Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Exercice 1.

Partie A : étude des trajets.

1. Démontrons que RDF est rectangle en F.

   D'une part

$$\begin{aligned} DF^2 + RF^2 &= 13,80^2 + 18,91^2 \\ &= 548,0281 \end{aligned}$$

   d'autre part

$$\begin{aligned} DR^2 &= 23,41^2 \\ &= 548,0281 \end{aligned}$$

   donc $DF^2 + RF^2 = DR^2$.
   Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que

$$\boxed{RDF \text{ est rectangle en } F.}$$

2. Déterminons la durée t du trajet.

$$v = \frac{d}{t}$$

   donc

$$\begin{aligned} t &= \frac{d}{v} \\ &= \frac{23,41 \text{ km}}{10 \text{ nœuds}} \\ &= \frac{23\,410 \text{ m}}{10 \times 1\,852 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &= \frac{23\,410}{10 \times 1\,852} \frac{\text{m} \cdot \text{h}}{\text{m}} \\ &= \frac{23\,410}{10 \times 1\,852} \times 60 \text{ min} \\ &\approx 75,84 \text{ min} \end{aligned}$$

Le trajet dure 76 minutes.

3. (a) Calculons la longueur L d'un tour du fort.

Le tour étant circulaire de rayon 500 m :

$$\begin{aligned} L &= 2\pi \times 500 \text{ m} \\ &\approx 3141,59 \text{ m} \end{aligned}$$

$L \approx 3\,142$ m.

(b) Calculons la distance L_A du trajet A.

$$\begin{aligned} L_A &= RF + 2L + FD \\ &= 18,91 \text{ km} + 2 \times 3142 \text{ m} + 13,8 \text{ km} \\ &= 18,91 \text{ km} + 2 \times 3,142 \text{ km} + 13,8 \text{ km} \\ &= 38,994 \text{ km} \end{aligned}$$

$L_A \approx 39$ km.

4. Calculons la vitesse moyenne v_A sur le trajet A.

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{L_A}{2 \text{ h}} \\ &= \frac{29 \text{ km}}{2 \text{ h}} \\ &= \frac{29}{2} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 19,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\ &= 19,5 \times \frac{1}{1,852} \text{ nœud} \\ &\approx 10,529 \text{ nœud} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_A \approx 11 \text{ nœud.}}$$

Partie B : étude de tarifs.

1. Calculons la recette $R(30)$ si le prix est fixé à 30 euro.

$$R(30) = 450 \times 30 \text{ euro}$$

$$\boxed{R(30) = 13\,500 \text{ €.}}$$

2. (a) Si le prix de la place est de 40 € alors le nombre d'augmentations de 10 centimes = $0,1$ € est

$$\frac{40-30}{0,10} = 100$$

Donc le nombre de places vendues est

$$450 - 100 \times 3 = 150$$

La recette est alors de

$$R(40) = 150 \times 40 \text{ €}$$

$$\boxed{R(40) = 6\,000 \text{ €.}}$$

(b) Si le prix de la place est de 10 € alors le nombre de diminutions est de 10 centimes = $0,1$ € est

$$\frac{30-10}{0,10} = 200$$

Donc le nombre de places vendues est

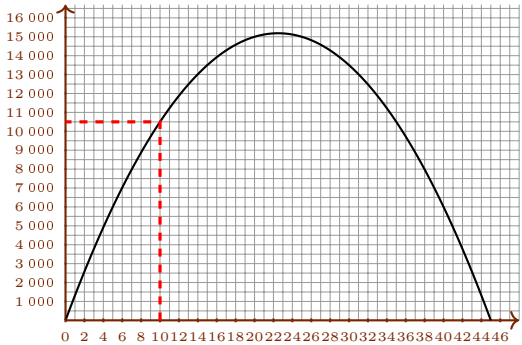
$$450 + 200 \times 3 = 1050$$

La recette est alors de

$$R(10) = 1050 \times 10 \text{ €}$$

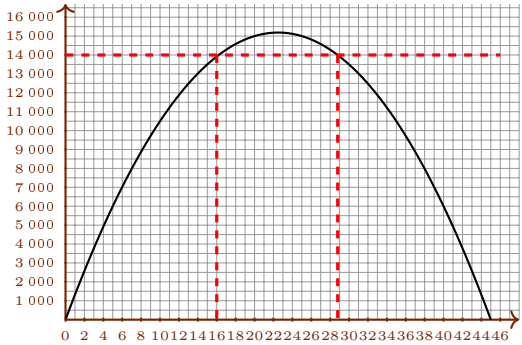
$$R(10) = 10\,500 \text{ €}.$$

3. (a)



