Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

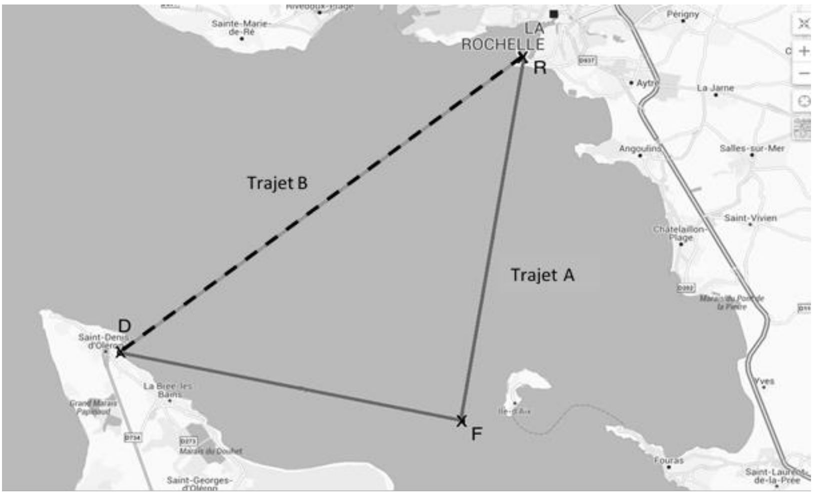
Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Le sujet est composé de sept exercices indépendants.

Exercice 1.

Une enseignante organise une sortie scolaire autour de La Rochelle. Le voyage s'effectue par navette maritime en deux étapes :

- un trajet aller, appelé trajet A, qui part du port de La Rochelle (point R), se rend autour du fort Boyard (point F), fait deux tours du fort puis se rend à St-Denis d'Oléron (point D) ;
- un trajet retour, appelé trajet B, qui part de Saint-Denis d'Oléron (point D) et se rend directement au port de La Rochelle (point R).



Partie A : étude des trajets.

1. On donne $DF = 13,80$ km, $DR = 23,41$ km et $RF = 18,91$ km.
   Démontrer que le triangle RDF est un triangle rectangle en F.

   Démontrons que RDF est rectangle en F.

D'une part

$$\begin{aligned} DF^2 + RF^2 &= 13,80^2 + 18,91^2 \\ &= 548,0281 \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} DR^2 &= 23,41^2 \\ &= 548,0281 \end{aligned}$$

donc $DF^2 + RF^2 = DR^2$.
Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que

RDF est rectangle en F.

Le nœud est une unité de vitesse utilisée dans le domaine maritime. 1 nœud correspond à 1 852 mètres par heure.

2. Sachant que la vitesse moyenne de la navette sur le trajet B est de 10 nœuds, calculer la durée du trajet B, en minute, arrondie à l'unité.

Déterminons la durée t du trajet.

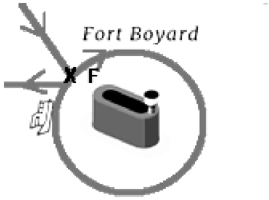
$$v = \frac{d}{t}$$

donc

$$\begin{aligned} t &= \frac{d}{v} \\ &= \frac{23,41 \text{ km}}{10 \text{ nœuds}} \\ &= \frac{23\,410 \text{ m}}{10 \times 1\,852 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &= \frac{23\,410}{10 \times 1\,852} \frac{\text{m} \cdot \text{h}}{\text{m}} \\ &= \frac{23\,410}{10 \times 1\,852} \times 60 \text{ min} \\ &\approx 75,84 \text{ min} \end{aligned}$$

Le trajet dure 76 minutes.

3. Le trajet A prévoit un détour vers le Fort Boyard. La navette effectue deux fois le tour du fort avant de repartir.
   On modélise le tour du fort par un trajet circulaire, de rayon 500 m.



   (a) Montrer que la longueur d'un tour du fort, ainsi modélisée, est d'environ 3142 m.

   Calculons la longueur L d'un tour du fort.

