}(ABED).}$$

(b) En déduire la longueur du segment $[CE]$.

Déterminons CE.

Une situation de plus en plus rare dans tous les concours et examens, il faut ici connaître des formules géométriques.

Le polygone est formé d'un rectangle $ABCD$ dont l'aire est $(10\ \text{m}) \times (5\ \text{m}) = 10 \times 5\ \text{m} \cdot \text{m} = 50\ \text{m}^2$ et d'un triangle rectangle en C dont l'aire est $\frac{1}{2} \times CE \times BC = \frac{1}{2} \times CE \times (5\ \text{m} = CE \times (2,5\ \text{m})$ donc

$$65,5\ \text{m}^2 = 50\ \text{m}^2 + CE \times (2,5\ \text{m})$$
$$65,5\ \text{m}^2 - 50\ \text{m}^2 = 50\ \text{m}^2 + CE \times (2,5\ \text{m}) - 50\ \text{m}^2$$
$$15,5\ \text{m}^2 = CE \times (2,5\ \text{m})$$
$$\frac{15,5\ \text{m}^2}{2,5\ \text{m}} = \frac{CE \times (2,5\ \text{m})}{2,5\ \text{m}}$$
$$\frac{15,5}{2,5}\ \frac{\text{m}^2}{\text{m}} = CE$$

$$\boxed{CE = 6,2\ \text{m}.}$$

2. Claire se fait livrer 12 m^3 de béton. Elle coule la dalle de sa terrasse et décide d'utiliser le béton restant pour couler la dalle de sa cabane de jardin. Cette dalle a la forme d'un pavé droit de longueur 5 m et de largeur 3 m.

Peut-elle obtenir une dalle dont la hauteur est 15 cm ?

Calculons le volume $\mathscr{V}_p$ de la dalle haute de 15 cm.

Puisque la dalle a la forme d'un pavé droit de longueur 5 m, de largeur 3 m et de hauteur 15 cm = 0, 15 m, son volume (en coulant tout le béton) vérifie

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_p &= (5\text{ m}) \times (3\text{ m}) \times (0,15\text{ m})\\ &= 5 \times 3 \times 0,15\text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}\\ &= 2,25\text{ m}^3\end{aligned}$$

Le volume de béton restant est $12\text{ m}^3 - 9,825\text{ m}^3 = 2,175\text{ m}^3$ et donc

$$\boxed{\text{il est impossible d'obtenir une dalle de hauteur 15 cm.}}$$

Il est possible de raisonner autrement en résolvant une équation ou une inéquation en cherchant la hauteur h obtenue en coulant le reste de béton.

Partie B.

L'entreprise TOUBETON vend le mètre cube de béton au prix de 130 € HT (Hors Taxe). Elle facture 58 € les frais de livraison par camion-toupie. Un camion-toupie a une contenance maximale de 7 m^3.

Afin d'établir les factures, l'entreprise utilise la feuille de calcul d'un tableur ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	Quantité en mètres cubes	Prix du mètre cube (HT) en euros	Prix du mètre cube (TTC) en euros	Livraison en euros	Prix total en euros
2	1	130	156	58	**214**
3	2	130	156	58	**370**
4	3	130	156	58	**526**
5	4	130	156	58	**682**

1. Le taux de la TVA sur le béton est de 20 %. Déterminer une formule à saisir en `C2` pour obtenir le prix TTC qui s'actualise automatiquement en cas de changement du prix HT.
   On rappelle que le prix TTC s'obtient en ajoutant le montant de la TVA au prix HT.

Déterminons la formule en C2.

Le taux de TVA est de 20 % donc le montant de la TVA est : $\frac{20}{100} \times \texttt{B2}$. Reste à lui ajouter le prix HT :

$$= 20/100 * \texttt{B2} + \texttt{B2}.$$

Nous aurions pu utiliser un coefficient multiplicateur :

$$= 1.2 * \texttt{B2}$$

mais l'énoncé n'y incite pas.

2. Déterminer une formule saisie dans la cellule E2 puis recopiée vers le bas pour obtenir le tableau complété par le prix total.

$$= \texttt{A2} * \texttt{C2} + \texttt{D2}.$$

3. Pour une livraison de 3 m^3 de béton, que représentent, en pourcentage, les frais de livraison par rapport au prix total ? Donner l'arrondi à l'unité.

Calculons la proportion p_l du prix de livraison par rapport au prix total.

Pour calculer cette proportion il faut faire le rapport de la quantité de la partie et la quantité du tout.

* Les frais de livraison sont de 58 €.
* Pour 3 m^3 le prix total est de 526 €.