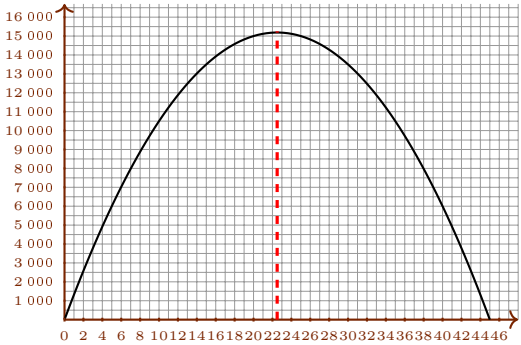
$$R(10) = 10\,500 \text{ €}.$$

(b)



Pour une recette de 14 000 € il faut un prix unitaire de 16 ou 28, 8 euro.

(c)



Pour une recette maximale il faut un prix unitaire de 22, 5 euro. La recette maximal est alors de 15 250 €.

Exercice 2.

1. Calculons le volume total de bois nécessaire V_t.

   Le volume d'un parallélépipède rectangle est

$$\begin{aligned} V_p &= (40 \text{ cm}) \times (1 \text{ m}) \times (1,25 \text{ m}) \\ &= (0,40 \text{ m}) \times (1 \text{ m}) \times (1,25 \text{ m}) \\ &= 0,40 \times 1 \times 1,25 \text{ m}^3 \\ &= 0,5 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

   Donc pour les trente appuis le volume est de

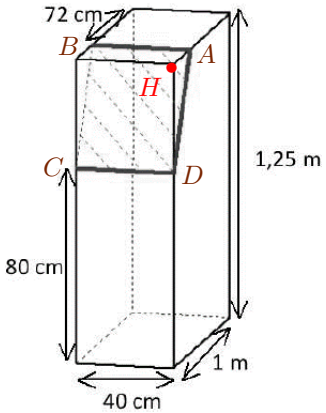
$$\begin{aligned} V_t &= 30 \times V_p \\ &= 30 \times 0,5 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$V_t = 15 \text{ m}^3.$$

2. (a) Calculons l'aire $\mathscr{S}(ABCD)$ de la surface d'une assise.

$ABCD$ est un rectangle pour calculer son aire il faut les longueurs de deux côtés consécutifs.

* $CD = 40$ cm.
* Notons H l'un des sommets du prisme découpé :



AHD est un triangle rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore, $AH^2 + HD^2 = AD^2$.
Or $AH = 1 \text{ m} - 72 \text{ cm} = 100 \text{ cm} - 72 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$ et $HD = 1,25 \text{ m} - 80 \text{ cm} = 125 \text{ cm} - 80 \text{ cm} = 45 \text{ cm}$ donc, si AD est exprimé en centimètre,

$$\begin{aligned} AD^2 &= 28^2 + 45^2 \\ &= 2809 \end{aligned}$$

AD étant une longueur c'est un nombre postif et donc :

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{2809} \\ &= 53 \end{aligned}$$

Ainsi $AD = 53$ cm.

Des points précédents nous déduisons :

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(ABCD) &= CD \times AD \\ &= 40 \text{ cm} \times 53 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}(ABCD) = 2\,120 \text{ cm}^2.}$$

(b) Calculons l'aire totale $\mathscr{S}_t$ à peindre.

$\mathscr{S}_t = 30 \times \mathscr{S}(ABCD) = 30 \times 2\,120 \text{ cm}^2 = 63600 \times \frac{1}{10000} \text{ m}^2$ donc

$$\boxed{\mathscr{S}_t = 6,36 \text{ m}^2.}$$

(c) Si 1 litre permet de peindre 10 m^2, un pot de $0,5\ \ell$ permet de peindre 5 m^2.
Donc

$$\boxed{\text{pour peindre } 6,36 \text{ m}^2 \text{ il faudra deux pots.}}$$

Exercice 3.

1. (a) Modélisons la situation. Sans indication spécifique on peut estimer que toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées : il y a équiprobabilité. Ainsi l'univers formé des 52 cartes est muni de la loi uniforme.

