Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

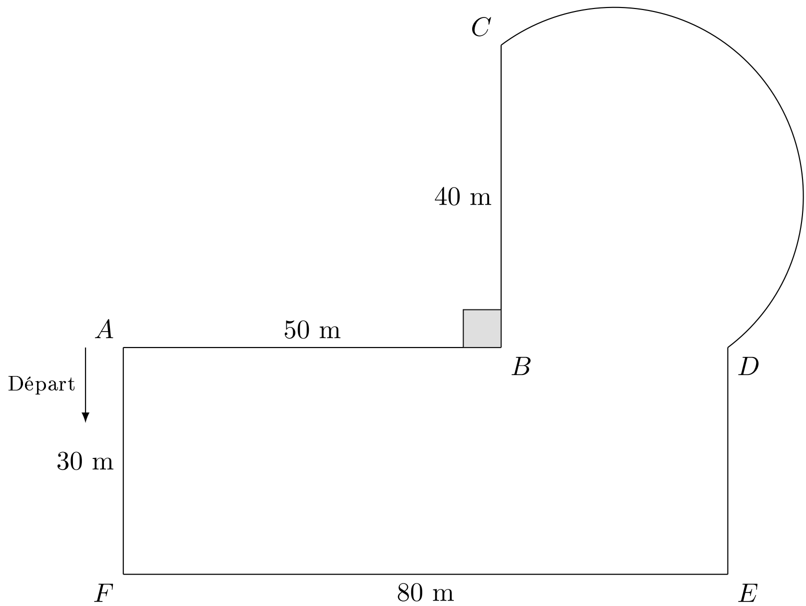
Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

Exercice 1.

Une directrice d'école primaire souhaite inscrire les élèves de l'école à une course solidaire d'action contre la faim afin de les sensibiliser à la sous-nutrition dans le monde.
Il s'agit pour chaque élève de faire le plus de tours possible d'un parcours prédéfini. Pour chaque tour effectué, l'élève récolte une somme d'argent fixe qui sera versée à l'association caritative.

La directrice décide de faire courir les élèves dans la cour de l'école, le long d'un parcours schématisé ci-dessous. Une partie du parcours est constituée d'un demi-cercle de diamètre $[CD]$ et les longueurs sont données en mètre.



Les points A, B et D sont alignés et le quadrilatère $AFED$ est un rectangle. Les élèves partent du point A et se déplacent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On a : $AB = 50$ m ; $BC = 40$ m ; $EF = 80$ m et $FA = 30$ m.

1. Calculer la longueur du segment $[CD]$.

   Calculons CD.

   Toutes les longueurs sont exprimées en mètre donc nous pouvons ne pas nous préoccuper des unités.

   BCD est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,

   $$BD^2 + BC^2 = CD^2.$$

   Or $BD = FE - AB = 80 - 50 = 30$ donc

   $$\begin{aligned} CD^2 &= 30^2 + 40^2 \\ &= 2500 \end{aligned}$$

   Puisque CD est une longueur, c'est un nombre positif et donc :

   $$\begin{aligned} CD &= \sqrt{2500} \\ &= 50 \end{aligned}$$

   $$\boxed{CD = 50 \text{ m.}}$$

2. Montrer que la longueur du parcours, arrondie au mètre, est 309 m. On utilisera cette valeur dans la suite de l'exercice.

   Calculons la longueur L du parcours.

   $$\begin{aligned} L &= AB + BC + \overset{\frown}{CD} + DE + EF + FA \\ &= 50 + 40 + \overset{\frown}{CD} + 30 + 80 + 30 \end{aligned}$$

   Or $\overset{\frown}{CD}$ est un demi-cercle de diamètre $[CD]$ donc sa longueur est (la moitié du périmètre du cercle) :

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{CD} &= \frac{1}{2} \times 2\pi\frac{CD}{2}\\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi\frac{50}{2}\\ &\approx 78{,}539 \text{ en tronquant}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}L &\approx 50 + 40 + 78{,}54 + 30 + 80 + 30\\ &\approx 308{,}54\end{aligned}$$

En arrondissant à l'unité

$$\boxed{L \approx 309 \text{ m.}}$$

3. Construire un plan du parcours à l'échelle 1/800.

Calculons toutes les longueurs mises à l'échelle.

