

Épreuve de mathématiques CRPE 2024 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

Exercice 1.

Le directeur d'une école primaire organise un tournoi sportif pour les élèves de CE2 et de CM1 des écoles de la ville. Au total, on compte 72 élèves de CE2 et 108 élèves de CM1 répartis dans quatre écoles.

Partie A.

Le directeur souhaite que les équipes soient composées selon les règles suivantes :

- le nombre d'élèves de CE2 doit être identique dans toutes les équipes.
- le nombre d'élèves de CM1 doit être identique dans toutes les équipes.

1. Le directeur envisage dans un premier temps de constituer 14 équipes avec un maximum d'élèves des deux niveaux (sans nécessairement sélectionner tous les élèves).
 - (a) Donner la composition de chaque équipe.

Composition des 14 équipes.

En procédant à des divisions euclidiennes : $72 = 5 \times 14 + 2$ et $108 = 7 \times 14 + 10$.

Dans chaque équipe il y aurait 5 élèves de CE2 et 7 de CM1.

- (b) Dans ces conditions, combien d'élèves ne participeront pas au tournoi?

Toujours d'après $72 = 5 \times 14 + 2$ et $108 = 7 \times 14 + 10$,

2 élèves de CE2 et 10 élèves de CM1, donc un total de 12 élèves, ne participeraient pas.

2. Le directeur change d'avis : il souhaite que tous les élèves puissent participer. Pour cela, il cherche à déterminer le nombre d'équipes adéquat.

- (a) Peut-il constituer 8 équipes ? Justifier.

Constitution de 8 équipes.

Dans ce cas : $108 = 13 \times 8 + 4$. 4 élèves de CM1 n'auraient pas d'équipe.

Il ne peut pas constituer 8 équipes.

- (b) Décomposer 72 et 108 en produit de facteurs premiers.

Décomposition en produit de facteur premiers.

Les calculatrices de collège le font très bien.

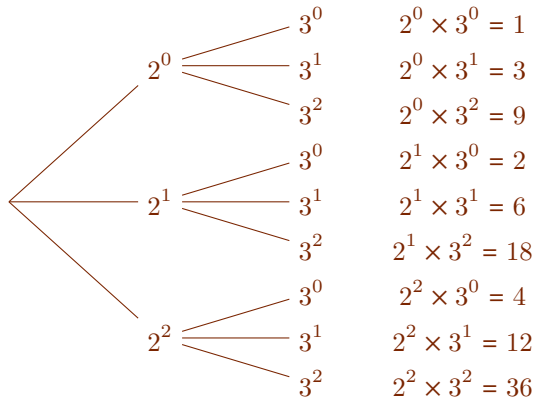
$$72 = 2^3 \times 3^2 \text{ et } 108 = 2^2 \times 3^3.$$

- (c) En déduire la liste des diviseurs communs à 72 et 108.

Déterminons les diviseurs communs de 72 et 108.

D'après la question précédente le plus grand commun diviseur de 72 et 108 est $2^2 \times 3^2$.

Représentons tous les diviseurs de $2^2 \times 3^2$ sous forme d'arbre.



L'ensemble des diviseurs communs à 72 et 108 est
 $\{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$.

- (d) Quel nombre d'équipes maximal le directeur peut-il constituer ? Préciser alors la composition de chaque équipe.

Déterminons le nombre maximal d'équipes.

D'après la question précédente

le nombre maximal d'équipe est 36.

Et dans ce cas, puisque $72 \div 36 = 2$ et $108 \div 36 = 3$,

dans chaque équipe il y a 2 élèves de CE2 et 3 élèves de CM1.

Partie B.

Le tableau ci-dessous indique la répartition des élèves de CE2 et de CM1 qui participent au tournoi selon leur école de scolarisation :

	École Aimé Césaire	École Irène Joliot-Curie	École Lucie Aubrac	École Victor Hugo
Effectif de CE2	20	22	14	16
Effectif de CM1	24	19	34	31

1. Parmi les élèves de l'école Irène Joliot-Curie qui participent au tournoi, quelle est la proportion d'élèves de CE2 ? Donner le résultat en pourcentage arrondi à l'unité.

Calculons la proportion, p_1 , de CE2 de Joliot-Curie.

$$p_1 = \frac{22}{22 + 19}$$

$$\approx 0,53658 \text{ en tronquant.}$$

$$p_1 = 54 \%$$

2. Calculer le nombre moyen d'élèves en classe de CM1 sur l'ensemble des quatre écoles.

Calculons le nombre moyen, \bar{x}_1 d'élèves en CM1.

$$\bar{x}_1 = \frac{24 + 19 + 34 + 31}{4}$$

$$\bar{x}_1 = 27.$$

3. On choisit un élève au hasard parmi tous les élèves qui participent au tournoi. Quelle est la probabilité qu'il soit en CM1 ?