   Le tour étant circulaire de rayon 500 m :

$$\begin{aligned} L &= 2\pi \times 500 \text{ m} \\ &\approx 3141,59 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\boxed{L \approx 3\,142 \text{ m.}}$$

   (b) Calculer la distance totale du trajet A. Donner le résultat en kilomètre, arrondi à l'unité.

   Calculons la distance L_A du trajet A.

$$\begin{aligned} L_A &= RF + 2L + FD \\ &= 18,91 \text{ km} + 2 \times 3142 \text{ m} + 13,8 \text{ km} \\ &= 18,91 \text{ km} + 2 \times 3,142 \text{ km} + 13,8 \text{ km} \\ &= 38,994 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\boxed{L_A \approx 39 \text{ km.}}$$

4. Le trajet A dure au total 2 h. Calculer la vitesse moyenne de la navette, exprimée en nœuds et arrondie à l'unité.

Calculons la vitesse moyenne v_A sur le trajet A.

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{L_A}{2 \text{ h}} \\ &= \frac{29 \text{ km}}{2 \text{ h}} \\ &= \frac{29}{2} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 19,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\ &= 19,5 \times \frac{1}{1,852} \text{ nœud} \\ &\approx 10,529 \text{ nœud} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_A \approx 11 \text{ nœud.}}$$

Partie B : étude de tarifs.

L'entreprise qui réalise ce trajet étudie le prix à fixer pour le voyage.

Une étude de marché montre qu'en fixant le prix d'une place sur la navette à 30 €, l'entreprise vendrait 450 places en moyenne par jour.

La même étude montre que :

- à chaque augmentation de 10 centimes, l'entreprise vendra 3 places de moins ;
- à chaque diminution de 10 centimes, l'entreprise vendra 3 places de plus.

On appelle recette journalière moyenne de l'entreprise le montant récolté lors de la vente des places.

1. Calculer la recette journalière moyenne si l'entreprise fixe le prix d'une place à 30 €.

Calculons la recette $R(30)$ si le prix est fixé à 30 euro.

$$R(30) = 450 \times 30 \text{ euro}$$

$$\boxed{R(30) = 13\,500 \text{ €}.}$$

2. (a) Montrer que si l'entreprise décide de fixer la place à 40 €, alors la recette journalière moyenne est de 6 000 €.

Si le prix de la place est de 40 € alors le nombre d'augmentations de 10 centimes = 0, 1 € est

$$\frac{40-30}{0,10} = 100$$

Donc le nombre de places vendues est

$$450 - 100 \times 3 = 150$$

La recette est alors de

$$R(40) = 150 \times 40 \text{ €}$$

$$\boxed{R(40) = 6\,000 \text{ €}.}$$

(b) Calculer la recette journalière moyenne si l'entreprise décide de fixer la place à 10 €.

Si le prix de la place est de 10 € alors le nombre de diminutions est de 10 centimes = 0, 1 € est