La moitié des cartes étant rouges :

$$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir une carte rouge est } \frac{1}{2}.}$$

(b) Un quart des cartes étant des piques :

$$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir un pique est } \frac{1}{4}.}$$

(c) Il y a quatre valets parmi les 52 cartes donc

la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

(d) Il y a deux dames de couleur rouge parmi les 52 cartes donc

la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

(e) Il y a 26 cartes rouges et deux dames noires parmi les 52 cartes donc

la probabilité d'obtenir une carte de couleur rouge ou une dame est $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$.

2. Déterminons le nombre N de cartes joker rajoutées.

La probabilité d'obtenir une des N cartes joker parmi les $52 + N$ cartes est (en supposant toujours l'équiprobabilité) :

$$\frac{N}{52+N} = \frac{1}{14}$$

On en déduit par un produit en croix :

$$14N = 52 + N$$

équation du premier degré qui équivaut successivement à :

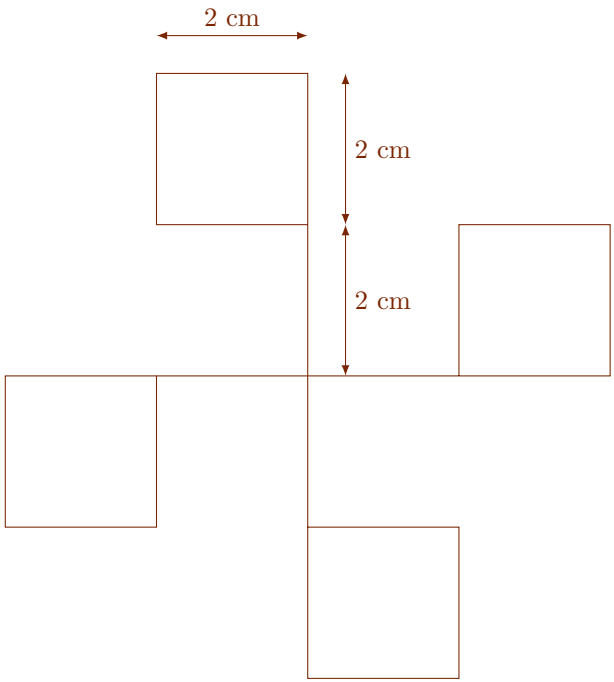
$$\begin{aligned} 14N - N &= 52 + N - N \\ 13N &= 52 \\ \frac{13N}{N} &= \frac{52}{13} \end{aligned}$$

$N = 4$.

Exercice 4.

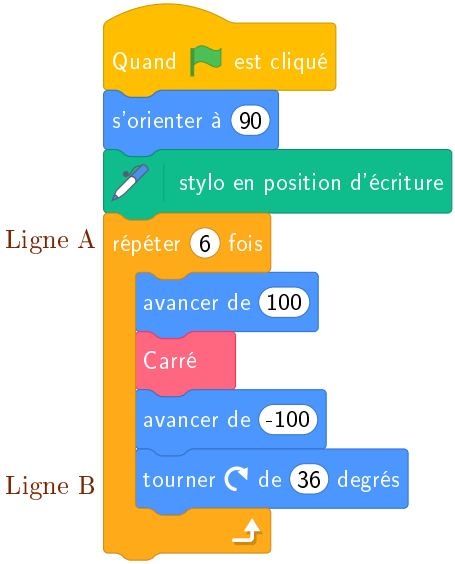
Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

1.

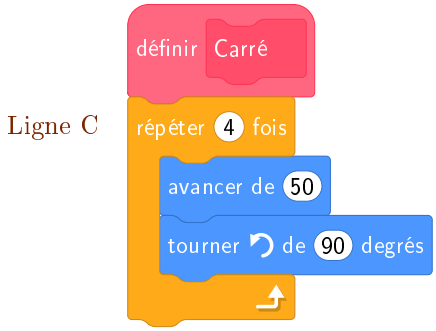


2. (a) On modifie le programme de la façon suivante :

Script principal.



Bloc Carré.



(b)

La transformation permettant de passer de $ABCD$ à $EFGH$ est la rotation de centre O et d'angle 60° (ou $\frac{\pi}{3}$).

Exercice 5.

