Épreuve de mathématiques CRPE 2024 groupe 3.

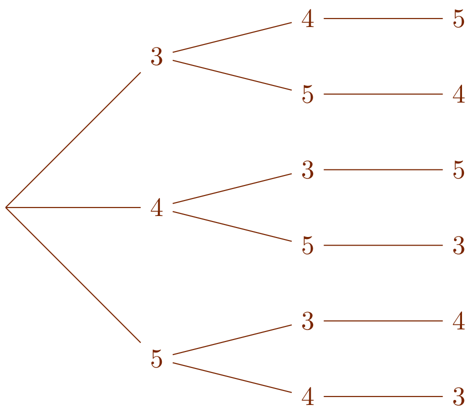
Lien vers le sujet seul : pdf.

Exercice 1.

Partie A.

1. (a) Déterminons l'univers de cette expérience aléatoire.

De façon à être exhaustif schématisons avec un arbre probabiliste.



Les résultats possibles forment l'univers
$\Omega = \{345; 354; 435; 453; 534; 543\}$.

(b) Notons P l'événement « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(P)$.

$P = \{354; 534\}$.
La situation (sac opaque et cartes indiscernables) peut être modélisée en utilisant une équiprobabilité. Or P est réalisé par 2 issues et l'univers en contient 6 donc

$$\mathbb{P}(P) = \frac{2}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(P) = \tfrac{1}{3}.}$$

(c) Notons N l'événement « ne pas obtenir un multiple de 5 ».

Calculons $\mathbb{P}(N)$.

$N = \{354; 453; 534; 543\}$.
Il y a équiprobabilité, N est réalisé par 4 issues et l'univers en contient 6 donc

$$\mathbb{P}(N) = \frac{4}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(N) = \tfrac{2}{3}.}$$

La formulation de l'événement peut inciter à considérer l'événement contraire $\overline{N}$ mais le bénéfice n'est pas évident.

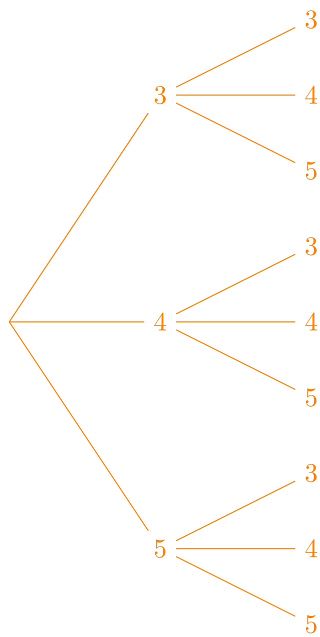
(d) Notons D l'événement « obtenir un nombre divisible par 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(D)$.

Un nombre est divisible par trois si la somme de ses chiffres est un nombre divisible par trois. Or $3 + 4 + 5 = 12$ est divisible par trois donc $D = \Omega$ (événement certain) et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = 1.}$$

2. (a) Modélisons l'expérience en commençant par schématiser avec un arbre probabiliste.



Ainsi $\Omega' = \{33; 34; 35; 43; 44; 45; 52; 54; 55\}$ et enfin il est raisonnable de considérer que toutes les issues sont équiprobables.

Notons I l'événement « obtenir un nombre dont les deux chiffres sont identiques ».

Calculons $\mathbb{P}(I)$.

$I = \{33; 44; 55\}$.
L'univers Ω' est muni d'une équiprobabilité, Ω' contient 9 issues et I est réalisé par 3 issues donc

$$\mathbb{P}(I) = \frac{3}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(I) = \frac{1}{3}.}$$

(b) Notons M l'événement « obtenir un multiple de 9 ».

Calculons $\mathbb{P}(M)$.

$M = \{45; 54\}$.
L'univers Ω' est muni d'une équiprobabilité, Ω' contient 9 issues et M est réalisé par 2 issues donc

$$\boxed{\mathbb{P}(M) = \frac{2}{9}.}$$

(c) Notons A l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égale à 40 ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{33; 34; 35\}$.
L'univers Ω' est muni d'une équiprobabilité, Ω' contient 9 issues et A est réalisé par 3 issues donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}.}$$

Partie B.

1. Calculons la probabilité de J : « obtenir une boule jaune ».

Dans des situations d'équiprobabilité proportion et probabilité se confondent. Il faut donc déterminer la proportion des boules.

