Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Exercice 1.

1. Calculons CD.

   Toutes les longueurs sont exprimées en mètre donc nous pouvons ne pas nous préoccuper des unités.

   BCD est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,

   $$BD^2 + BC^2 = CD^2.$$

   Or $BD = FE - AB = 80 - 50 = 30$ donc

   $$\begin{aligned} CD^2 &= 30^2 + 40^2 \\ &= 2500 \end{aligned}$$

   Puisque CD est une longueur, c'est un nombre positif et donc :

   $$\begin{aligned} CD &= \sqrt{2500} \\ &= 50 \end{aligned}$$

   $$\boxed{CD = 50 \text{ m.}}$$

2. Calculons la longueur L du parcours.

   $$\begin{aligned} L &= AB + BC + \overset{\frown}{CD} + DE + EF + FA \\ &= 50 + 40 + \overset{\frown}{CD} + 30 + 80 + 30 \end{aligned}$$

   Or $\overset{\frown}{CD}$ est un demi-cercle de diamètre $[CD]$ donc sa longueur est (la moitié du périmètre du cercle) :

   $$\begin{aligned} \overset{\frown}{CD} &= \frac{1}{2} \times 2\pi \frac{CD}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi \frac{50}{2} \\ &\approx 78{,}539 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} L &\approx 50 + 40 + 78{,}54 + 30 + 80 + 30 \\ &\approx 308{,}54 \end{aligned}$$

En arrondissant à l'unité

$$\boxed{L \approx 309 \text{ m.}}$$

3. Calculons toutes les longueurs mises à l'échelle.

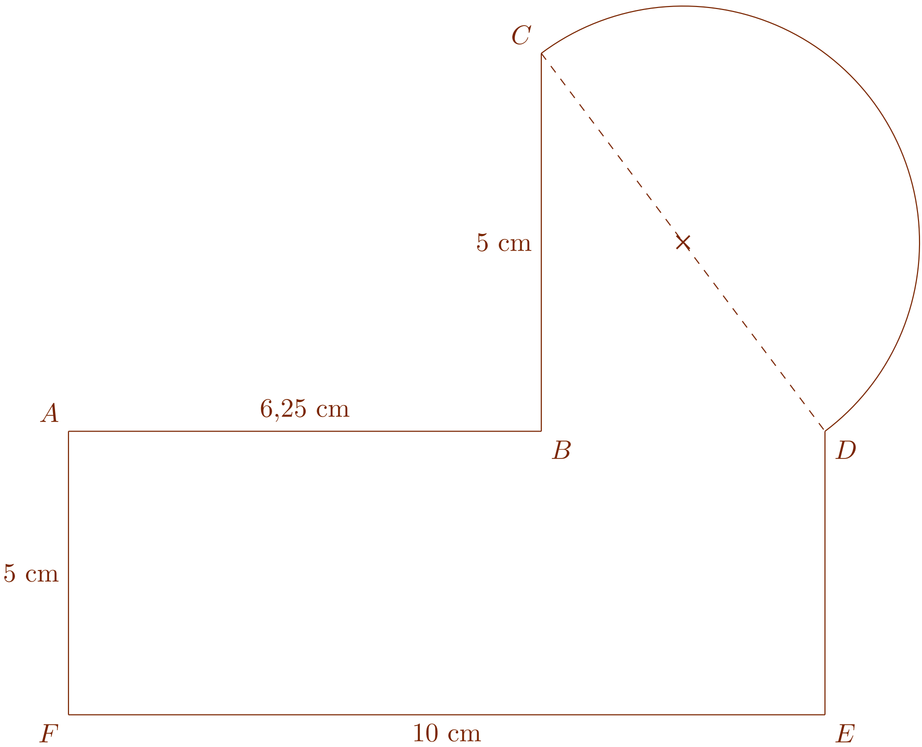
   Notons $A'B'$ la longueur AB mise à l'échelle.

$$\begin{aligned} A'B' &= \frac{1}{800} \times 50 \text{ m} \\ &= 50 \times \times 100 \text{ cm} \\ &= 50 \times \frac{1}{8} \text{ cm} \\ &= 6{,}25 \text{ cm} \end{aligned}$$

   Nous remarquons qu'il suffit de diviser la longueur réelle exprimée en mètre par 8 pour obtenir la longueur mise à l'échelle en centimètre.
   En procédant de même :

Longueur réelle (en m)	50	40	80	30
Longueur à l'échelle en centimètre.	6,25	5	10	3,75