Donc

$$p_l = \frac{58\text{ €}}{526\text{ €}} \approx 0,1102 \text{ en tronquant} \approx 0,11 \text{ en arrondissant au centième}$$

Pour l'exprimer en pourcentage il reste à multiplier par 100.

$$p_l = 11\ \%.$$

4. On rappelle que la contenance maximale du camion-toupie transportant le béton est de 7 m^3. Quel sera le prix total payé par Claire pour se faire livrer les 12 m^3 de béton ?

Déterminons le prix total.

* Pour obtenir 12 m^3 il faudra deux camions. Le premier sera complètement rempli (7 m^3. Le deuxième contiendra 12 m^3 − 7m^3 = 5 m^3.
* Le prix en euro pour le premier camion (celui complètement rempli) est : $7 \times 156 + 58 = 1150$.
* Le prix en euro pour le second camion (celui contenant 5 m^3) est : $5 \times 156 + 58 = 838$.
* Nous en déduisons le coût total en euro : $1150 + 858$.

Le coût total pour 12 m^3 est 1 988 €.

Partie C.

Dans cette partie, les pourcentages seront arrondis à l'unité si nécessaire.

1. Pour terminer ses travaux de maçonnerie, Claire achète un mélange composé de 120 kg de sable et de 180 kg de gravier. Quelle est la proportion de sable dans ce mélange ?
   Exprimer le résultat en pourcentage.

   Calculons la proportion p_s de sable dans le mélange.

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{120 \text{ kg}}{120 \text{ kg} + 180 \text{ kg}} \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

$p_s = 40$ %.

2. La granulosité souhaitée par Claire impose 55 % de sable dans le mélange. Quelle quantité de sable doit-elle ajouter ?

   Le mot « granulosité » n'existe apparemment pas. Il faut lui substituer le mot granularité.

   Notons x la quantité de sable à ajouter.

   Déterminons x.

On souhaite avoir une proportion de sable 55 % dans le mélange autrement dit, en exprimant toutes les grandeurs en kilogramme :

$$\frac{x+120}{x+120+180} = \frac{55}{100}$$
$$\frac{x+120}{x+300} = 0,55$$

Du fait du x au dénominateur cette équation n'est pas du premier degré. Mais nous pouvons nous ramener à une équation du premier degré en faisant, par exemple, un produit en croix. Je choisis de procéder autrement mais la démarche est équivalente.

$$\begin{aligned}
\frac{x+120}{x+300}\times(x+300) &= 0,55\times(x+300)\\
x+120 &= 0,55\times x + 0,55\times 300\\
x+120 &= 0,55x+165\\
x+120-0,55x &= 0,55x+165-0,55x\\
(1-0,55)x+120 &= 165\\
0,45x+120-120 &= 165-120\\
0,45x &= 45\\
\frac{0,45x}{0,45} &= \frac{45}{0,45}\\
x &= 100
\end{aligned}$$

Il faut ajouter 100 kg de sable.

Une fois la réponse trouvée (par n'importe quel moyen, en tâtonnant, à la calculatrice) on peut donner une réponse se contentant de vérifier que cela fonctionne en ajoutant 100 kg de sable.

3. Pour obtenir un béton de qualité, il est conseillé d'ajouter 250 kg de ciment par tonne de mélange (sable et gravier).
Le ciment est vendu par sacs de 35 kg, au prix de 7,75 € le sac.
Quel sera le prix payé par Claire pour son ciment ?

Les parties semblent indépendantes et cette question est donc à lier avec la question précédente. Il est rare qu'une question dépende d'un résultat précédent qui n'est pas donné dans l'énoncé.

Déterminons le prix p_c payer pour le ciment.

* Le mélange a une masse de 120 kg + 180 kg + 100 kg = 400 kg.
* Par proportionnalité on en déduit la quantité de ciment nécessaire pour cette masse :

Ciment (en kg)	250	$\frac{250}{1000} \times 400 = 100$
Mélange (en kg)	1000	400

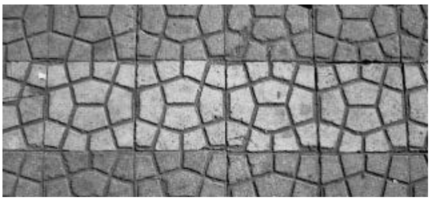
* Puisque $\frac{100 \text{ kg}}{35 \text{ kg}} \approx 2,8$ il faudra 3 sacs de ciments pour avoir suffisamment de ciment.
* Chaque sac coûtant 7,75 €,

$$p_c = 3 \times 7,75 \text{ €}$$

$$\boxed{p_c = 23,25 \text{ €}.}$$

Exercice 5.