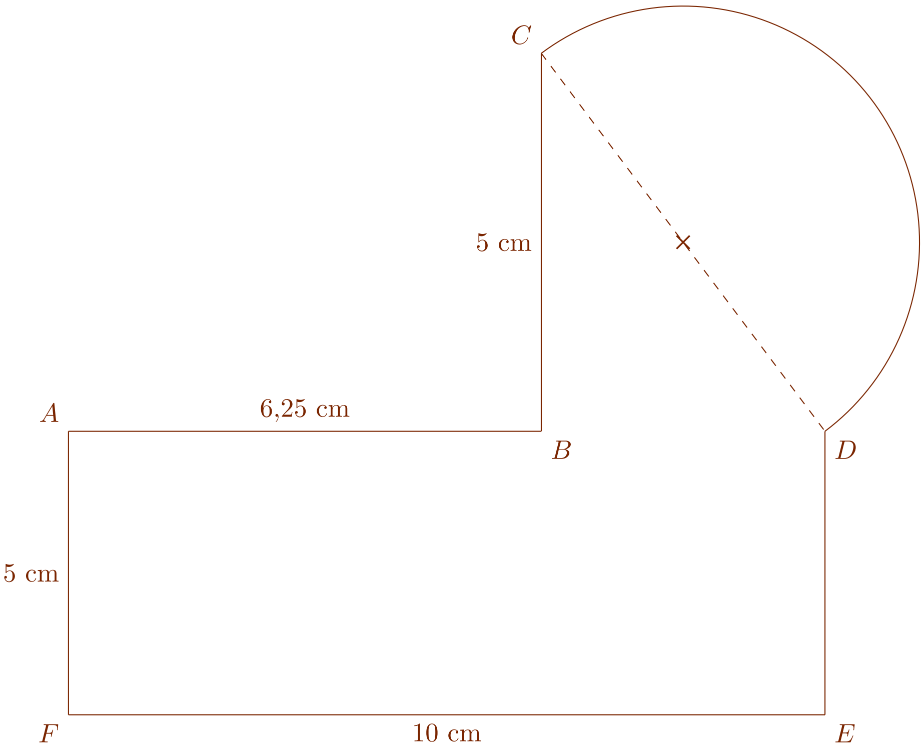
Notons $A'B'$ la longueur AB mise à l'échelle.

$$\begin{aligned}A'B' &= \frac{1}{800} \times 50 \text{ m}\\ &= 50 \times \times 100 \text{ cm}\\ &= 50 \times \frac{1}{8} \text{ cm}\\ &= 6{,}25 \text{ cm}\end{aligned}$$

Nous remarquons qu'il suffit de diviser la longueur réelle exprimée en mètre par 8 pour obtenir la longueur mise à l'échelle en centimètre.
En procédant de même :

Longueur réelle (en m)	50	40	80	30
Longueur à l'échelle en centimètre.	6,25	5	10	3,75

Nous en déduisons le dessin à l'échelle (aucune difficulté pour peu qu'on ait équerre et compas) :



4. Killian a effectué un tour complet en 3 minutes.
   À quelle vitesse moyenne Killian a-t-il couru ? On donnera le résultat en mètre par seconde arrondi au centième, puis en kilomètre par heure, arrondi au dixième.

   Calculons la vitesse moyenne v_K.

$$\begin{aligned} v_K &= \frac{309 \text{ m}}{3 \text{ min}} \\ &= \frac{309 \text{ m}}{3\times 60 \text{ s}} \\ &= \frac{309}{3\times 60} \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 1{,}716 \text{ m/s en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_K \approx 1{,}72 \text{ m/s.}}$$

$$\begin{aligned}
v_K &= \frac{309 \text{ m}}{3 \text{ min}} \\
&= \frac{309\times\frac{1}{1000} \text{ km}}{3\times\frac{1}{60} \text{ h}} \\
&= \frac{309 \times \frac{1}{1000}}{3 \times \frac{1}{60}} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&= 6{,}18 \text{ km/h}
\end{aligned}$$

$v_K \approx 6{,}2$ km/h.

5. On suppose que Sophia court à une vitesse constante de 7 km/h.

   (a) Combien de tours complets pourrait-elle effectuer à cette vitesse en 18 minutes ?

   Calculons le nombre T_S de tours de Sophia en 18 minutes.