   Nous en déduisons le dessin à l'échelle (aucune difficulté pour peu qu'on ait équerre et compas) :



4. Calculons la vitesse moyenne v_K.

$$\begin{aligned} v_K &= \frac{309 \text{ m}}{3 \text{ min}} \\ &= \frac{309 \text{ m}}{3\times 60 \text{ s}} \\ &= \frac{309}{3\times 60} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 1{,}716 \text{ m/s en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_K \approx 1{,}72 \text{ m/s.}}$$

$$\begin{aligned} v_K &= \frac{309 \text{ m}}{3 \text{ min}} \\ &= \frac{309 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{3 \times \frac{1}{60} \text{ h}} \\ &= \frac{309 \times \frac{1}{1000}}{3 \times \frac{1}{60}} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 6{,}18 \text{ km/h} \end{aligned}$$

$v_K \approx 6{,}2$ km/h.

5. (a) Calculons le nombre T_S de tours de Sophia en 18 minutes.

Nous allons exprimer toutes les grandeurs en mètre et minute.
La distance parcourue par Sophia en 18 minutes est

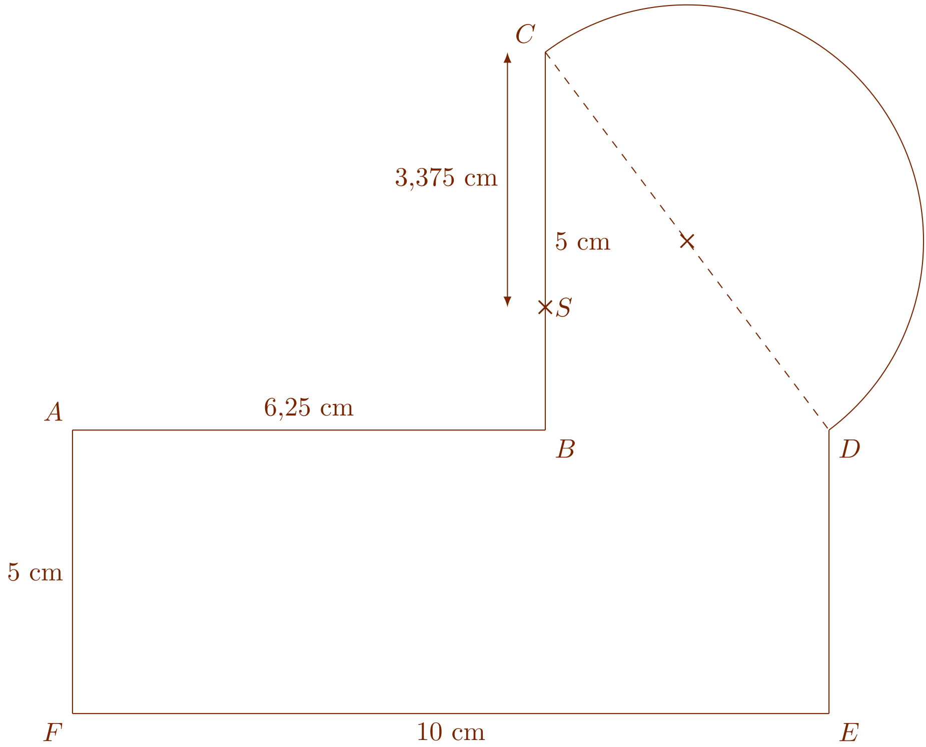
$$\begin{aligned} d_S &= 7 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 18 \text{ min} \\ &= 7 \frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ min}} \times 18 \text{ min} \\ &= \frac{7 \times 1000 \times 18}{60} \frac{\text{m} \cdot \text{min}}{\text{min}} \\ &= 2100 \text{ m} \end{aligned}$$

or chaque toue a une longueur de 309 m donc

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{2100 \text{ m}}{309 \text{ m}} \\ &= \frac{2100}{309} \\ &\approx 6{,}796 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

Sophia fera 6 tours complets.

(b) En procédant à une division euclidienne : $2100 = 6 \times 309 + 246$.
Il lui restait 309 m − 246 m = 63 m pour finir un tour. Sur le trajet $[CB]$ elle avait déjà parcouru 50 m + 40 m − 63 m = 27 m.
Par conséquent S est à $\frac{27}{8}$ cm = 3,375 cm de C sur le trajet $[CB]$.



6. (a) Calculons le nombre moyen $\overline{x}$ de tours.