Notons A : « choisir un élève de CM1 ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

L'univers est constitué des $72 + 108 = 180$ élèves. Munissons cet univers d'une équiprobabilité. Comme de plus A est réalisé par 108 issues

$$\mathbb{P}(A) = \frac{108}{180}$$

$$\mathbb{P}(A) = 0,6.$$

4. On choisit un élève au hasard parmi les élèves de CE2 qui participent au tournoi. Quelle est la probabilité qu'il soit scolarisé à l'école Aimé Césaire ? Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Notons B : « choisir un élève de Aimé Césaire ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

L'univers est constitué des 72 élèves. Munissons cet univers d'une équiprobabilité. Comme de plus B est réalisé par 20 issues

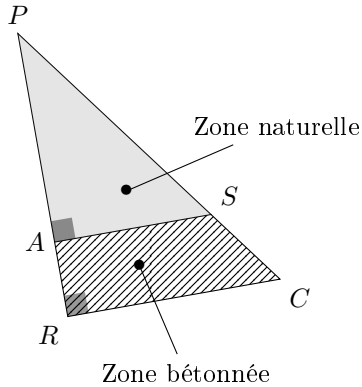
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \frac{20}{72} \\ &= \frac{2^2 \times 5}{2^3 \times 3^2} \\ &= \frac{5}{2 \times 3^2} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{5}{18}.$$

Exercice 2.

Partie A.

Sur le schéma ci-dessous le triangle PRC rectangle en R représente une cour d'école.



Les points P , A et R sont alignés.

Les points P , S et C sont alignés.

$PA = 28$ m, $AR = 10$ m, $PS = 35$ m.

Il est prévu d'aménager sur cette cour :

- une zone naturelle engazonnée représentée par le triangle PAS rectangle en A ;
- une zone bétonnée représentée par la partie $RASC$.

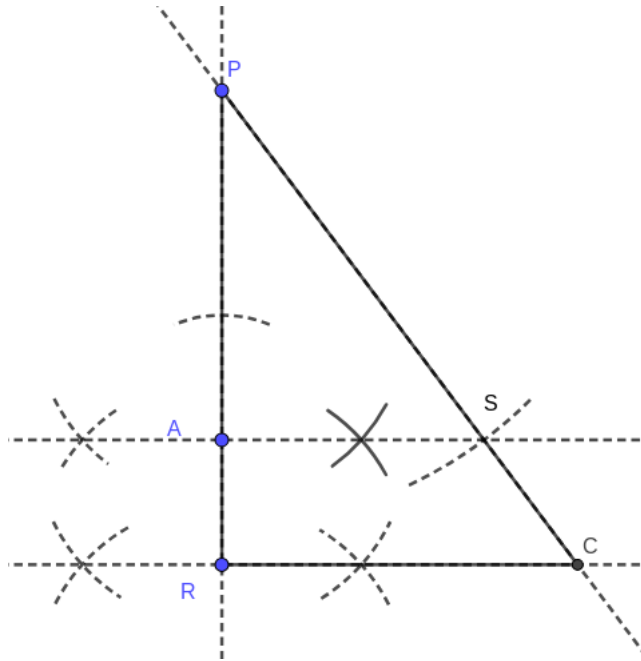
1. Tracer le plan de la cour d'école en choisissant comme échelle 1 cm pour 5 m. Justifier les dimensions utilisées et laisser les traits de construction apparents.

Dessignons la figure.

Par proportionnalité :

Taille réelle	5 m	28 m	10 m	35 m
À l'échelle	1 cm	5,6 cm	2 cm	7 cm

Une construction à la règle et au compas (sans équerre ni quadrillage) sous Géogebra (cliquez sur l'image pour télécharger le fichier) utilisant les trois précédentes longueurs :



2. Montrer que $AS = 21$ m.

Calculons AS .

Exprimons toutes les longueurs en mètre.

ASP est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$AS^2 + PA^2 = PS^2$$

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} AS^2 + PA^2 - PA^2 &= PS^2 - PA^2 \\ AS^2 &= 35^2 - 28^2 \\ &= 441 \end{aligned}$$

Or AS est positif puisque c'est une longueur donc

$$AS = \sqrt{441}$$

$$AS = 21 \text{ m.}$$

3. Calculer RC .

Calculons RC .

Là encore nous exprimons toutes les longueurs en mètre.