Dans le cadre d'un travail en géométrie dans une classe de CM2, une enseignante présente le pavage ci-dessous que l'on trouve dans quelques rues de la ville du Caire.



1. **Étude du pavage.**

   L'hexagone de la *figure 1* représente le motif de base du pavage. Il est construit à partir du pentagone $ABCDE$ noté M.

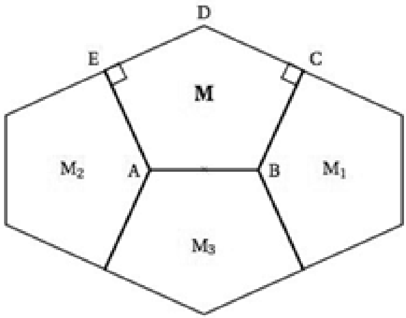


Figure 1

Les pentagones notés M, M_1, M_2 et M_3 sont superposables.

(a) Par quelle transformation peut-on obtenir le motif M_3 à partir du motif élémentaire M ? En préciser les caractéristiques.

Déterminons la transformation transformant M en M_3.

Les transformations à disposition du candidat sont : symétrie axiale, translation, rotation, homothétie, symétrie centrale (encore que cette dernière soit un cas particulier de rotation).

Deux possibilités

M_3 est l'image de M par la symétrie axiale d'axe (AB),

et

M_3 et l'image de M par la symétrie de centrale de centre le milieu de $[AB]$.

Une autre formulation de cette dernière réponse M_3 est l'image de M par la rotation de centre le milieu de $[AB]$ et d'angle 180°.

(b) Par quelle transformation peut-on obtenir le motif M_1 à partir du motif élémentaire M ? En préciser les caractéristiques.

Déterminons la transformation qui transforme M en M_1.

On cherche une transformation dans la liste précédente. Le segment commun $[BC]$ aux deux pentagones suggère une symétrie axiale ou un rotation. La symétrie est rapidement écartée en considérant les angles.

La transformation transformant M en M_1 est la rotation de centre C et de rayon 90° (dans le sens direct donc).

2. **Calcul des angles du pentagone.**

Les cinq côtés du pentagone $ABCDE$ (*figure 2*) ont la même longueur. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AED}$ sont droits.
On donne $AB = 5$ cm.

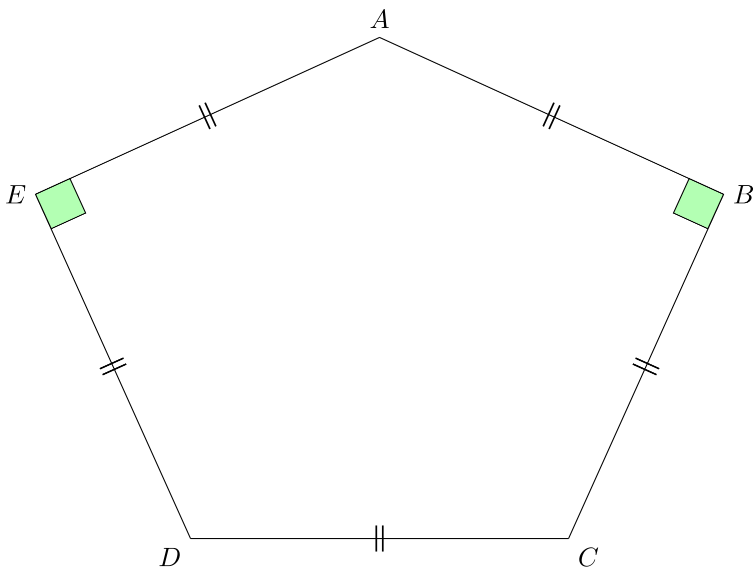


Figure 2.

(a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.

Déterminons une mesure de $\widehat{CAB}$.

ABC est isocèle rectangle en B, or la somme des angles d'un triangle vaut 180° donc une mesure de $\widehat{CAB}$ est $(180 - 90)/2$.

$$\widehat{CAB} = 45°.$$

(b) On admet que $\widehat{CAD} = 41°$. Déterminer la mesure des cinq angles du pentagone $ABCDE$.

Déterminons la mesure des angles du pentagone.

* Par construction

$$\widehat{DEA} = \widehat{ABC} = 90°.$$

* En raisonnant comme à la question précédente : $\widehat{ADE} = \widehat{EAD} = \widehat{CAB} = \widehat{BCA} = 45°$.