   Nous allons exprimer toutes les grandeurs en mètre et minute.
   La distance parcourue par Sophia en 18 minutes est

$$\begin{aligned}
d_S &= 7 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 18 \text{ min} \\
&= 7 \ \frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ min}} \times 18 \text{ min} \\
&= \frac{7 \times 1000 \times 18}{60} \ \frac{\text{m} \cdot \text{min}}{\text{min}} \\
&= 2100 \text{ m}
\end{aligned}$$

   or chaque toue a une longueur de 309 m donc

$$\begin{aligned}
T_S &= \frac{2100 \text{ m}}{309 \text{ m}} \\
&= \frac{2100}{309} \\
&\approx 6{,}796 \text{ en tronquant}
\end{aligned}$$

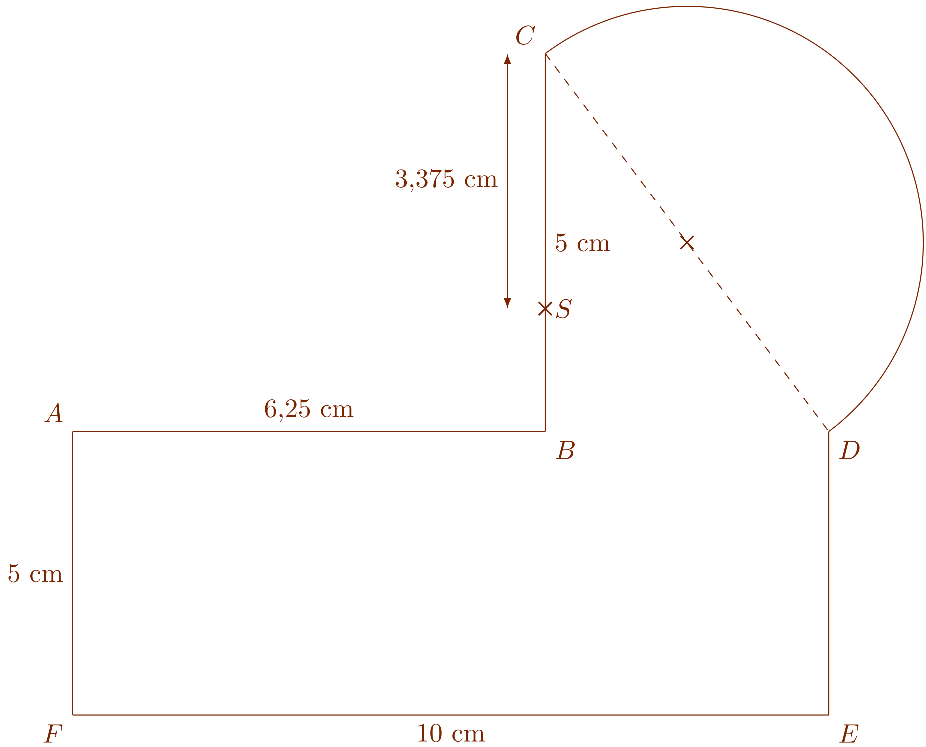
   Sophia fera 6 tours complets.

(b) On désigne par S le point du parcours où Sophia se trouve au bout de 18 minutes de course. Placer le point S sur le plan réalisé à la question 3.

En procédant à une division euclidienne : $2100 = 6 \times 309 + 246$.

Il lui restait 309 m − 246 m = 63 m pour finir un tour. Sur le trajet $[CB]$ elle avait déjà parcouru 50 m + 40 m − 63 m = 27 m.

Par conséquent S est à $\frac{27}{8}$ cm = 3,375 cm de C sur le trajet $[CB]$.



6. L'école est composée de 325 élèves. Le tableau ci-dessous indique le nombre de tours complets effectués par les élèves.

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13

(a) Quel est le nombre moyen de tours complets effectués ?

Calculons le nombre moyen $\overline{x}$ de tours.

La série étant regroupée par modalité (les valeurs différentes et les effectifs correspondant) nous allons utiliser la formule de la moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}\\ &= \frac{52\times 2 + 52\times 3 + \cdots + 13\times 8}{52 + 52 + \cdots + 13}\end{aligned}$$

$\overline{x} = 4{,}36$ tours.

(b) Quelle est l'étendue de cette série statistique ?

Calculons l'étendue e.

$$\begin{aligned}e &= \max - \min\\ &= 8 - 2\end{aligned}$$

$e = 6$ tours.

(c) Déterminer la médiane de cette série statistique.

Déterminons la médiane Me.

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13
E.C.C.	52	104	182	247	286	312	325

* Ordonner la série. La série des nombres de tours est déjà rangée dans l'ordre croissant.
* Position de Me. $\frac{N}{2} = \frac{325}{2} = 162{,}5$, la série étant impaire Me est la 163-ième valeur de la série ordonnée.
* Lecture de la valeur de Me. D'après les effectifs cumulés croissants,

$Me = 4$ tours.