$$\frac{30-10}{0,10} = 200$$

Donc le nombre de places vendues est

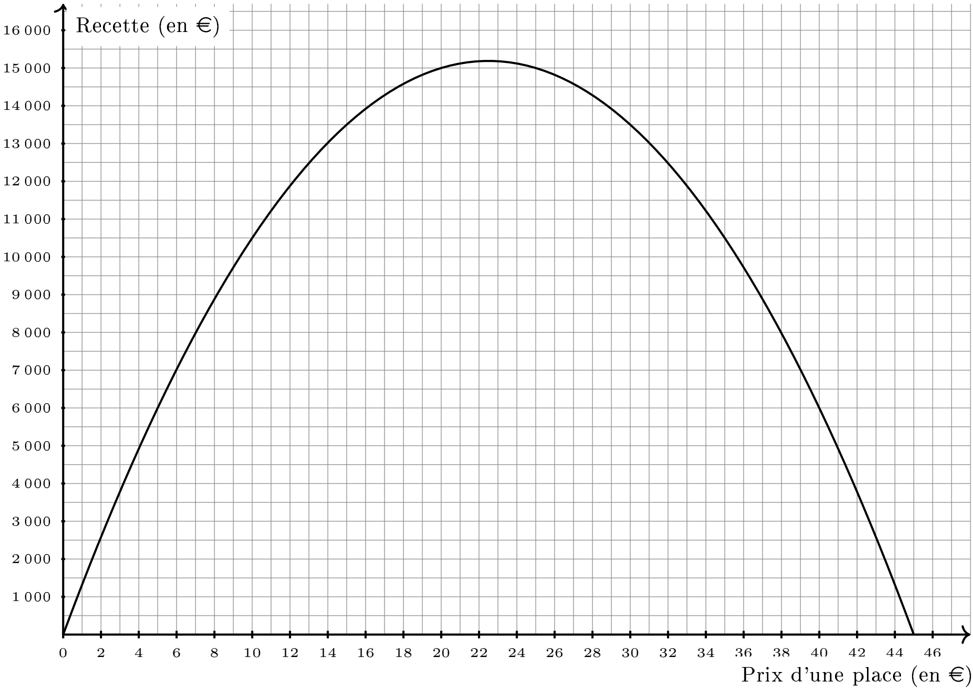
$$450 + 200 \times 3 = 1050$$

La recette est alors de

$$R(10) = 1050 \times 10 \text{ €}$$

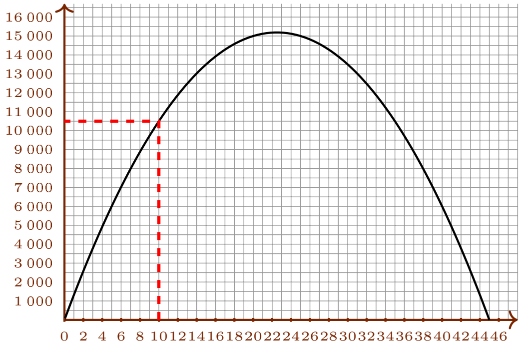
$$\boxed{R(10) = 10\,500 \text{ €}.}$$

3. Le graphique suivant donne la recette journalière prévue par l'étude de marché en fonction du prix d'une place.



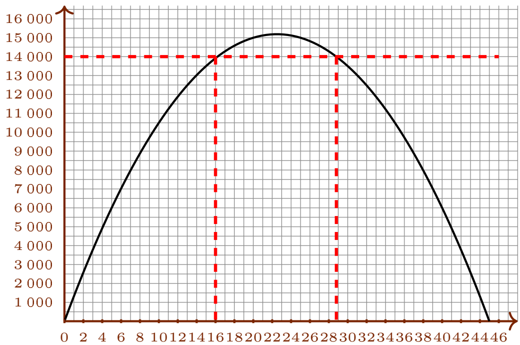
Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique

(a) Donner la recette journalière pour un prix unitaire de 10 €.



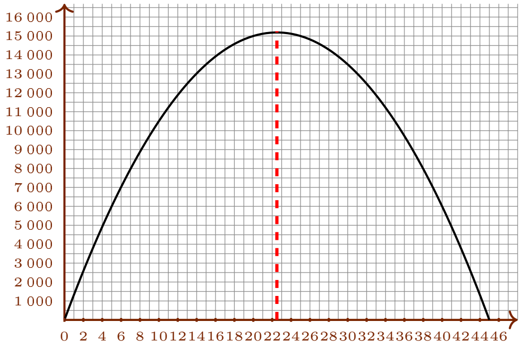
$R(10) = 10\,500$ €.

(b) Déterminer le(s) prix unitaire(s) correspondant à une recette journalière de $14\,000$ €.



Pour une recette de $14\,000$ € il faut un prix unitaire de 16 ou $28,8$ euro.

(c) Quel prix unitaire permet d'obtenir une recette journalière maximale ? Indiquer le montant de cette recette maximale.