La série étant regroupée par modalité (les valeurs différentes et les effectifs correspondant) nous allons utiliser la formule de la moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} \\ &= \frac{52 \times 2 + 52 \times 3 + \cdots + 13 \times 8}{52 + 52 + \cdots + 13}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} = 4{,}36 \text{ tours.}}$$

(b) Calculons l'étendue e.

$$\begin{aligned} e &= \max - \min \\ &= 8 - 2 \end{aligned}$$

$e = 6$ tours.

(c) Déterminons la médiane Me.

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13
E.C.C.	52	104	182	247	286	312	325

* Ordonner la série. La série des nombres de tours est déjà rangée dans l'ordre croissant.
* Position de Me. $\frac{N}{2} = \frac{325}{2} = 162{,}5$, la série étant impaire Me est la 163-ième valeur de la série ordonnée.
* Lecture de la valeur de Me. D'après les effectifs cumulés croissants,

$Me = 4$ tours.

(d) Interprétation de la médiane dans la version verre à moitié vide.

50 % des élèves ont fait moins de 4 tours complets.

Déterminons Q_1.

* La série est ordonnée (dans le tableau).
* $\frac{N}{4} = \frac{325}{4} = 81{,}25$ donc Q_1 est la 82i-ième valeur de la série ordonnée.
* D'après les E.C.C.

$Q_1 = 3$ tours.

Déterminons Q_3.

* La série est ordonnée (dans le tableau).
* $\frac{3N}{4} = \frac{325}{4} = 243{,}75$ donc Q_3 est la 244i-ième valeur de la série ordonnée.
* D'après les E.C.C.

$$Q_3 = 5 \text{ tours.}$$

(e) En première approximation, en utilisant la médiane, nous pourrions dire qu'environ 50 % des élèves ont fait au moins 4 tours complets.

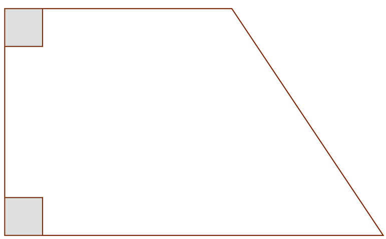
Calculons le pourcentage p d'élèves ayant fait au moins 4 tours.

$$\begin{aligned} p &= \frac{78+65+39+26+13}{325} \times 100 \\ &\approx 64{,}923 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

64,92 % des élèves ont fait au moins 4 tours complets.

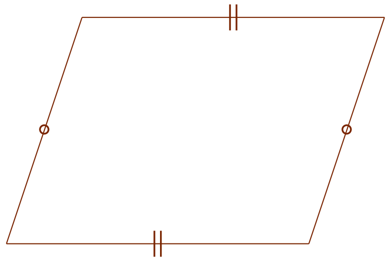
Exercice 2.

1. Les trapèzes rectangles ne sont pas nécessairement des rectangles :

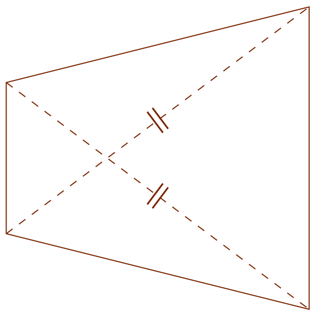


Les quadrilatères possédant deux angles droits ne sont pas tous des rectangles.

2. (a) Tous les parallélogrammes ont des côtés opposés de même longueurs deux à deux cependant tous les parallélogrammes ne sont pas des rectangles.



(b) Voici un quadrilatère dont les diagonales ont même longueur.



Et pourtant cette figure n'est clairement pas un rectangle.

3. Je ne pense pas qu'une justification soit attendue pour une telle question. Si c'était le cas il faudrait établir que deux côtés consécutifs ont même longueur en utilisant le théorème de Pythagore.

   Un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est un carré.

4. Il s'agit visiblement d'un quadrilatère non croisé dont les côtés ont tous la même longueur donc

   $ABCD$ est un losange.

Exercice 3.

	réponse	a	b	c	d
demander donner un nombre et attendre	2				
mettre a à réponse	2	2			
mettre b à 2 * a + 5	2	2	9		
mettre c à 5 * a - 4	2	2	9	6	
mettre d à b * c	2	2	9	6	54

	réponse	a	b	c	d
demander donner un nombre et attendre	1,15				
mettre a à réponse	1,15	1,15			
mettre b à 2 * a + 5	1,15	1,15	7,3		
mettre c à 5 * a - 4	1,15	1,15	7,3	1,75	
mettre d à b * c	1,15	1,15	7,3	1,75	12,775

Si le nombre saisi est 1,15 le programme renvoie 12,775.