En notant p_J et p_R les proportions respectivement de boules jaunes et rouges on a

$$\begin{aligned} p_J &= \frac{1}{2}p_R \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(J) = \frac{1}{8}.}$$

2. Calculons la probabilité de l'événement B : « obtenir une boule bleue ».

Notons p_B la proportion de boules bleues dans l'urne. On a : $\mathbb{P}(B) = p_B$ du fait de l'équiprobabilité.
Or nous savons que la somme des proportions des différentes couleurs fait 1 on a donc successivement

$$\begin{aligned} p_J + p_R + p_B &= 1 \\ p_J + 2p_J + p_B &= 1 \\ \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + p_B &= 1 \\ \frac{3}{8} + p_B &= 1 \\ \frac{3}{8} + p_B - \frac{3}{8} &= 1 - \frac{3}{8} \\ p_B &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(B) = \frac{5}{8}$.

3. Déterminons le nombre de boules de chaque couleur.

Complétons le tableau suivant par proportionnalité.

Couleur	Jaune	Rouge	Bleu
Proportion	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$
Nombre	7	$2 \times 7 = 14$	$5 \times 7 = 35$

Le sac contient 7 boules jaunes, 14 rouges et 35 bleues.

Exercice 2.

1. Déterminons f.

Par proportionnalité,

Si x désigne le nombre de vidéos téléchargées alors $f(x) = 0,70x$.

2. (a) Déterminons le montant fixe a par téléchargement.

On a :

$$142 \times a + 13 = 98,20$$

Équation du premier degré qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 142 \times a + 13 - 13 &= 98,20 - 13 \\ 142a &= 85,20 \\ \frac{142a}{142} &= \frac{85,20}{142} \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Chaque téléchargement coûte 0,60 € avec l'offre G.

(b) Calculons $g(4)$.

$$g(4) = \frac{3}{5} \times 4 + 13$$

$g(4) = 15,4.$

(c) $g(10)$ est le coût du téléchargement de 10 vidéos avec l'offre G.

(d) Déterminons le nombre n_G de vidéos téléchargées.

D'après l'énoncé :

$$g(n_G) = 95,20$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}n_G + 13 &= 95,20\\ \frac{3}{5}n_G + 13-13 &= 95,20-13\\ \frac{3}{5}n_G &= 82,20\\ \frac{5}{3}\times\frac{3}{5}n_G &= \frac{5}{3}\times 82,20\end{aligned}$$

$$\boxed{n_G = 137.}$$

3. Dire que l'offre G est plus intéressante que l'offre F c'est dire que $g(n) < f(n)$.

   Résolvons l'inéquation $g(n) < f(n)$.

$$g(n) < f(n)$$

équivaut à

$$\frac{3}{5}x + 13 < 0,7n$$

Nous reconnaissons une inéquation du premier degré sa résolution consiste donc à isoler l'inconnue n

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}n + 13-0,7n &< 0,7n-0,7n\\ \left(\frac{3}{5} - 0,7\right)n + 13 &< 0\end{aligned}$$

Les calculatrices gèrent très bien les fractions :

$$\begin{aligned}-0,1n + 13 &< 0\\ -0,1n + 13-13 &< 0-13\\ -0,1n &< -13\end{aligned}$$

Puisque $-0,1$ est strictement négatif :

$$\begin{aligned}\frac{-0,1n}{-0,1} &> \frac{-13}{-0,1}\\ n &> 130\end{aligned}$$

L'offre G devient plus intéressant que l'offre F à partir de la cent-trente-et-unième vidéo.

4. (a) $= \texttt{A2} * 0,7$

   (b) Dire qu'il y a une baisse de 20 % c'est dire que le tarif est multiplié par le coefficient multiplicateur

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

   On en déduit :

   $= (3/5 * \texttt{B2} + 13) * 0,8$

Exercice 3.

1. Donnons un contre-exemple. $\frac{1}{3}$ est une fraction mais pas un nombre décimal.

   L'affirmation est fausse.

2. Soit a un nombre entier relatif. $a = \frac{a}{10^0}$ donc peut s'écrire comme le quotient d'un entier et d'une puissance de 10 donc c'est un décimal.

   L'affirmation est vraie.

3. Soit n un nombre entier impair. Puisque n est impair, il existe un nombre entier k tel que $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned}
n^2 &= (2k+1)^2 \\
&= (2k+1)(2k+1) \\
&= 2k \times 2k + 2k \times 1 + 1 \times 2k + 1 \times 1 \\
&= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\
&= 4k^2 + 4k + 1 \\
&= 2 \times 2k^2 + 2 \times 2k + 1 \\
&= 2 \times (2k^2 + 2k) + 1
\end{aligned}$$

$2k^2 + 2k$ étant un entier, $2(2k^2 + 2k) + 1$ est de la forme $2m + 1$ avec m un nombre entier, autrement dit n^2 est un nombre impair.