1. Calculons l'étendue des salaires.

$$\begin{aligned} e &= \max - \min \\ &= 5500 - 1923 \end{aligned}$$

$$e = 3577 \text{ €}.$$

2. Calculons le salaire net S_{dn} de la directrice.

Le montant des charges sur le salaire de la directrice est de

$$\frac{22}{100} \times 5500 \text{ €} = 1210 \text{ €}$$

donc le salaire net est

$$S_{dn} = 5500 \text{ €} - 1210 \text{ €}$$

$$\boxed{S_{dn} = 4290 \text{ €}.}$$

3.

En B4 on entre : = B3 ∗ 22/100.

4.

En B5 on entre : = B3 − B4.

5. Calculons le salaire moyen brut $\overline{x}$.

On utilise la formule de la moyenne pondérée :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}\\ &= \frac{4 \times 1923 + 5 \times 2307 + 2 \times 2693 + 3 \times 4200 + 1 \times 5500}{4 + 5 + 2 + 3 + 1}\\ &\approx 2847,53\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 2848 \text{ €}.}$$

6. Déterminons la médiane Me des salaires bruts.

* La série des salaires bruts est rangée dans l'ordre croissant dans l'énoncé.
* Il y a $4 + 5 + 2 + 3 + 1 = 15$ employés. $\frac{15}{2} = 7,5$ donc la médiane est la huitième valeur (série impaire).

* En cumulant les effectifs : $4 + 5 = 9$ don la huitième valeur de la série ordonnée est 2307.

$$Me = 2307 \text{ €}.$$

7. Notons x le salaire brut de l'ingénieur.

Déterminons x.

On doit avoir :

$$x - \frac{22}{100} \times x = 3200$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{22}{100}\right)x &= 3200 \\
0,78x &= 3200 \\
\frac{0,78x}{0,78} &= \frac{3200}{0,78} \\
x &= \frac{3200}{0,78}
\end{aligned}$$

Donc

$$x \approx 4102,564$$

$$x \approx 4103 \text{ €}.$$

Exercice 6.

1.

Nombre choisi	43	57	52	60	16
Nombre retourné	34	75	25	6	61
Différence entre le nombre choisi et son « retourné »	9	−18	27	54	−45

2. Il semble que la différence entre un nombre et son retourné soit un multiple de 9.

3. (a) $N = 10d + u$.

(b) $R = 10u + d$.

(c)

$$\begin{aligned} N - R &= 10d + u - (10u + d) \\ &= 10d + 10u - 10u - d \\ &= 9d - 9u \end{aligned}$$

donc, en factorisant par 9

$$N - R = 9(d - u).$$

(d) D'après la question précédente : $N - R = 9(d - u)$. Or $d - u$ est un nombre entier donc

$N - R$ est un multiple de 9.

(e) Si $N - R = 63$ alors

$$\begin{aligned} 9(d - u) &= 63 \\ \frac{9(d - u)}{9} &= \frac{63}{9} \\ d - u &= 7 \\ d &= 7 + u \end{aligned}$$

Or $0 \leqslant u \leqslant 9$ et $0 \leqslant d \leqslant 9$ donc les couples possibles pour (u, d) (dans cet ordre) sont $(0, 7)$, $(1, 8)$, $(2, 9)$.

Pour que $N - R = 63$ il faut choisir 70, 81 ou 92.

(f) Si $N - R = 56$ comme $56 = 2^3 \times 7$ n'est pas divisible par 9 donc il n'existe pas de nombre qui convienne.

L'ensemble des nombres possibles est l'ensemble vide.

Exercice 7.

1. Il a obtenu le prix de deux glaces.

2. Déterminons x et y.

   La ligne concernant Raphaël se traduit par

$$2x + 4y = 22.$$

   La ligne concernant Lena se traduit par

$$x + 3y = 14.$$

   On a donc le système

$$\begin{cases} 2x & + & 4y & = & 22 \\ x & + & 3y & = & 14 \end{cases}$$

   De la seconde équation nous déduisons $x = 14 - 3y$.
   En substituant dans la première : $2(14 - 3y) + 4y = 22$, ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 2 \times 14 - 2 \times 3y + 4y &= 22 \\ 28 - 6y + 4y &= 22 \\ -2y22 - 28 & \\ y &= 3 \end{aligned}$$

   Puis de $x = 14 - 3y$ nous déduisons, sachant que $y = 3$, $x = 14 - 3 \times 3 = 5$.

Un cône coûte 5 zeds et une glace fusée coûte 3 zeds.