

Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : [pdf](#).

Exercice 1.

1. Avec la calculatrice : $4\,216 \div 17 = 248$.

Autrement dit $17 \times 248 = 4\,216$ donc

4 216 est un multiple de 17.

2. (a) Un nombre est divisible par 3 si

la somme des chiffres qui le compose est un multiple de 3.

- (b) Notons n le chiffre des unités du nombre de l'exemple.

Nous devons avoir $2 + 2 + 9 + n = 13 + n$ qui est un multiple de 3.

Testons toutes les possibilités :

n	$13 + n$
1	14
2	15
3	16
4	17
5	18
6	19
7	20
8	21
9	22

Le chiffre des unités caché est 2 ou 5 ou 8.

3. (a) Démontrons que 413 est divisible par 7.

$$41 - 2 \times 3 = 35 \text{ or } 35 = 5 \times 7 \text{ donc}$$

423 est divisible par 7.

(b)

$$529 - 2 \times 2 = 525$$

$$52 - 2 \times 5 = 42$$

Or $42 = 6 \times 7$ donc 42 est un multiple de 7.

Nous en déduisons que 525 est un multiple de 7.

Nous en déduisons enfin que

5 292 est un multiple de 7.

(c)

Dans C1 : « $= A1 - 10 * B1$ ».

Dans D1 : « $= B1 - 2 * C1$ ».

(d) Le 7 (visible dans la cellule D5) est divisible par 7 donc il en est de même successivement pour 112, 1 120, 11 389, 113 890 et enfin 1 138 984.

1 138 984 est un multiple de 7.

Exercice 2.

1. (a) Calculons BC .

Toutes les longueurs considérées sont exprimées dans la même unité, le mètre, on peut donc ne pas l'indiquer dans nos calculs sans que cela soit source d'erreur.

Puisque ABC est rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} BC^2 &= 300^2 + 400^2 \\ &= 250\,000 \end{aligned}$$

Puisque BC est une longueur c'est un nombre positif et donc

$$BC = \sqrt{250\,000}$$

$$BC = 500 \text{ m.}$$

(b) Calculons CF .

* C, I, B d'une part et C, I, B d'autre part sont alignés dans cet ordre (puisque $F \in [AC]$ et $I \in [BC]$). Ainsi nous avons une configuration de Thalès.

* $(AB) \parallel (FI)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CF}{AC} = \frac{IC}{BC}.$$

Autrement dit :

$$\frac{CF}{400} = \frac{350}{500}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{CF}{400} \times 400 &= \frac{350}{500} \times 400 \\ CF &= \frac{350}{500} \times 400 \end{aligned}$$

$$CF = 280 \text{ m.}$$

Calculons IF .

De même que ci-dessus

$$\frac{IF}{AB} = \frac{IC}{BC}.$$

Autrement dit :

$$\frac{IF}{300} = \frac{350}{500}$$

Donc

$$IF = \frac{350}{500} \times 300$$

$$IF = 210 \text{ m.}$$

(c) Calculons ED .

* B, C, D d'une part et A, C, E d'autre part sont alignés dans cet ordre (puisque les droites (AE) et (BD) se coupent en C). Ainsi nous avons une configuration de Thalès.

* $(AB) \parallel (ED)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{BC}.$$

Autrement dit :

$$\frac{ED}{300} = \frac{1250}{500}$$

Donc

$$ED = \frac{1250}{500} \times 300$$

$$ED = 750 \text{ m.}$$

(d) Calculons la longueur ℓ de la ligne brisée $ABIFCDE$.