3. En reprenant le tableau d'état des variables, si le nombre saisi par l'utilisateur est x le programme retourne : $(2x+5)(5x-4)=0$.
Cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 2x+5&=0 \quad\text{ou}\quad 5x-4=0\\ 2x+5-5&=0-5 \quad\text{ou}\quad 5x-4+4=0+4\\ 2x&=-5 \quad\text{ou}\quad 5x=4\\ \frac{2x}{2}&=\frac{-5}{2} \quad\text{ou}\quad \frac{5x}{5}=\frac{4}{5}\\ x&=-\frac{5}{2} \quad\text{ou}\quad \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Le programme retourne le nombre 0 en choisissant $-\frac{5}{2}$ ou $\frac{4}{5}$.

4. (a)

Choisir un nombre.	3
Prendre son double.	6
Ajouter 5.	11
Calculer le carré du résultat.	121

Si l'utilisateur choisi 3 le programme renvoie 121.

(b)

Choisir un nombre.	$\frac{3}{4}$
Prendre son double.	$\frac{3}{2}$
Ajouter 5.	$\frac{13}{2}$
Calculer le carré du résultat.	$\frac{169}{4}$

Si l'utilisateur choisi $\frac{3}{4}$ le programme renvoie $\frac{169}{4}$.

5. (a) La cellule `D2` permet de retrouver le résultat 4.(a).

(b) En cellule `A2` :

$$= (2 * \mathtt{A1} + 5) \wedge 2$$

6. (a) Déterminons pour quel nombre de départ x le programme renvoie 0.

Choisir un nombre.	x
Prendre son double.	$2x$
Ajouter 5.	$2x + 5$
Calculer le carré du résultat.	$(2x + 5)^2$

Ainsi nous voulons que :

$$(2x + 5)^2 = 0.$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}2x + 5 &= 0\\2x + 5 - 5 &= 0 - 5\\2x &= -5\\\frac{2x}{2} &= \frac{-5}{2}\\x &= -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Pour que le programme B renvoie 0 il faut choisir $-\frac{5}{2}$ comme nombre de départ.

(b) $\frac{-5}{2}$ est une fraction, c'est-à-dire le quotient d'un entier par un autre entier, donc

$-\frac{5}{2}$ est un nombre rationnel.

(c) Justifions que $-\frac{5}{2}$ est décimal.

Il y a de nombreuses approches : il admet une écriture décimale dont la partie décimale est finie, il s'écrit sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, il s'écrit sous forme d'une fraction dont le dénominateur est un produit de puissances de 2 et de 5.

$-\frac{5}{2} = -2{,}5$ puisqu'il admet une écriture décimale dont la partie décimale est finie

$-\frac{5}{2}$ est un nombre décimal.

7. La question est ambiguë : faut-il que le nombre de départ soit le même pour le programme A et le programme B ? Nous allons supposer que oui. Et la question revient à :

   Résolvons l'équation $(2x+5)(5x-4) = (2x+5)^2$.

   On pourrait être tenté de simplifier par $2x+5$ mais ce serait exclue une solution au problème. Nous allons ici nous ramener à une équation produit nul.
   L'équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)^2 &= (2x+5)^2-(2x+5)^2 = 0\\
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)^2 &= 0\\
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)\times(2x+5) &= 0\\
(2x+5)\left[(5x-4)-(2x+5)\right] &= 0\\
(2x+5)\left[5x-4-2x-5\right] &= 0\\
(2x+5)(3x-9) &= 0\\
2x+5 = 0 \quad &\text{ou} \quad 3x-9 = 0\\
2x+5-5 = 0-5 \quad &\text{ou} \quad 3x-9+9 = 0+9\\
2x = -5 \quad &\text{ou} \quad 3x = 9\\
\frac{2x}{2} = \frac{-5}{2} \quad &\text{ou} \quad \frac{3x}{3} = \frac{9}{3}\\
x = -\frac{5}{2} \quad &\text{ou} \quad x = 3
\end{aligned}$$

Les programmes renvoient les mêmes nombres si les nombres de départ sont $-\frac{5}{2}$ ou 3.

Exercice 4.

1. (a) Notons T_1 : « elle touche un bateau au premier tir ».

   Calculons $\mathbb{P}(T_1)$.