L'affirmation est vraie.

4. Donnons un contre exemple : -1 et 2. $-1 \times 2 = -2$ et $-2 < -1$ (et $-2 < 2$).

L'affirmation est fausse.

5. Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 15 % est

$$\begin{aligned}
CM_2 &= 1 + \frac{t}{100} \\
&= 1 + \frac{15}{100} \\
&= 1,15
\end{aligned}$$

celui correspondant ç une baisse de 15 % est

$$CM_3 = 0,85$$

Considérant un article coûtant 100 euros. Après l'augmentation son prix est de $1,15 \times 100$ € = 115 € puis après la baisse il devient $0,85 \times 115$ € = 97,75 €. Nous ne retrouvons pas les 100 €.

L'affirmation est fausse.

Exercice 4.

Le programme en Scratch peut être téléchargé via ce lien.

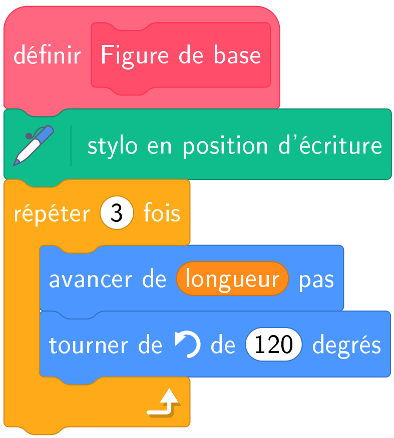
1. Déterminons la nature de la figure.

   La figure est une ligne polygonale formée de 4 segments contigus de même longueur. Comme de plus on effectue 4 rotation de 90° la ligne est fermée. Nous avons un quadrilatère qui est un losange (4 ôtés de même longueur) et qui possède au moins un angle droit, autrement dit

   la figure obtenue est un carré.

2. Voici la figure obtenue avec le programme tout entier :

3. (a) Voici comment modifier le bloc « Figure de base » :



   (b) Déterminons le rapport des aires des triangles.

   Si les dimensions d'une figure sont multipliées par 2 alors la surface est multipliée par 2^2.

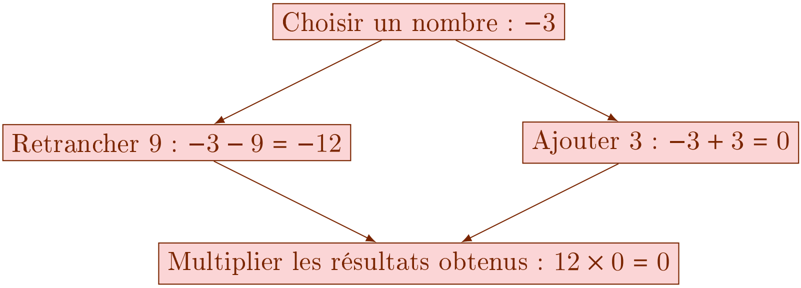
   Le rapport des aires des deux triangles obtenus est de 4.

Exercice 5.

1. Déterminons les résultats programmes en choisissant -3 en entrée.

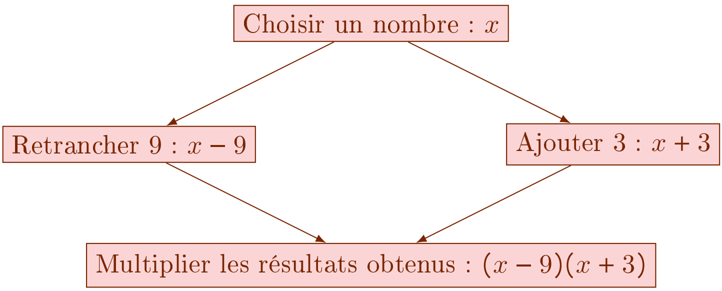
Choisir un nombre.	-3
L'élever au carré.	$(-3)^2 = 9$
Soustraire le quadruple du nombre choisi.	$9-4\times(-3) = 21$

et



donc

si on choisi -3 en entrée, alors le programme A renvoie 21 et le programme B renvoie 0.



2.

Or, en procédant à une double distributivité,

$$(x-9)(x+3) = x\times x + x\times 3 + (-9)\times x + (-9)\times 3$$

En simplifiant l'écriture :

$$(x-9)(x+3) = x^2 + 3x - 9x - 27$$

En réduisant :

$$(x-9)(x+3) = x^2 - 6x - 27$$

En appliquant le programme B à x on obtient le nombre $x^2 - 6x - 27$.