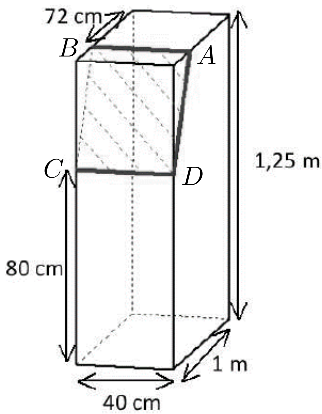
Pour une recette maximale il faut un prix unitaire de $22,5$ euro. La recette maximal est alors de $15\,250$ €.

Exercice 2.

Une mairie souhaite végétaliser la cour de son école.

Sur un sol de copeaux de bois, la mairie souhaite installer des appuis conçus à partir de parallélépipèdes rectangles.

Les appuis sont obtenus à partir de blocs de bois écoresponsables, qui sont ensuite tronçonnés en partie de façon à obtenir une assise rectangulaire $ABCD$ sur laquelle les élèves peuvent s'appuyer.



La mairie décide d'installer dans la cour de l'école trente de ces appuis.

1. Calculer, en mètre cube, le volume de bois nécessaire avant tronçonnage, à la fabrication des trente appuis.

   Calculons le volume total de bois nécessaire V_t.

   Le volume d'un parallélépipède rectangle est

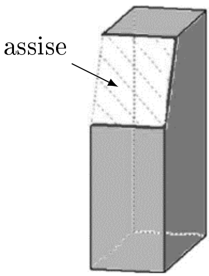
$$\begin{aligned} V_p &= (40 \text{ cm}) \times (1 \text{ m}) \times (1,25 \text{ m}) \\ &= (0,40 \text{ m}) \times (1 \text{ m}) \times (1,25 \text{ m}) \\ &= 0,40 \times 1 \times 1,25 \text{ m}^3 \\ &= 0,5 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

   Donc pour les trente appuis le volume est de

$$\begin{aligned} V_t &= 30 \times V_p \\ &= 30 \times 0,5 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{V_t = 15 \text{ m}^3.}$$

2. Une fois tronçonnés, les blocs prennent donc la forme ci-dessous.



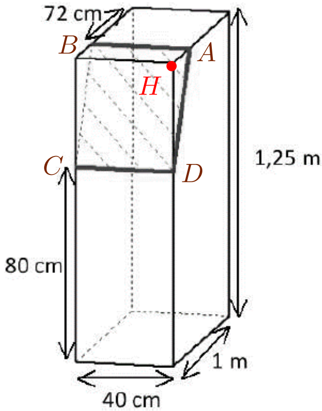
   Les assises des appuis sont alors peintes en blanc.

   (a) Montrer que l'aire d'un rectangle à peindre en blanc est égale à 2120 cm^2.

   Calculons l'aire $\mathscr{S}(ABCD)$ de la surface d'une assise.

   $ABCD$ est un rectangle pour calculer son aire il faut les longueurs de deux côtés consécutifs.

* $CD = 40$ cm.
* Notons H l'un des sommets du prisme découpé :



AHD est un triangle rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore, $AH^2 + HD^2 = AD^2$.
Or $AH = 1 \text{ m} - 72 \text{ cm} = 100 \text{ cm} - 72 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$ et $HD = 1,25 \text{ m} - 80 \text{ cm} = 125 \text{ cm} - 80 \text{ cm} = 45 \text{ cm}$ donc, si AD est exprimé en centimètre,

$$\begin{aligned} AD^2 &= 28^2 + 45^2 \\ &= 2809 \end{aligned}$$

AD étant une longueur c'est un nombre postif et donc :

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{2809} \\ &= 53 \end{aligned}$$

Ainsi $AD = 53$ cm.

Des points précédents nous déduisons :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(ABCD) &= CD \times AD \\ &= 40 \text{ cm} \times 53 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}(ABCD) = 2\,120 \text{ cm}^2.}$$

(b) Calculer l'aire totale des rectangles à peindre en blanc pour les 30 appuis en mètre carré.

Calculons l'aire totale $\mathscr{S}_t$ à peindre.