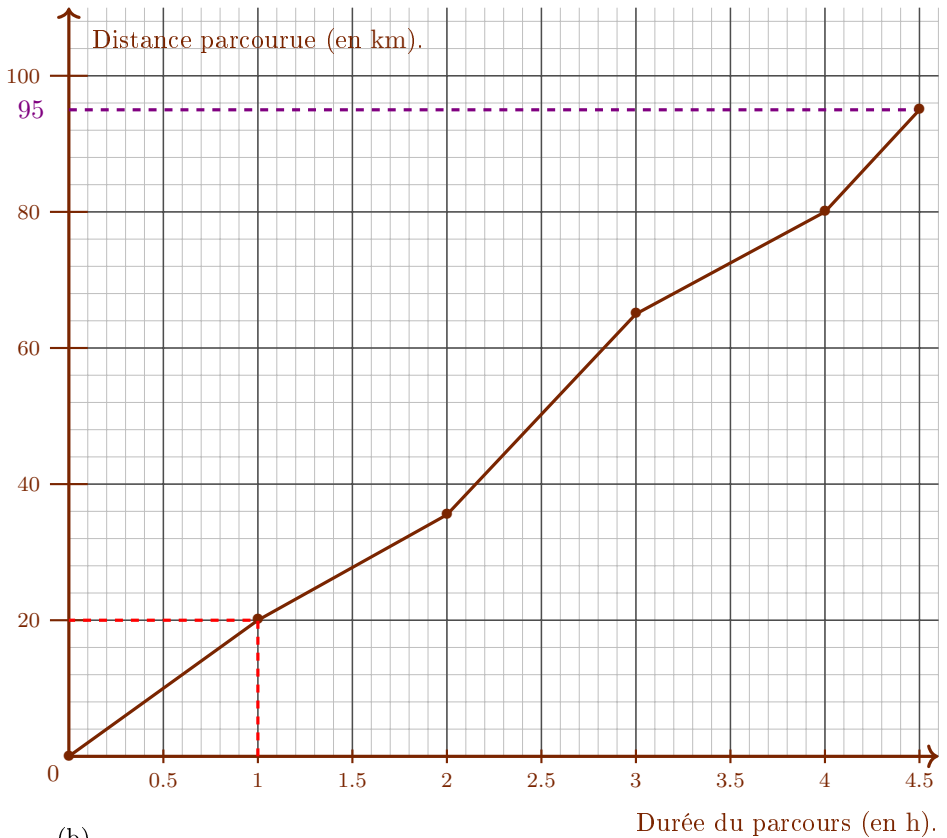
$$\begin{aligned} \ell &= AB + BI + IF + FC + CD + DE \\ &= 300 + (BC - IC) + 210 + 280 + 1250 + 750 \\ &= 300 + (500 - 350) + 210 + 280 + 1250 + 750 \end{aligned}$$

$$\ell = 2940 \text{ m.}$$

2. (a) Les fonctions qui représentent les situations de proportionnalité sont les fonctions linéaires. Or les courbes représentatives de fonctions linéaires sont des droites passant par l'origine du repère.

La courbe n'étant pas une droite

il n'y a pas proportionnalité entre la durée et la distance parcourue.



En une heure il a parcouru 20 km.