(d) Interpréter le résultat de la question (c).

Interprétation de la médiane dans la version verre à moitié vide.

50 % des élèves ont fait moins de 4 tours complets.

Déterminer le premier et le troisième quartile de cette série.

Déterminons Q_1.

* La série est ordonnée (dans le tableau).
* $\frac{N}{4} = \frac{325}{4} = 81{,}25$ donc Q_1 est la 82i-ième valeur de la série ordonnée.
* D'après les E.C.C.

$Q_1 = 3$ tours.

Déterminons Q_3.

* La série est ordonnée (dans le tableau).
* $\frac{3N}{4} = \frac{325}{4} = 243{,}75$ donc Q_3 est la 244i-ième valeur de la série ordonnée.
* D'après les E.C.C.

$Q_3 = 5$ tours.

(e) Quel pourcentage d'élèves a réussi à faire au moins 4 tours ?

En première approximation, en utilisant la médiane, nous pourrions dire qu'environ 50 % des élèves ont fait au moins 4 tours complets.

Calculons le pourcentage p d'élèves ayant fait au moins 4 tours.

$$\begin{aligned} p &= \frac{78 + 65 + 39 + 26 + 13}{325} \times 100 \\ &\approx 64{,}923 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

64,92 % des élèves ont fait au moins 4 tours complets.

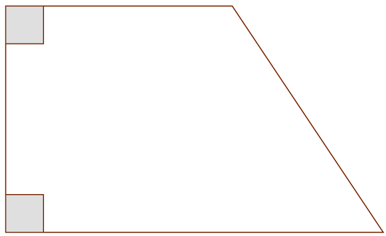
Exercice 2.

Un rectangle est défini dans le dictionnaire de la façon suivante :

« Un rectangle est un quadrilatère dont les quatre angles sont droits. »

1. Un quadrilatère qui possède deux angles droits est-il un rectangle ? Justifier.

   Les trapèzes rectangles ne sont pas nécessairement des rectangles :

   Les quadrilatères possédant deux angles droits ne sont pas tous des rectangles.

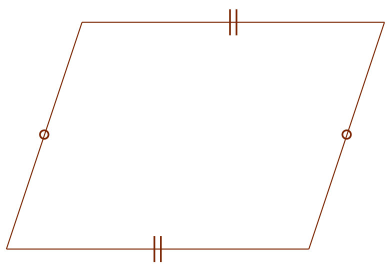
2. Dans une classe de CE2, une enseignante demande à ses élèves de compléter la phrase suivante : « Un rectangle est un quadrilatère dont ... ».
   Voici deux réponses proposées :

   Élève A : « Un rectangle est un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur ».

   Élève B : « Un rectangle est un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur ».

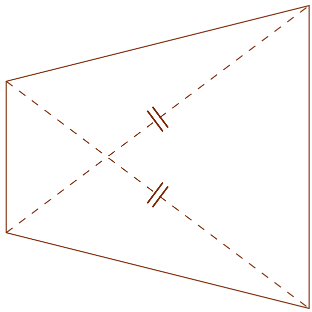
   (a) Préciser en quoi la réponse de l'élève A ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.

   Tous les parallélogrammes ont des côtés opposés de même longueurs deux à deux cependant tous les parallélogrammes ne sont pas des rectangles.

(b) Préciser en quoi la réponse de l'élève B ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.

Voici un quadrilatère dont les diagonales ont même longueur.



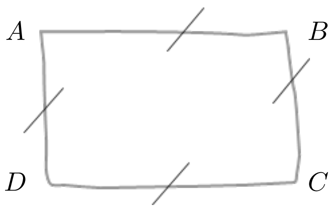
Et pourtant cette figure n'est clairement pas un rectangle.

3. Qu'elle est la nature d'un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires ?

Je ne pense pas qu'une justification soit attendue pour une telle question. Si c'était le cas il faudrait établir que deux côtés consécutifs ont même longueur en utilisant le théorème de Pythagore.

Un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est un carré.

4. En s'appuyant sur le codage du quadrilatère ci-après dessiné à main levée, préciser la nature du quadrilatère en question en justifiant la réponse.