$\mathscr{S}_t = 30 \times \mathscr{S}(ABCD) = 30 \times 2\,120 \text{ cm}^2 = 63600 \times \frac{1}{10000} \text{ m}^2$ donc

$$\boxed{\mathscr{S}_t = 6,36 \text{ m}^2.}$$

(c) D'après la fiche technique suivante, combien de pots de couleur blanche seront nécessaires ?

Fiche technique
- Peinture laque glycero aspect satiné.
- Usage : intérieur, extérieur, monocouche.
- Rendement : $10 \text{ m}^2/\text{L}$.
- Protège des UV et intempéries.
- Conditionnement : $0,5$ L.

Si 1 litre permet de peindre 10 m^2, un pot de $0,5\ \ell$ permet de peindre 5 m^2.
Donc

pour peindre $6,36 \text{ m}^2$ il faudra deux pots.

Exercice 3.

Une enseignante propose à ses élèves un jeu de 52 cartes. Le jeu contient 13 cartes (As, 2,3, ..., 10, Valet, Dame, Roi) de chacune des familles suivantes : carreau, cœur, pique, trèfle.

Cœur et carreau sont des familles de couleur rouge. Pique et trèfle sont de couleur noire.

1. L'enseignante donne une carte, choisie au hasard, à Ana.

(a) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit rouge ?

Modélisons la situation. Sans indication spécifique on peut estimer que toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées : il y a équiprobabilité. Ainsi l'univers formé des 52 cartes est muni de la loi uniforme.

La moitié des cartes étant rouges :

> la probabilité d'obtenir une carte rouge est $\frac{1}{2}$.

(b) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un pique ?

Un quart des cartes étant des piques :

> la probabilité d'obtenir un pique est $\frac{1}{4}$.

(c) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un valet ?

Il y a quatre valets parmi les 52 cartes donc

> la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

(d) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une dame de couleur rouge ?

Il y a deux dames de couleur rouge parmi les 52 cartes donc

> la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

(e) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une carte de couleur rouge ou une dame ?

Il y a 26 cartes rouges et deux dames noires parmi les 52 cartes donc

> la probabilité d'obtenir une carte de couleur rouge ou une dame est $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$.

2. L'enseignante décide d'ajouter des cartes Joker à son jeu. Combien doit-elle ajouter de carte joker pour que la probabilité qu'Ana reçoive une carte Joker soit de $\dfrac{1}{14}$.

   Déterminons le nombre N de cartes joker rajoutées.

   La probabilité d'obtenir une des N cartes joker parmi les $52 + N$ cartes est (en supposant toujours l'équiprobabilité) :

$$\frac{N}{52 + N} = \frac{1}{14}$$

On en déduit par un produit en croix :

$$14N = 52 + N$$

équation du premier degré qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 14N - N &= 52 + N - N \\ 13N &= 52 \\ \frac{13N}{N} &= \frac{52}{13} \end{aligned}$$

$$\boxed{N = 4.}$$

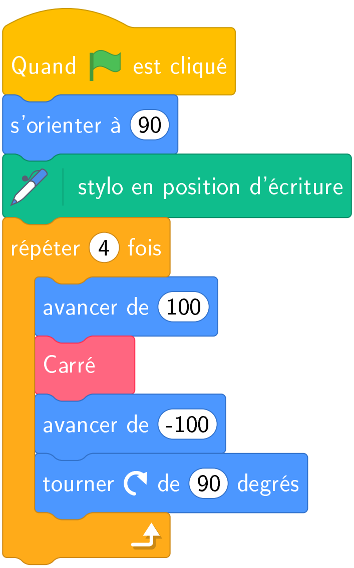
Exercice 4.

On considère les deux scripts ci-dessous.

Script principal.

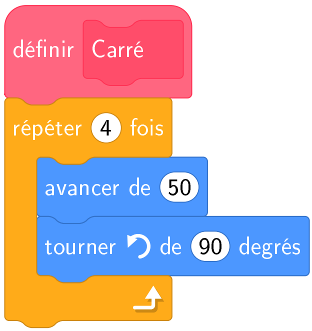
Ligne A

Ligne B



Bloc Carré.