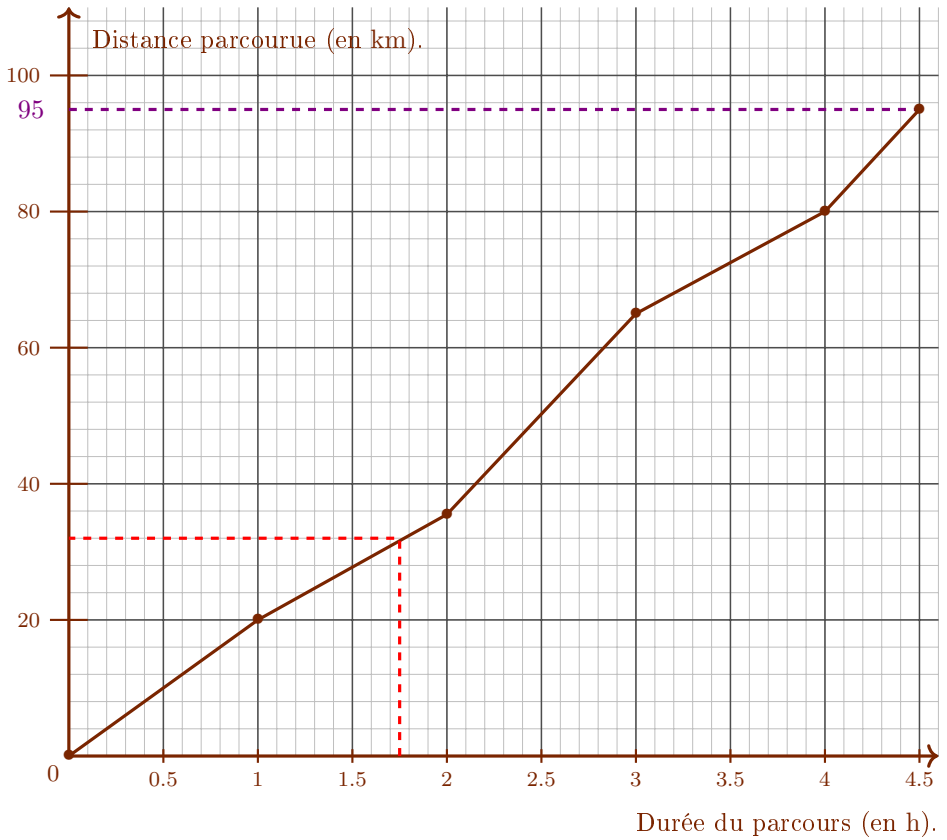
- (c) Déterminons la vitesse moyenne, v_1 , pendant la première heure.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{20 \text{ km}}{1 \text{ h}} \\ &= \frac{20 \times 1000 \text{ m}}{1 \times 60 \text{ min}} \\ &= \frac{20000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\ &= \frac{50}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 5,555 \text{ m/s en tronquant,} \end{aligned}$$