D'une part les points P , A et R et d'autre part les points P , S et C sont alignés dans cet ordre donc nous avons une configuration de Thalès.

De plus, puisque (AS) et (RC) sont perpendiculaires à (PR) , on a $(AS) \parallel (RC)$. Donc d'après le théorème de Thalès

$$\frac{PA}{PR} = \frac{AS}{RC}$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} PA \times RC &= PR \times AS \\ \frac{PA \times RC}{PA} &= \frac{PR \times AS}{PA} \\ RC &= \frac{(PA + AR) \times AS}{PA} \\ RC &= \frac{(28 + 10) \times 21}{28} \end{aligned}$$

$$RC = 28,5 \text{ m.}$$

4. Vérifier que l'aire du quadrilatère $RASC$ est égale à $247,5 \text{ m}^2$.

Calculons l'aire $\mathcal{A}(RASC)$ de $RASC$.

$RASC$ est un trapèze de petite base $[AS]$, de grande base $[RC]$ et de hauteur $[AR]$ donc, en exprimant toutes les longueurs en mètre,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(RASC) &= \frac{AS + RC}{2} \times AR \\ &= \frac{21 + 28,5}{2} \times 10 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(RASC) = 247,5 \text{ m.}$$

Partie B.

La commune souhaite recouvrir la zone bétonnée d'un revêtement en résine.

La résine choisie est uniquement vendue en pots.

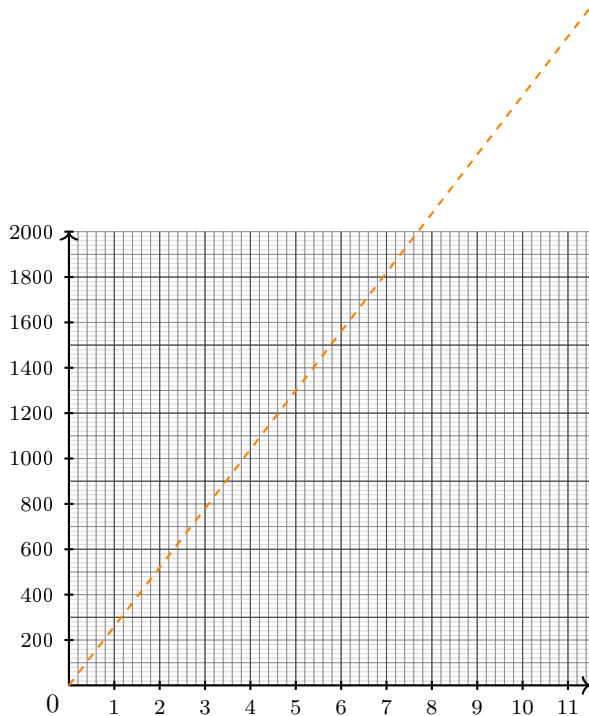
Chaque pot permet de recouvrir 56 m^2 .

La commune prévoit d'appliquer deux couches de résine.

1. Calculer le nombre de pots nécessaires pour recouvrir la zone bétonnée.
2. La commune peut choisir parmi les propositions de deux fournisseurs de résine.

Fournisseur A	Fournisseur B
Ce fournisseur facture la résine et la pose de la résine à 215,75 € le pot de résine.	Chaque pot de résine est vendu 138,50 €. Les frais de pose pour l'ensemble de la commande s'élèvent à 600 €.

- (a) Soit f la fonction qui au nombre n de pots de résine achetés auprès du fournisseur A associe le prix total à payer en euros. Donner l'expression de $f(n)$.
 - (b) Soit g la fonction qui au nombre n de pots de résine achetés auprès du fournisseur B associe le prix total à payer en euros. Donner l'expression de $g(n)$.
3. (a) En exploitant le graphique ci-dessous, déterminer le fournisseur le plus intéressant pour la commune ainsi que le coût approximatif correspondant. Expliquer votre démarche.



(b) Calculer le coût exact de ces travaux avec le fournisseur retenu.

Partie C.

En prévision d'une éventuelle extension de la zone bétonnée, un troisième fournisseur est sollicité.

Fournisseur C
Chaque pot de résine est vendu 104,65 €.
Les frais de pose pour l'ensemble de la commande s'élèvent à 995,75 €.

Pour comparer les propositions des fournisseurs B et C selon le nombre de pots utilisés, la commune exploite la feuille de calcul ci-après :

	A	B	C
	Nombre de pots de résine	Coût Fournisseur B	Coût Fournisseur C
1			
2	1	738,5	1100,4
3	2	877	1205,05
4	3	1015,5	1309,7
5	4	1154	1414,35
6	5	1292,5	1519
7	6	1431	1623,65
8	7	1569,5	1728,3
9	8	1708	1832,95
10	9	1846,5	1937,6
11	10	1985	2042,25
12	11	2123,5	2146,9
13	12	2262	2251,55
14	13	2400,5	2356,2
15	14	2539	2460,85
16	15	2677,5	2565,5
17	16	2816	2670,15

Les coûts sont exprimés en euro.