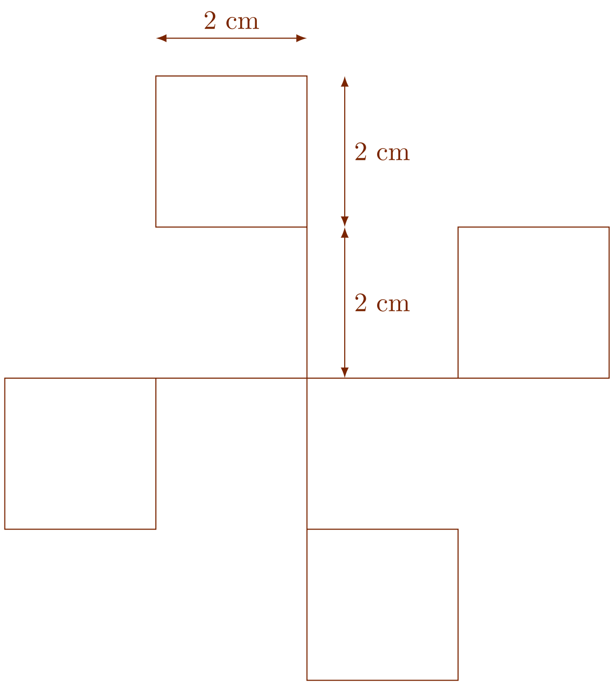
Ligne C



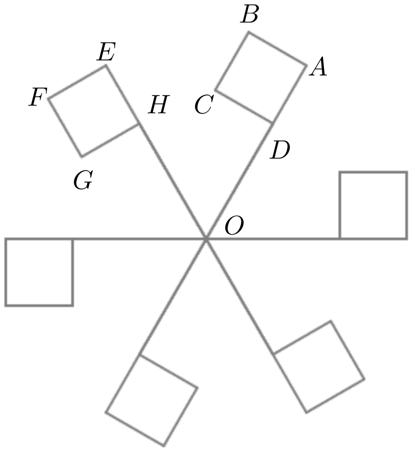
On rappelle que l'instruction `s'orienter à (90)` signifie que l'on se dirige vers la droite.

Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

1. Représenter sur la copie la figure réalisée par le script principal. Le lutin se déplace selon le nombre de pixels défini. On représentera 25 pixels par 1 cm.



2. On souhaite réaliser la figure ci-dessous en modifiant les scripts ci-dessus.



(a) Quelles modifications doit-on apporter aux lignes A, B et C pour obtenir cette figure ?

On modifie le programme de la façon suivante :

Script principal.

```
            Quand [drapeau] est cliqué
            s'orienter à (90)
            stylo en position d'écriture
Ligne A     répéter (6) fois
                avancer de (100)
                Carré
                avancer de (-100)
Ligne B         tourner ↻ de (36) degrés
            fin
```

Bloc Carré.

```
            définir Carré
Ligne C     répéter (4) fois
                avancer de (50)
                tourner ↺ de (90) degrés
            fin
```

(b) Proposer une transformation géométrique, dont on donnera les caractéristiques, permettant de passer du carré $ABCD$ au carré $EFGH$.

La transformation permettant de passer de $ABCD$ à $EFGH$ est la rotation de centre O et d'angle 60° (ou $\frac{\pi}{3}$).

Exercice 5.

Les effectifs et les salaires mensuels des différents employés d'une entreprise sont inscrits dans la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	F
1	Fonction dans l'entreprise	Ouvrier	Technicien	Secrétaire	Cadre	Directrice
2	Effectif	4	5	2	3	1
3	Salaire brut (€)	1923	2307	2693	4200	5500
4	Charges (22%)					
5	Salaire net (€)					
6						

Dans la suite de l'exercice, on considère que les charges s'élèvent à 22 % du salaire brut. Le salaire brut moins les charges est appelé salaire net.