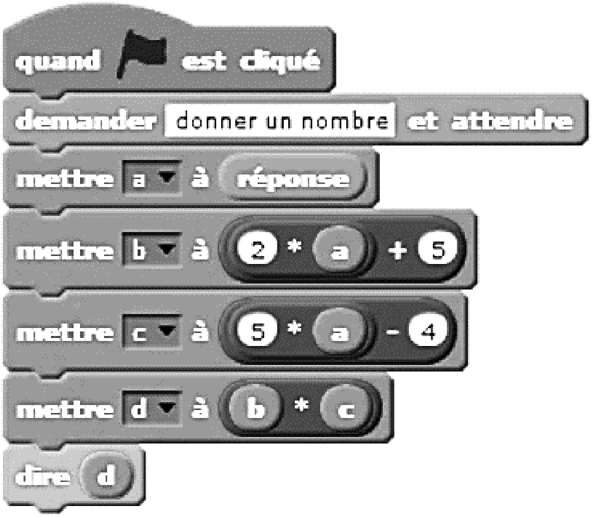
Il s'agit visiblement d'un quadrilatère non croisé dont les côtés ont tous la même longueur donc

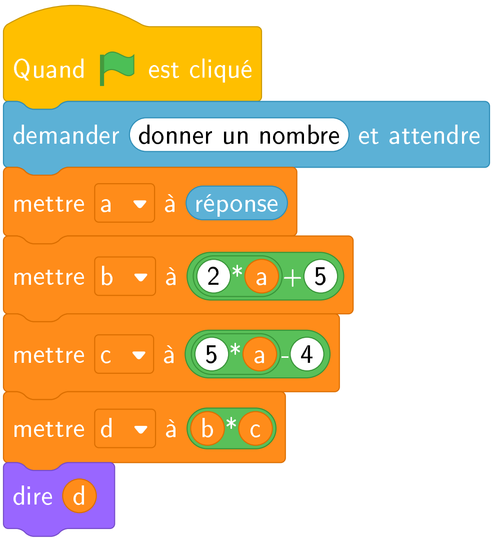
$ABCD$ est un losange.

Exercice 3.

Voici deux programmes de calcul :

Programme A.





Programme B.

Choisir un nombre. Prendre son double. Ajouter 5. Calculer le carré du résultat. Retourner le résultat trouvé.

1. Montrer que si l'utilisateur saisit le nombre 2, alors le programme A retourne le nombre 54.

	réponse	a	b	c	d
demander donner un nombre et attendre	2				
mettre a à réponse	2	2			
mettre b à 2 * a + 5	2	2	9		
mettre c à 5 * a - 4	2	2	9	6	
mettre d à b * c	2	2	9	6	54

2. Calculer le résultat obtenu avec le programme A si le nombre saisi par l'utilisateur est 1,15.

	réponse	a	b	c	d
demander donner un nombre et attendre	1,15				
mettre a à réponse	1,15	1,15			
mettre b à 2 * a + 5	1,15	1,15	7,3		
mettre c à 5 * a - 4	1,15	1,15	7,3	1,75	
mettre d à b * c	1,15	1,15	7,3	1,75	12,775

Si le nombre saisi est 1,15 le programme renvoie 12,775.

3. Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le nombre 0 ?

   En reprenant le tableau d'état des variables, si le nombre saisi par l'utilisateur est x le programme retourne : $(2x+5)(5x-4)=0$.
   Cette équation équivaut successivement à

$$\begin{array}{rcl}
2x+5=0 & \text{ou} & 5x-4=0 \\
2x+5-5=0-5 & \text{ou} & 5x-4+4=0+4 \\
2x=-5 & \text{ou} & 5x=4 \\
\dfrac{2x}{2}=\dfrac{-5}{2} & \text{ou} & \dfrac{5x}{5}=\dfrac{4}{5} \\
x=-\dfrac{5}{2} & \text{ou} & \dfrac{4}{5}
\end{array}$$

   Le programme retourne le nombre 0 en choisissant $-\frac{5}{2}$ ou $\frac{4}{5}$.

4. (a) Si l'utilisateur saisit le nombre 3, quel résultat le programme B retourne-t-il ?

Choisir un nombre.	3
Prendre son double.	6
Ajouter 5.	11
Calculer le carré du résultat.	121

   Si l'utilisateur choisi 3 le programme renvoie 121.

   (b) Si l'utilisateur saisit le nombre $\frac{3}{4}$, quel résultat le programme B retourne-t-il ?

Choisir un nombre.	$\frac{3}{4}$
Prendre son double.	$\frac{3}{2}$
Ajouter 5.	$\frac{13}{2}$
Calculer le carré du résultat.	$\frac{169}{4}$

Si l'utilisateur choisi $\frac{3}{4}$ le programme renvoie $\frac{169}{4}$.