donc en arrondissant au centième

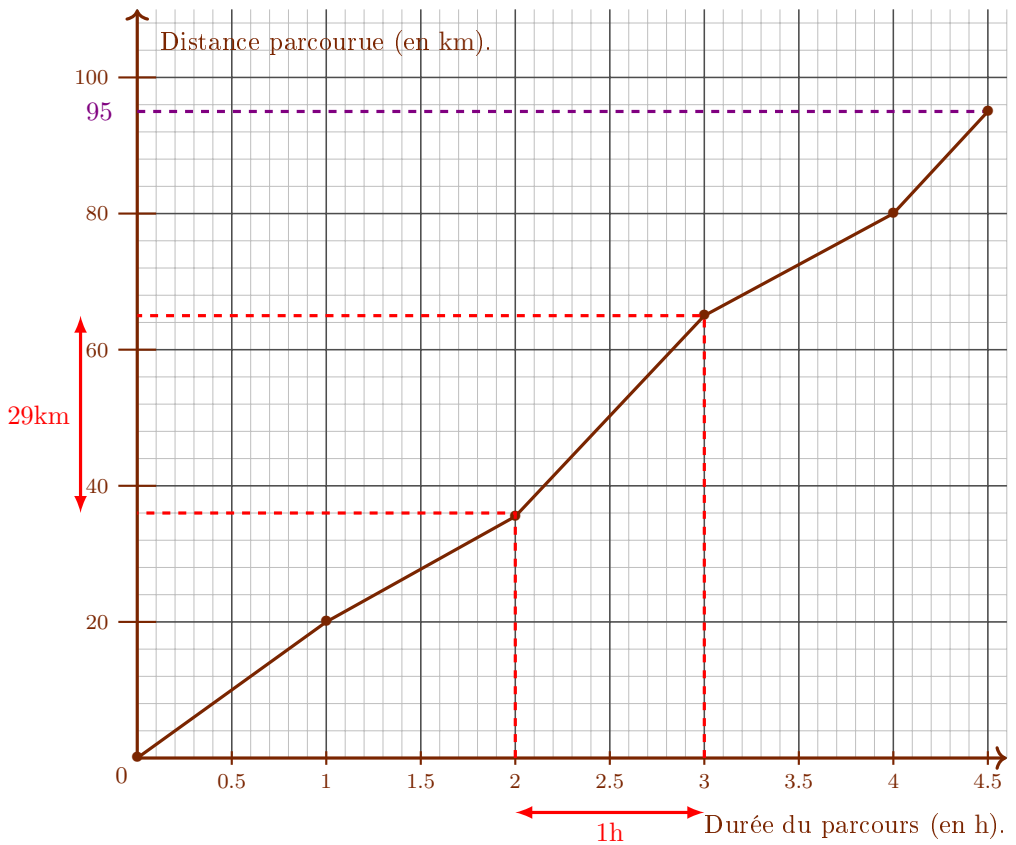
$$v_1 \approx 5,56 \text{ m/s.}$$

- (d) $1 \text{ h } 45 = 1,75 \text{ h.}$



En 1 h 45 il a parcouru 32 km.

(e) Déterminons la vitesse, v_2 , pendant la troisième heure.



$$v_2 = \frac{29 \text{ km}}{1 \text{ km}}$$

$$v_2 = 29 \text{ km/h.}$$

(f) Comparons v_1 et v_2 .

Calculons le taux d'évolution entre ces deux vitesses exprimé en pourcentage :

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{29 - 20}{20} \times 100 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Autrement dit $t > 40$.

Sa vitesse moyenne lors de la troisième heure est supérieure de plus de 40 % à sa vitesse moyenne lors de la première heure.

- (g) Déterminons la vitesse moyenne v_3 durant la sortie.

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{95 \text{ km}}{4,5 \text{ h}} \\ &= \frac{19}{9} \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \approx 2,11 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

donc

$$v_3 \approx 2,11 \text{ km/h.}$$

Exercice 3.

1. • Puisque la figure à quatre côtés

l'affirmation « c'est un quadrilatère » est vraie.

- Puisque le quadrilatère à quatre côtés de même longueur, 100 pas

l'affirmation « c'est un losange » est vraie.

- Puisque le quadrilatère a trois angles droits (de 90°)

l'affirmation « c'est un rectangle » est vraie.

- Puisque le quadrilatère est à la fois un losange et un rectangle

l'affirmation « c'est un carré » est vraie.

2. (a) Déterminons RS de sorte que les cotés mesurent 7 cm.

Puisque la longueur des côtés du pentagone obtenu est proportionnelle à RS nous avons le tableau de proportionnalité suivant, où toutes les longueurs sont exprimées en centimètres :

RS	4	x
Côté	$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	7

À l'aide d'un produit en croix :

$$x = \frac{4 \times 7}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$\approx 11,909 \text{ en tronquant.}$$

Pour que le côté mesure 7 cm il faut que $RS \approx 11,9$ cm.

- (b) Tracer un segment $[RS]$.

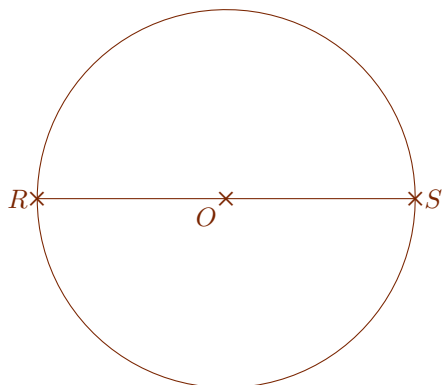
Avec $RS = 12$ cm.

$R \times \text{-----} \times S$

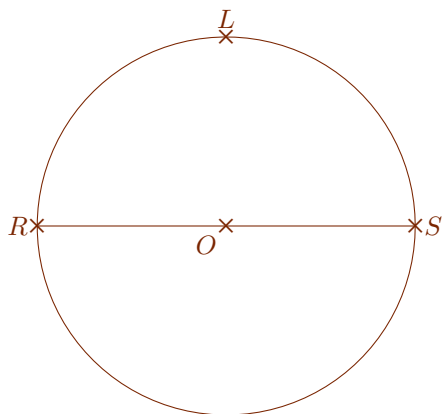
Placer le point O au milieu du segment $[RS]$.