1. Quelle est l'étendue des salaires mensuels bruts dans cette entreprise ?

   Calculons l'étendue des salaires.

$$\begin{aligned} e &= \max - \min \\ &= 5500 - 1923 \end{aligned}$$

$$e = 3577 \text{ €}.$$

2. Montrer que le salaire mensuel net de la directrice est de 4 290 €.

   Calculons le salaire net S_{dn} de la directrice.

   Le montant des charges sur le salaire de la directrice est de

$$\frac{22}{100} \times 5500 \text{ €} = 1210 \text{ €}$$

donc le salaire net est

$$S_{dn} = 5500 \text{ €} - 1210 \text{ €}$$

$$S_{dn} = 4290 \text{ €}.$$

3. Le comptable souhaite calculer le salaire mensuel net des autres employés. Quelle formule doit-il écrire dans la cellule B4 pour calculer les charges sociales d'un ouvrier ? Cette formule doit pouvoir être étendue pour calculer les charges dans toutes les colonnes.

En `B4` on entre : `= B3 * 22/100`.

4. Quelle formule entrer dans la cellule `B5` pour calculer le salaire net de l'ouvrier ? Cette formule doit pouvoir être étendue pour calculer les salaires nets dans toutes les colonnes.

En `B5` on entre : `= B3 - B4`.

5. Calculer le salaire mensuel brut moyen dans cette entreprise. Arrondir à l'euro.

Calculons le salaire moyen brut $\overline{x}$.

On utilise la formule de la moyenne pondérée :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{4 \times 1923 + 5 \times 2307 + 2 \times 2693 + 3 \times 4200 + 1 \times 5500}{4+5+2+3+1} \\ &\approx 2847,53\end{aligned}$$

$$\overline{x} \approx 2848 \text{ €}.$$

6. Déterminer la médiane des salaires mensuels bruts de cette entreprise.

   Déterminons la médiane Me des salaires bruts.

   * La série des salaires bruts est rangée dans l'ordre croissant dans l'énoncé.
   * Il y a $4 + 5 + 2 + 3 + 1 = 15$ employés. $\frac{15}{2} = 7,5$ donc la médiane est la huitième valeur (série impaire).
   * En cumulant les effectifs : $4 + 5 = 9$ don la huitième valeur de la série ordonnée est 2307.

   $$\boxed{Me = 2307 \text{ €}.}$$

7. L'entreprise envisage l'embauche d'un nouvel ingénieur. Celui-ci souhaite un salaire net de 3 200 €. À combien doit s'élever son salaire brut ? Arrondir à l'euro.

   Notons x le salaire brut de l'ingénieur.

   Déterminons x.

   On doit avoir :

   $$x - \frac{22}{100} \times x = 3200$$

   ce qui équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} \left(1 - \frac{22}{100}\right)x &= 3200 \\ 0,78x &= 3200 \\ \frac{0,78x}{0,78} &= \frac{3200}{0,78} \\ x &= \frac{3200}{0,78} \end{aligned}$$

   Donc

   $$x \approx 4102,564$$

   $$\boxed{x \approx 4103 \text{ €}.}$$

Exercice 6.

On considère un nombre entier à deux chiffres et l'on appelle son « retourné » le nombre obtenu en permutant le chiffre des dizaines et celui des unités.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre choisi	43	57	52	60	16
Nombre retourné	34	75			
Différence entre le nombre choisi et son « retourné »					

Nombre choisi	43	57	52	60	16
Nombre retourné	34	75	25	6	61
Différence entre le nombre choisi et son « retourné »	9	-18	27	54	-45

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la différence entre un nombre et son retourné ?

Il semble que la différence entre un nombre et son retourné soit un multiple de 9.

3. On note N le nombre choisi, u son chiffre des unités et d son chiffre des dizaines.

(a) Exprimer N en fonction de d et u.

$$N = 10d + u.$$

(b) Exprimer le « retourné » R du nombre choisi en fonction de d et u.

$$R = 10u + d.$$

(c) Montrer que la différence $N - R$ est égale à $9(d - u)$.

$$\begin{aligned} N - R &= 10d + u - (10u + d) \\ &= 10d + 10u - 10u - d \\ &= 9d - 9u \end{aligned}$$

donc, en factorisant par 9

$$N - R = 9(d - u).$$

(d) En déduire que la différence entre un nombre et son retourné est un multiple de 9.