3. Déterminons l'ensemble des nombres donnant le même résultat.

   Si x est le nombre choisi en entrée alors le programme A renvoie $x^2 - 4x$ et le programme B $x^2 - 6x - 27$.
   Nous cherchons donc les nombres x tels que

$$x^2 - 4x = x^2 - 6x - 27$$

   Nous avons une équation qui n'est pas du premier degré du fait des x^2. Cependant nous pouvons nous ramener à une équation du premier degré :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - x^2 &= x^2 - 6x - 27 - x^2 \\ -4x &= -6x - 27 \end{aligned}$$

   Ici nous reconnaissons une équation du premier degré, il reste donc à « isoler les x »

$$\begin{aligned} -4x + 6x &= -6x - 27 + 6x \\ 2x &= -27 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{-27}{2} \\ x &= -\frac{27}{2} \end{aligned}$$

La seule valeur initiale pour laquelle les deux programmes donnent le même résultat est $-\frac{27}{2}$.

Exercice 6.

1. Calculons le Volume $\mathscr{V}_1$ du cône.

   En utilisant la formule donnée dans l'énoncé, et puisque la base du cône est un disque :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= \frac{1}{3} \times \left(\pi O'B^2\right) \times O'S \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\pi \times (3 \text{ cm})^2\right) \times (4 \text{ cm}) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(3^2 \text{ cm}^2\right) \times (4 \text{ cm}) \\ &= \frac{1}{3} \times 3^2 \times 4 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 = 12\pi \text{ cm}^3.}$$

2. Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ du cylindre.

   Là encore nous utilisons la formule donnée dans l'énoncé sachant que la base est un disque :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \pi OC^2 \times BC \\ &= \pi \times (3 \text{ cm})^2 \times (8 \text{ cm}) \\ &= \pi \times 3^2 \times 8 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_2 = 72\pi \text{ cm}^3.}$$

3. Calculons SA.

   Le triangle $AO'S$ est rectangle en O' donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$SA^2 = AO'^2 + O'S^2$$

   En exprimant les longueurs concernées en centimètre :

$$SA^2 = 3^2 + 4^2$$
$$SA^2 = 25$$

   Enfin, puisque SA est une longueur et donc un nombre positif,

$$SA = \sqrt{25}$$

$$SA = 5 \text{ cm}^2.$$

4. Calculons le volume $\mathscr{V}_3$ total de poudre nécessaire pour la classe.

   Chaque saupoudreur a un volume $\mathscr{V}_1 + \mathscr{V}$, or il y a 24 élèves dans la classe donc

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_3 &= 24 \times (\mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2)\\ &= 24\left(12\pi \text{ cm}^3 + 72\pi \text{ cm}^3\right)\\ &= 24 \times 84\pi \text{ cm}^3\\ &= 2016\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

   Comme $1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3 = 1\ \ell$,

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_3 &= 2016\pi \times 0,001\ \ell\\ &= 2,016\pi\ \ell\\ &\approx 6,33\ \ell \text{ en tronquant}\end{aligned}$$

$$\mathscr{V}_3 \approx 6\ \ell.$$

5. (a) Calculons la longueur L_1 de l'arc d'extrémités A et A'.

   Puisque l'arc est obtenu en faisant le patron du cône, L_1 est la circonférence du disque de base de ce cône, et donc

$$\begin{aligned}L_1 &= 2\pi \times O'B\\ &= 2\pi \times 3 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$L_1 = 6\pi \text{ cm}.$$

   L'énoncé ne spécifie rien et je fais le choix de donner une valeur exacte.

   (b)

La circonférence du disque de rayon 5 cm est $2 \times \pi \times 5 \text{ cm} = 10\pi$ cm.

Reprenons le tableau proposé :

Angle au centre en degré qui intercepte l'arc d'extrémités A et A'.	Longueur de l'arc d'extrémités A et A' en cm.
α	6π cm
360	10π cm

Nous en déduisons par proportionnalité

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{6}{10}$$
$$\alpha = 360 \times \frac{6}{10}$$

$$\boxed{\alpha = 210^\circ.}$$

6. Avec règle, équerre, compas et rapporteur, nous dessinons le patrons.
Un rectangle de dimensions 4 cm et $9,4$ cm pour le cylindre. Un cercle de rayon $1,5$ cm pour le disque formant une base du cylindre.
Un arc de cercle de rayon $2,5$ cm d'angle au centre 216°.