$R \times \text{-----} \underset{O}{\times} \text{-----} \times S$

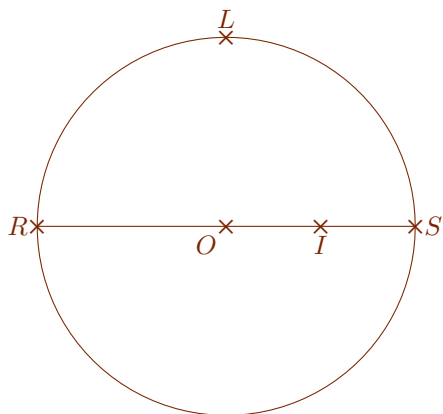
Tracer le cercle de diamètre $[RS]$.



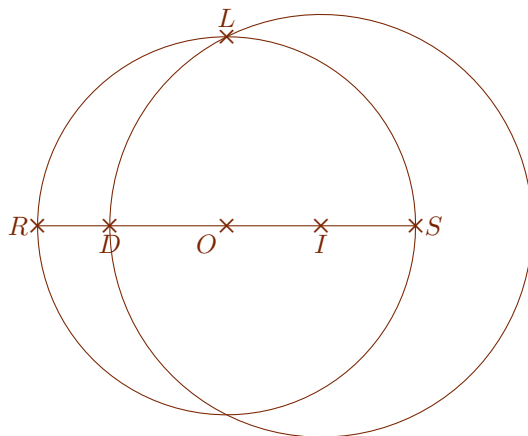
Soit L un point de ce cercle tel que $(OL) \perp (RS)$.



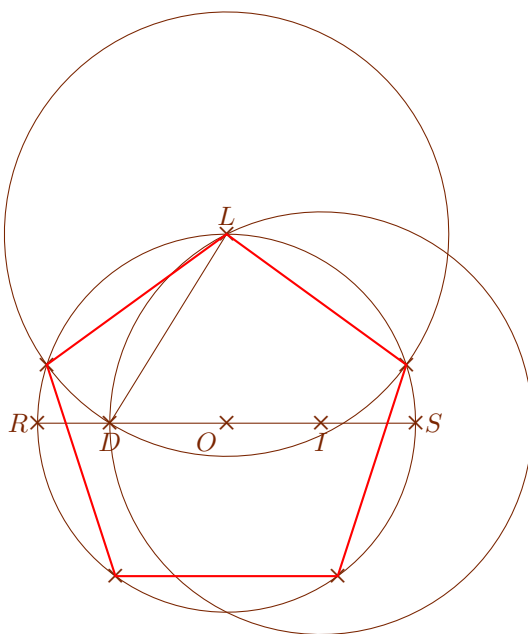
Placer le point I au milieu du segment $[OS]$.



Le cercle de centre I et de rayon IL coupe le segment $[RO]$ en D .



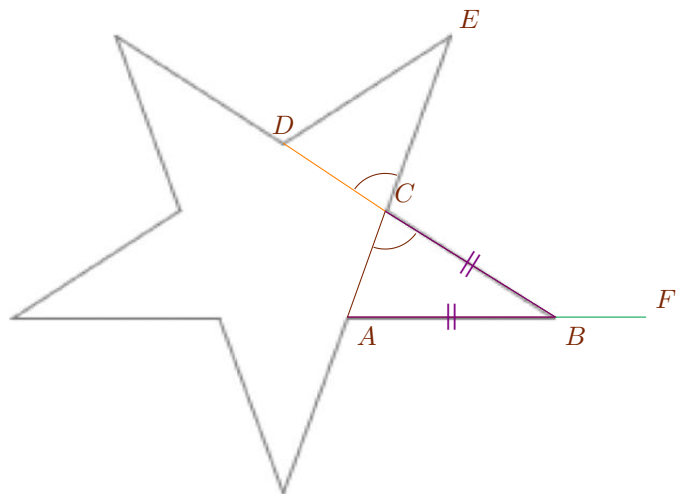
LD est la longueur des côtés du pentagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre $[RS]$, placer les 5 sommets du pentagone sur le cercle.