D'après la question précédente : $N - R = 9(d - u)$. Or $d - u$ est un nombre entier donc

$N - R$ est un multiple de 9.

(e) Pour obtenir une différence $N-R$ égale à 63 quels nombres est-il possible de choisir au départ ? Donner l'ensemble des solutions.

Si $N - R = 63$ alors

$$\begin{aligned} 9(d-u) &= 63 \\ \frac{9(d-u)}{9} &= \frac{63}{9} \\ d-u &= 7 \\ d &= 7+u \end{aligned}$$

Or $0 \leqslant u \leqslant 9$ et $0 \leqslant d \leqslant 9$ donc les couples possibles pour (u, d) (dans cet ordre) sont $(0, 7)$, $(1, 8)$, $(2, 9)$.

Pour que $N - R = 63$ il faut choisir 70, 81 ou 92.

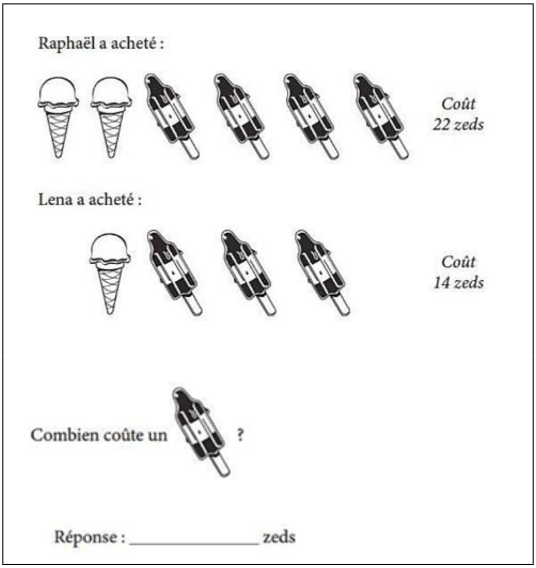
(f) Pour obtenir une différence $N-R$ égale à 56 quels nombres est-il possible de choisir au départ ? Donner l'ensemble des solutions.

Si $N - R = 56$ comme $56 = 2^3 \times 7$ n'est pas divisible par 9 donc il n'existe pas de nombre qui convienne.

L'ensemble des nombres possibles est l'ensemble vide.

Exercice 7.

Cet exercice est inspiré d'un problème proposé à des élèves de fin CM1 en 2015 aux évaluations internationales TIMSS.



1. Un élève propose la réponse suivante :

$$\boxed{\begin{array}{c} 2 \times 14 - 22 = 6 \\ \textit{Une glace fusée vaut } 6 \textit{ zeds.} \end{array}}$$

   Identifier l'erreur de l'élève.

   Il a obtenu le prix de deux glaces.

2. On note x le prix en zed d'un cône et y le prix en zed d'une glace fusée. Écrire les équations correspondantes au problème et en déduire le prix d'un cône et d'une glace fusée.

   Déterminons x et y.

   La ligne concernant Raphaël se traduit par

$$2x + 4y = 22.$$

   La ligne concernant Lena se traduit par

$$x + 3y = 14.$$

On a donc le système

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & + & 4y & = & 22 \\ x & + & 3y & = & 14 \end{array}\right.$$

De la seconde équation nous déduisons $x = 14 - 3y$.
En substituant dans la première : $2(14 - 3y) + 4y = 22$, ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 2 \times 14 - 2 \times 3y + 4y &= 22 \\ 28 - 6y + 4y &= 22 \\ -2y22 - 28 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Puis de $x = 14 - 3y$ nous déduisons, sachant que $y = 3$, $x = 14 - 3 \times 3 = 5$.

Un cône coûte 5 zeds et une glace fusée coûte 3 zeds.