5. On détermine les résultats suivants retournés par le programme B à l'aide d'une feuille de calcul automatisé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
2	25	49	81	121	169	225	289	361	441	
3										

(a) Quelle cellule du tableur permet de retrouver la réponse à la question 4.a. ci-dessus ?

La cellule `D2` permet de retrouver le résultat 4.(a).

(b) Quelle formule a pu être saisie dans la cellule `A2` de la feuille de calcul automatisé afin de la copier-glisser sur la ligne 2 ?

En cellule `A2` :

$$= (2 * \texttt{A1} + 5) \wedge 2$$

6. (a) Pour quel nombre de départ le programme B retourne-t-il le nombre zéro ?

Déterminons pour quel nombre de départ x le programme renvoie 0.

Choisir un nombre.	x
Prendre son double.	$2x$
Ajouter 5.	$2x + 5$
Calculer le carré du résultat.	$(2x + 5)^2$

Ainsi nous voulons que :

$$(2x + 5)^2 = 0.$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}2x+5&=0\\2x+5-5&=0-5\\2x&=-5\\\frac{2x}{2}&=\frac{-5}{2}\\x&=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Pour que le programme B renvoie 0 il faut choisir $-\frac{5}{2}$ comme nombre de départ.

(b) Ce nombre de départ est-il rationnel ? Justifier.

$\frac{-5}{2}$ est une fraction, c'est-à-dire le quotient d'un entier par un autre entier, donc

$-\frac{5}{2}$ est un nombre rationnel.

(c) Ce nombre de départ est-il décimal ? Justifier.

Justifions que $-\frac{5}{2}$ est décimal.

Il y a de nombreuses approches : il admet une écriture décimale dont la partie décimale est finie, il s'écrit sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, il s'écrit sous forme d'une fraction dont le dénominateur est un produit de puissances de 2 et de 5.
$-\frac{5}{2}=-2{,}5$ puisqu'il admet une écriture décimale dont la partie décimale est finie

$-\frac{5}{2}$ est un nombre décimal.

7. Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le même résultat que le programme B ?

La question est ambiguë : faut-il que le nombre de départ soit le même pour le programme A et le programme B ? Nous allons supposer que oui. Et la question revient à :

Résolvons l'équation $(2x+5)(5x-4)=(2x+5)^2$.

On pourrait être tenté de simplifier par $2x+5$ mais ce serait exclue une solution au problème. Nous allons ici nous ramener à une équation produit nul.

L'équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)^2 = (2x+5)^2-(2x+5)^2 &= 0\\
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)^2 &= 0\\
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)\times(2x+5) &= 0\\
(2x+5)\left[(5x-4)-(2x+5)\right] &= 0\\
(2x+5)\left[5x-4-2x-5\right] &= 0\\
(2x+5)(3x-9) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
2x+5=0 & \text{ou} & 3x-9=0\\
2x+5-5=0-5 & \text{ou} & 3x-9+9=0+9\\
2x=-5 & \text{ou} & 3x=9\\
\dfrac{2x}{2}=\dfrac{-5}{2} & \text{ou} & \dfrac{3x}{3}=\dfrac{9}{3}\\
x=-\dfrac{5}{2} & \text{ou} & x=3
\end{array}$$

Les programmes renvoient les mêmes nombres si les nombres de départ sont $-\frac{5}{2}$ ou 3.

Exercice 4.

Deux élèves de CM2, Jeanne et Teddy, jouent à la bataille navale. Il s'agit d'un jeu de société, appelé également « touché-coulé ».

Les deux joueurs doivent commencer par placer quatre navires horizontalement ou verticalement (sans chevauchement) sur leur grille de 8 lignes et 8 colonnes, tenue secrète : 1 navire de deux cases, 2 navires de trois cases et 1 navire de quatre cases.

Ils doivent ensuite tenter de faire « couler » les navires adverses en « touchant » toutes les cases de chaque navire de l'autre joueur. Pour cela, chacun, à son tour, énonce une case de la grille, sous le format « lettre-nombre », par exemple C2.

Lorsqu'un joueur énonce une case, son adversaire répond :

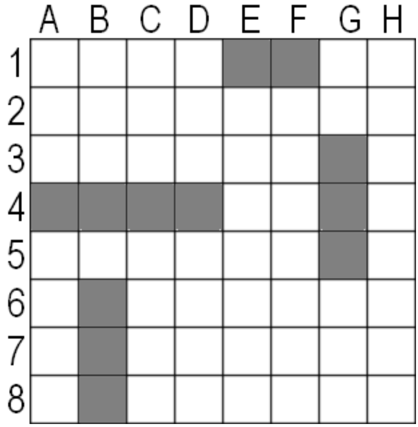
— « À l'eau ! », si la case énoncée est vide ;

— « Touché ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si les autres parties du navire n'ont pas encore toutes été touchées ;

— « Touché-coulé ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si toutes les autres parties du navire ont déjà été touchées.