(c)

(d) L'étoile est formée de 10 segments faisant tous 80 pas donc

L'étoile a un périmètre de 800 pas.



(e)

D'après le programme fourni $\widehat{DCE} = 72^\circ$ donc $\widehat{ACB} = 72^\circ$.

Comme ABC est isocèle en B , $\widehat{CAB} = 72^\circ$.

Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle égale 180° ,
 $\widehat{ABC} = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$.

Finalement $\widehat{FBC} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

avancer de 160 pas

tourner ↻ de 144 degrés

avancer de 160

tourner ↻ de 72 degrés

Exercice 4.

1. Les deux nombres étant distincts il peut prendre le nombre de jeton égale soit au plus grand des deux nombres obtenus, c'est-à-dire 3, soit le double du plus petit donc $2 \times 2 = 4$, soit encore passer son tour et n'obtenir aucun jeton.

L'ensemble des cas possibles est $\{3; 4; 0\}$.

2. En distinguant les deux dés, un tirage est assimilable à un couple de nombre entiers compris (au sens large) entre 1 et 6. Par exemple $(1,3)$ représente l'événement obtenir 1 avec le premier dé et 3 avec le second.

Intuitivement :

L'ensemble des tirages permettant d'obtenir 3 est $\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)\}$.

Pour s'en convaincre nous pouvons représenter dans un tableau double entrée le nombre de jetons obtenus en fonction des résultats des dés (sans tenir compte de la possibilité de passer son tour qui rajouterai un zéro dans chaque case du tableau).

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix}$
2	2	2	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}$
3	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 6 \end{smallmatrix}$
4	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 8 \end{smallmatrix}$
5	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8 \\ 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 10 \end{smallmatrix}$
6	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 6 \end{smallmatrix}$

3. (a) Notons A : « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Les deux dés étant bien équilibrés il semble naturel de modéliser la situation en choisissant pour univers l'ensemble des 36 couples de nombres que donnent les dés et pour loi de probabilité la loi uniforme (équiprobabilité).

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et $A = \{(2,3),(3,2)\}$ est réalisé par deux issues donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}.$$

- (b) Notons B : « au moins un des nombres obtenus est 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et

$$B = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(2,6),(3,5),(3,4),(3,2),(3,1)\}$$

est réalisé par 11 issues donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}.$$

- (c) Notons C : « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et, d'après ce tableau

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix}$
2	2	2	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}$
3	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$	3	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \end{smallmatrix}$	6
4	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ 8 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 8 \end{smallmatrix}$
5	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 5 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 8 \\ 5 \end{smallmatrix}$	5	$\begin{smallmatrix} 6 \\ 10 \end{smallmatrix}$
6	$\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}$	6	$\begin{smallmatrix} 8 \\ 6 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 10 \\ 6 \end{smallmatrix}$	6

C est réalisé par 13 issues donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{13}{36}.$$

4. Il n'y a aucun lien entre deux lancers de dé. Les lancers sont indépendants. Ces sont des expériences aléatoires indépendantes et par conséquent

la probabilité reste identique.

5. Il peut prendre $2 \times 1 = 2$ jetons ou 4 jetons.

Il ne peut pas prendre 4 jetons puisqu'il a déjà 12 jetons et qu'il dépasserait l'objectif de 15 jetons.

S'il prend les 2 jetons il en aura maintenant 14 et il devra n'en obtenir qu'un seul ensuite. Or la probabilité d'obtenir un seul jeton est de $\frac{1}{36}$ et celle d'obtenir directement 3 jetons est bien plus élevée.

Il est préférable qu'il passe son tour en espérant obtenir un 3 au tour suivant.

Exercice 5.

257 admet une écriture décimale dont la partie décimale ne comporte que des 0. On peut aussi bien argumenté que 257 peut s'écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 puisque : $257 = \frac{257}{10^0}$.

L'affirmation 1 est vraie.

La somme (ou différence) de deux nombres rationnels est un nombre rationnel. Nous pouvons le vérifier dans ce cas particulier.