L'univers est formé des $8 \times 8 = 64$ cases de la grille. Les choix d'une telle case sont supposés équiprobables. T_1 est réalisé par 12 issues, à savoir les cases grisées : $(A,4)$, $(B,4)$, ...
Donc

$$\mathbb{P}(T_1) = \frac{12}{64}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T_1) = \tfrac{3}{16}.}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(\overline{T_1})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{T_1}) &= 1 - \mathbb{P}(T_1)\\ &= 1 - \frac{3}{16}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{T_1}) = \tfrac{13}{16}.}$$

(c) Déterminons le nombre n_c de cases formant le bateau recherché.

Il y a équiprobabilité entre les cases, il y a 64 cases au total, est l'événement T_2 : « le bateau recherché est touché est réalisé par n_c cases donc

$$\mathbb{P}(T_2) = \frac{n_c}{64}$$

Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{16}$ donc

$$\frac{1}{16} = \frac{n_c}{64}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}\times 64 &= \frac{n_c}{64}\times 64\\ 4 &= n_c\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le bateau recherché est formé de 4 cases.}}$$

(d) Notons T_3 : « toucher un bateau en tirant dans la colonne B ».

Calculons $\mathbb{P}_2(T_3)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 8 cases de la colonne B qui sont toutes équiprobables et l'événement T_3 regroupe les 4 cases grisées de la colonne B donc

$$\mathbb{P}_2(T_3) = \frac{4}{8}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_2(T_3) = \tfrac{1}{2}.}$$

2. Notons $T4$: « couler le bateau au coup suivant ».

Calculons $\mathbb{P}_3(T_4)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 3 cases qui entourent la cases E1 et qui permettent de placer un bateau et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_4 regroupe la seule case grisée adjacente à E1 donc

$$\boxed{\mathbb{P}_3(T_4) = \tfrac{1}{3}.}$$

3. L'utilisation du présent dans l'énoncé des questions 3 et 4 crée une ambiguïté. Nous admettrons que la question 2 n'a pas eu lieu.

Notons T_5 : « toucher un bateau après deux coups dans l'eau suivant ».

Calculons $\mathbb{P}_4(T_5)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des $64 - 2 = 62$ cases qui n'ont pas été visées et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_5 regroupe les 12 cases grisées donc

$$\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{12}{62}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_4(T_5) = \tfrac{6}{31}.}$$

Exercice 5.

1. Convertissons des Fahrenheit vers les Celsius.

   95°F exprimés en degrés Celsius donnent

$$\begin{aligned} C &= (95-32)\frac{5}{9} \\ &= 35 \end{aligned}$$

> 95°F = 35°C.

2.
3. Déterminons F de sorte que $C = F$.

   On veut

$$\begin{aligned} F &= (F-32)\times\frac{5}{9} \\ \frac{9}{5}F &= F-32 \\ \frac{9}{5}F - F &= -32 \\ \frac{4}{5}F &= -32 \\ F &= -32\times\frac{5}{4} \\ F &= -40 \end{aligned}$$

> Les mesures en Celsius et Fahrenheit sont égales dans un seul cas : −40°C = −40°F.

Exercice 6.

1. Effectuons 6×8.
   — Avec le pied et la main gauches, on lève les 5 orteils et 1 doigt, représentant ainsi le 6.

— Avec le pied et la main droites, on lève les 5 orteils et 3 doigts, représentant ainsi le 8.
La somme du nombre de doigts levés nous indique un nombre de dizaines (ici $1 + 3 = 4$), le produit des doigts baissés nous indique un nombre d'unités (ici $4 \times 2 = 8$.
Donc

$$\boxed{6 \times 8 = 48.}$$

2. (a) 5 − g est le nombre de doigts baissés de la main gauche et 5 − d celui de la main droite.

(b) Démontrons l'égalité proposée.

D'une part :

$$\begin{aligned}(5+g)(5+d) &= 5\times 5 + 5\times d + g\times 5 + g\times d\\ &= 25 + 5d + 5g + gd\\ &= gd + 5d + 5g + 25\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}&\ 10(g+d) + (5-g)(5-d)\\ &= 10\times d + 10\times g + 5\times 5 + 5\times(-d) + (-g)\times 5 + (-g)\times(-d)\\ &= 10d + 10g + 25 - 5d - 5g + gd\\ &= gd + 5d + 5g + 25\end{aligned}$$

donc, par transitivité,

$$\boxed{(5+g)(5+d) = 10(g+d) + (5-g)(5-d).}$$

(c) La règle de calcul est donc valable.