Le gagnant est le joueur qui fait « couler » chez son adversaire tous les navires (au sens de toucher toutes les cases de chacun d'eux) avant que les siens ne le soient.

Voici ci-dessous la grille de Teddy : les quatre bateaux sont schématisés par des rectangles gris.



On suppose qu'à chaque tir, Jeanne choisit au hasard et de manière équiprobable une case de la grille qu'elle n'a pas énoncée précédemment.

1. Au premier essai :

   (a) Quelle est la probabilité que Jeanne touche un bateau ?

   Notons T_1 : « elle touche un bateau au premier tir ».

   Calculons $\mathbb{P}(T_1)$.

   L'univers est formé des $8 \times 8 = 64$ cases de la grille. Les choix d'une telle case sont supposés équiprobables. T_1 est réalisé par 12 issues, à savoir les cases grisées : $(A,4)$, $(B,4)$, ...
   Donc
   $$\mathbb{P}(T_1) = \frac{12}{64}.$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(T_1) = \tfrac{3}{16}.}$$

(b) Quelle est la probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau ?

Calculons $\mathbb{P}(\overline{T_1})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{T_1}) &= 1 - \mathbb{P}(T_1)\\ &= 1 - \frac{3}{16}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\overline{T_1}) = \frac{13}{16}$.

(c) Un des bateaux a une chance sur seize d'être touché. De combien de cases est-il composé ?

Déterminons le nombre n_c de cases formant le bateau recherché.

Il y a équiprobabilité entre les cases, il y a 64 cases au total, est l'événement T_2 : « le bateau recherché est touché est réalisé par n_c cases donc

$$\mathbb{P}(T_2) = \frac{n_c}{64}$$

Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{16}$ donc

$$\frac{1}{16} = \frac{n_c}{64}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}\times 64 &= \frac{n_c}{64}\times 64\\ 4 &= n_c\end{aligned}$$

Le bateau recherché est formé de 4 cases.

(d) Jeanne choisit une case de la colonne B. Quelle est la probabilité qu'elle touche un bateau ?

Notons T_3 : « toucher un bateau en tirant dans la colonne B ».

Calculons $\mathbb{P}_2(T_3)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 8 cases de la colonne B qui sont toutes équiprobables et l'événement T_3 regroupe les 4 cases grisées de la colonne B donc

$$\mathbb{P}_2(T_3) = \frac{4}{8}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_2(T_3) = \frac{1}{2}.}$$

2. Au premier essai de la partie, Jeanne désigne la case « E1 ». Teddy annonce « Touché ! ». Jeanne souhaite couler le bateau touché et choisit une case adjacente à la case « E1 ».
Quelle est la probabilité qu'elle coule le bateau au coup suivant ? Justifier.

Notons $T4$: « couler le bateau au coup suivant ».

Calculons $\mathbb{P}_3(T_4)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 3 cases qui entourent la cases E1 et qui permettent de placer un bateau et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_4 regroupe la seule case grisée adjacente à E1 donc

$$\boxed{\mathbb{P}_3(T_4) = \frac{1}{3}.}$$

3. Teddy annonce « À l'eau ! » pour les deux premiers essais de Jeanne. Quelle est la probabilité de toucher un bateau pour son troisième essai ?

L'utilisation du présent dans l'énoncé des questions 3 et 4 crée une ambiguïté. Nous admettrons que la question 2 n'a pas eu lieu.

Notons T_5 : « toucher un bateau après deux coups dans l'eau suivant ».

Calculons $\mathbb{P}_4(T_5)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des $64 - 2 = 62$ cases qui n'ont pas été visées et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_5 regroupe les 12 cases grisées donc

$$\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{12}{62}$$

$$\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{6}{31}.$$

Exercice 5.

Pour choisir une unité de température, les physiciens se sont heurtés à l'absence de « température zéro » (le zéro absolu n'était pas connu à l'époque). Deux systèmes principaux ont été créés et restent utilisés : le degré Celsius (°C) et le degré Fahrenheit (°F).