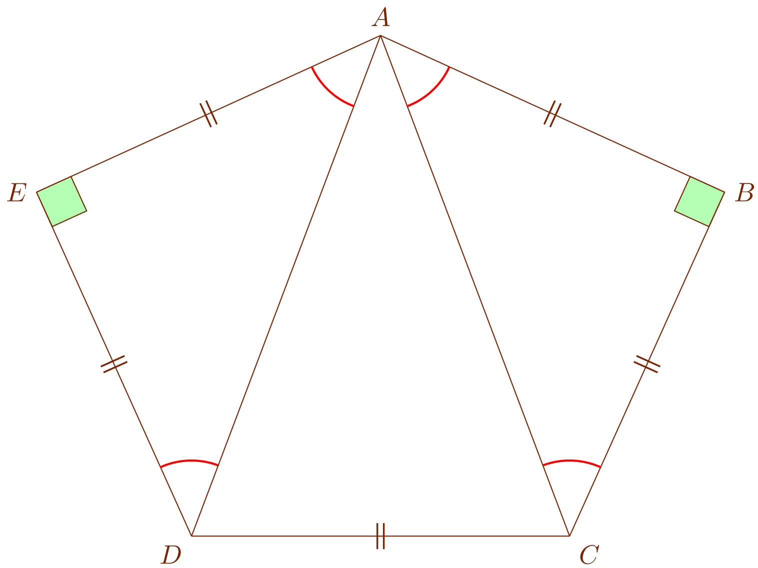


Figure 2.

D'après l'énoncé $\widehat{DAC} = 41°$ et ADC est isocèle en A (nous pouvons considérer que c'est un implicite lié à la symétrie du pentagone) donc, la somme des angles du triangle valant 180° : $\widehat{CAD} = \widehat{ACD} = (180 - 41)/2 = 69,5°$.

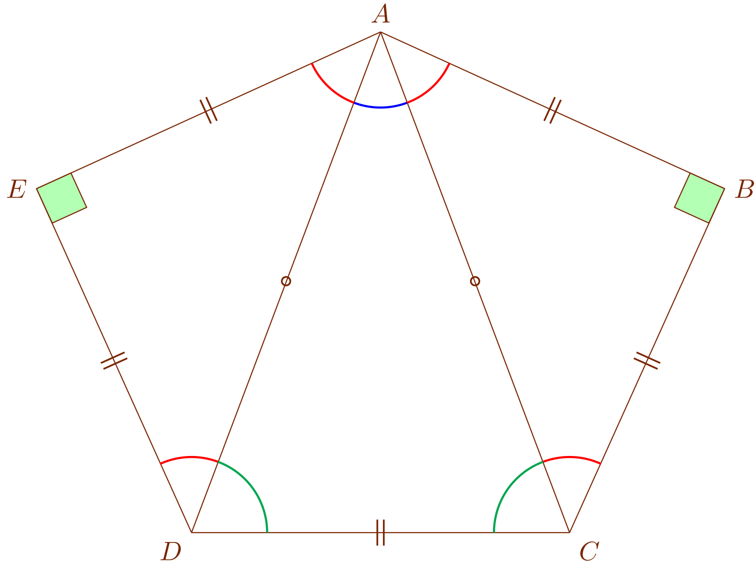


Figure 2.

* Nous déduisons de ce qui précède, et d'après la relation de Chasles : $\widehat{CDE} = \widehat{CDA} + \widehat{ADE} = 69,5^\circ + 45^\circ$ donc

$$\boxed{\widehat{CDE} = 114,5^\circ \text{ et de même } \widehat{BCD} = 114,5^\circ.}$$

* Par un procédé similaire : $\widehat{EAB} = \widehat{EAD} + \widehat{DAC} + \widehat{CAB} = 45^\circ + 41^\circ + 45^\circ$.

$$\boxed{\widehat{EAB} = 131^\circ.}$$

(c) Quelle est la somme des angles du pentagone $ABCDE$?

En sommant les mesures d'angles :

$$\widehat{DEA} + \widehat{ABC} + \widehat{CDE} + \widehat{BCD} + \widehat{EAB} = 2 \times 90^\circ + 2 \times 114,5^\circ + 131^\circ$$

$$\boxed{\text{La somme des angles du pentagone est donc } 540^\circ.}$$

(d) Démontrer que la somme des angles d'un pentagone simple est égale à 540°.

On appelle pentagone simple un pentagone qui n'est pas un polygone croisé.

Tout pentagone non croisé et convexe peut être découpé en trois triangles et la somme des angles des triangles égale la somme des angles du pentagone : $3 \times 180° = 540°$.

Je n'ai pas essayé pour un pentagone concave. Peut-être également possible.

La somme des mesures des angles d'un pentagone convexe est 540°.