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} - 8 &= \frac{7}{3} - \frac{8}{1} \\ &= \frac{7}{3} - \frac{8 \times 3}{1 \times 3} \\ &= \frac{7}{3} - \frac{24}{3} \\ &= \frac{7 - 24}{3} \\ &= \frac{-17}{3} \end{aligned}$$

Nous avons obtenu un quotient d'entiers donc il s'agit bien d'une fraction ;

L'affirmation 2 est vraie.

Quelques essais permettent de conjecturer que le résultat est vrai. Démontrons-le.

Démontrons que l'affirmation est vraie.

Soit n un nombre entier. Les nombres entiers qui le suivent sont $n + 1$ et $n + 2$.
Considérons leur somme :

$$\begin{aligned} n + (n + 1) + (n + 2) &= n + n + 1 + n + 2 \\ &= 3n + 3 \times 1 \\ &= 3n + 3 \times 1 \\ &= 3(n + 1) \end{aligned}$$

On a montré que, pour tout entier n , $n + (n + 1) + (n + 2)$ est un multiple de 3.

L'affirmation 3 est vraie.

Résolvons l'équation.

$$(x + 1)(x - 2) = (x - 3)(x + 4)$$

équivalent successivement à :

$$\begin{aligned} (x + 1)(x - 2) - (x - 3)(x + 4) &= 0x \times x + x \times (-2) + 1 \times x + 1 \times (-2) - (x \times x + \\ x^2 - 2x + x - 2 - (x^2 + 4x - 3x - 12) &= 0 \\ x^2 - x - 1 - (x^2 + x - 12) &= 0 \\ x^2 - x - 1 - x^2 - x + 12 &= 0 \\ -2x + 11 &= 0 \\ -2x &= -11 \\ x &= \frac{-11}{-2} \\ x &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Puisque $\frac{11}{2}$ est une forme irréductible nous pouvons conclure

L'affirmation 4 est fausse.

Calculons le taux d'évolution global correspondant aux deux augmentations.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 15 % est

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{15}{100} &= 1,15 \end{aligned}$$

De même pour une hausse de 10 % le coefficient multiplicateur est $CM_2 = 1,1$.

Donc le coefficient multiplicateur global des deux hausses successives est

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 1,15 \times 1,1 \\ &= 1,265 \end{aligned}$$

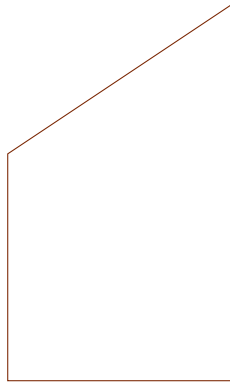
Donc le taux d'évolution global en pourcentage est de

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (1,265 - 1) \\ &= 26,5 \end{aligned}$$

Or les taux d'évolution correspondant à une augmentation d'un quart est 25 % donc

l'affirmation 5 est fausse.

Donnons un contre-exemple



L'affirmation 6 est fausse.

L'un des angles d'un triangle rectangle a forcément une mesure de 90° .
Tous les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60° .

L'affirmation 7 est fausse.

$f(-11) = -3 \times (-11) + 1 = 34 \neq 4$ donc -11 n'est pas un antécédente de 4 par f
et donc

l'affirmation 8 est fausse.

Déterminons si ABC est rectangle.

Le plus grand côté de ABC est $[AC]$ donc s'il est rectangle ce ne peut être qu'en B .

Le problème se ramène à déterminer si ABC est rectangle en B .

D'une part $AB^2 + BC^2 = 35^2 + 12^2 = 1329$ et d'autre part $39^2 = 1521$ donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore ABC n'est pas rectangle en B .

Et donc il n'est pas rectangle (tout court).

L'affirmation 9 est fausse.

Il s'agit d'un résultat classique : si les dimensions d'une surface sont multipliées par 3 alors son aire est multipliée par $3^2 = 9$. C'est un résultat évident sur un carré un peu moins sur un triangle.

Toujours est-il que l'aire n'est pas multipliée par 3.

L'affirmation 10 est fausse.