Voici ci-dessous une formule permettant de passer de la mesure d'une température en degré Fahrenheit (notée F) vers la mesure de la même température en degré Celsius (notée C)

$$C = (F - 32) \times \frac{5}{9}.$$

1. En utilisant cette formule, convertir 95°F en degré Celsius.

   Convertissons des Fahrenheit vers les Celsius.

   95°F exprimés en degrés Celsius donnent

$$\begin{aligned} C &= (95 - 32)\frac{5}{9} \\ &= 35 \end{aligned}$$

$$95°\text{F} = 35°\text{C}.$$

2. En utilisant cette formule, convertir 5°C en degré Fahrenheit.

   Déterminons la température F, exprimée en degré Fahrenheit, égale 5°C.

$$5 = (F - 32) \times \frac{5}{9}$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 5\times\frac{9}{5} &= (F-32)\times\frac{5}{9}\times\frac{9}{5} \\ 9 &= F - 32 \\ 9 + +32 &= F - 32+32 \\ 41 &= F \end{aligned}$$

$5°C = 41°F$.

3. Existe-t-il des températures pour lesquelles la mesure en degrés Celsius est égale à la mesure en degrés Fahrenheit ? Donner toutes les réponses possibles en justifiant.

Déterminons F de sorte que $C = F$.

On veut

$$\begin{aligned}
F &= (F - 32) \times \frac{5}{9} \\
\frac{9}{5}F &= F - 32 \\
\frac{9}{5}F - F &= -32 \\
\frac{4}{5}F &= -32 \\
F &= -32 \times \frac{5}{4} \\
F &= -40
\end{aligned}$$

Les mesures en Celsius et Fahrenheit sont égales dans un seul cas : $-40°C = -40°F$.

Exercice 6.

Un professeur des écoles d'une classe de CE1 présente à ses élèves une règle de calcul qui permet de déterminer avec ses dix doigts et ses dix orteils le produit de deux nombres entiers compris entre 5 et 10 en utilisant les résultats des tables appris précédemment. Il s'appuie sur l'exemple suivant.

Effectuons 6×7.
— Avec le pied et la main gauches, on lève les 5 orteils et 1 doigt, représentant ainsi le 6.
— Avec le pied et la main droites, on lève les 5 orteils et 2 doigts, représentant ainsi le 7.

Pour le calcul on ne regarde que les mains et on procède de la manière suivante : la somme du nombre de doigts levés nous indique un nombre de dizaines, le produit des doigts baissés nous indique un nombre d'unités. Ici on a : $(1 + 2)$ dizaines et (4×3) unités, soit encore 3 dizaines et 12 unités. On obtient donc le nombre 42.

1. Appliquer cette règle pour calculer le produit 6×8.

   Effectuons 6×8.

   — Avec le pied et la main gauches, on lève les 5 orteils et 1 doigt, représentant ainsi le 6.

   — Avec le pied et la main droites, on lève les 5 orteils et 3 doigts, représentant ainsi le 8.
   La somme du nombre de doigts levés nous indique un nombre de dizaines (ici $1 + 3 = 4$), le produit des doigts baissés nous indique un nombre d'unités (ici $4 \times 2 = 8$.
   Donc

   $$\boxed{6 \times 8 = 48.}$$

2. On note g le nombre de doigts levés de la main gauche et d le nombre de doigts levés de la main droite.

   (a) Que représentent dans ce contexte les nombres $(5 - g)$ et $(5 - d)$?

   > $5 - g$ est le nombre de doigts baissés de la main gauche et $5 - d$ celui de la main droite.

   (b) Démontrer l'égalité : $(5 + g)(5 + d) = 10(g + d) + (5 - g)(5 - d)$.

   Démontrons l'égalité proposée.

   D'une part :

   $$\begin{aligned}(5+g)(5+d) &= 5 \times 5 + 5 \times d + g \times 5 + g \times d \\ &= 25 + 5d + 5g + gd \\ &= gd + 5d + 5g + 25\end{aligned}$$

   d'autre part :

   $$\begin{aligned}&\ 10(g+d) + (5-g)(5-d) \\ &= 10 \times d + 10 \times g + 5 \times 5 + 5 \times (-d) + (-g) \times 5 + (-g) \times (-d) \\ &= 10d + 10g + 25 - 5d - 5g + gd \\ &= gd + 5d + 5g + 25\end{aligned}$$

donc, par transitivité,

$$\boxed{(5+g)(5+d) = 10(g+d) + (5-g)(5-d).}$$

(c) Conclure quant à la validité de la règle de calcul.

La règle de calcul est donc valable.