1. Quelle formule a été saisie en cellule C2 puis étirée pour compléter la colonne C ?
2. À l'aide du tableau, déterminer à partir de combien de pots le fournisseur C semble être plus intéressant que le fournisseur B.
3. Écrire et résoudre une inéquation qui permet de retrouver ce résultat.

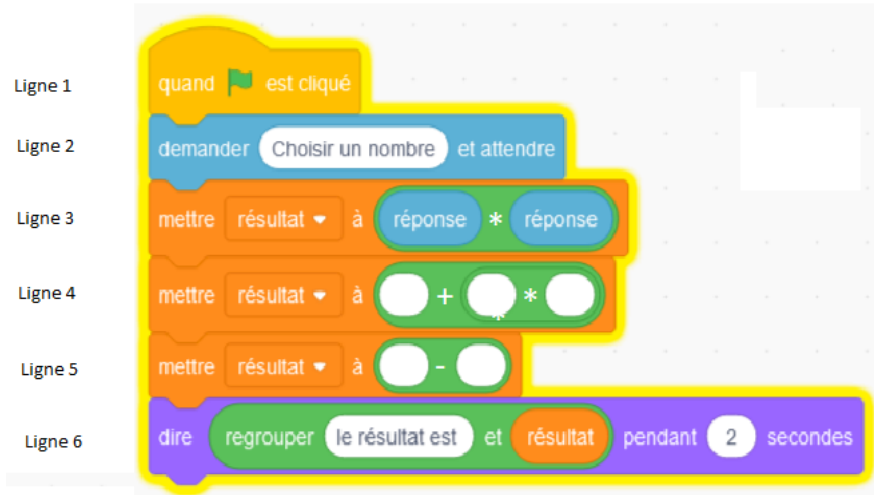
Exercice 3.

Voici un programme de calcul :

Choisir un nombre de départ.
 Prendre le carré du nombre de départ.
 Ajouter le triple du nombre de départ.
 Soustraire 4 au résultat.

1. Montrer que le résultat du programme de calcul est 36 lorsque le nombre de départ choisi est 5.

2. Quel résultat obtient-on avec ce programme de calcul en choisissant $\frac{5}{3}$ pour nombre de départ ?
3. On considère le script ci-dessous rédigé avec le logiciel Scratch.



Recopier et compléter les lignes 4 et 5 du script pour qu'il exécute le programme de calcul.

Aucune justification n'est attendue.

4. (a) On appelle x le nombre de départ. Exprimer en fonction de x le résultat final.
- (b) Vérifier que ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme $(x - 1)(x + 4)$.
- (c) Écrire et résoudre l'équation qui permet de trouver le(s) nombre(s) à choisir au départ pour obtenir zéro comme résultat.

Exercice 4.

Rappels.

Le volume d'un cylindre d'aire de base B et de hauteur h est égal à Bh .

Le volume d'une boule de rayon R est égal $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Le cuisinier d'une cantine confectionne des gâteaux pour les 210 élèves d'une école primaire.

1. Le cuisinier prépare la pâte et la place dans un saladier en forme de demi-sphère de diamètre 42 cm. Ce saladier est entièrement rempli.
 - (a) Vérifier que l'arrondi à l'unité du volume de pâte en cm^3 contenu dans le saladier est égal à $19\,396\text{cm}^3$.
 - (b) Exprimer ce volume en litre et en donner l'arrondi au dixième.
2. Le cuisinier envisage d'utiliser des moules tous identiques, de forme cylindrique de 3 cm de rayon et de 5 cm de hauteur. Le cuisinier les remplira de pâte aux trois quarts de leur hauteur.

Quel nombre maximal de moules peut-il remplir en utilisant toute la pâte ?
3. (a) Le cuisinier change d'avis et choisit d'autres moules. Ces moules ont la forme de pavé droit de dimensions 4 cm de largeur, 6 cm longueur et 5 cm de hauteur.

À quelle hauteur doit-il les remplir pour faire 210 gâteaux identiques en utilisant toute la pâte ? Donner la valeur arrondie au millimètre.

(b) Quand la pâte cuit, la hauteur du gâteau augmente de 15 %. Quelle sera la hauteur, arrondie au millimètre, de chaque gâteau après cuisson ?

Exercice 5.