

Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

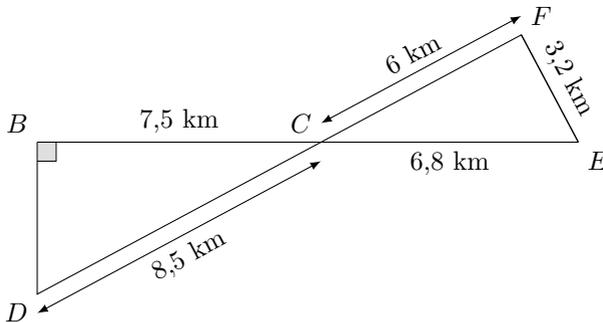
Durée : 3 heures.

Épreuve notée sur 20.

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

Exercice 1.

Un professeur des écoles, organise avec sa classe de CM1 une randonnée à vélo. Le parcours $BCEFCDB$ est représenté ci-contre.



1. Montrer que l'angle \widehat{CFE} est droit.

Déterminons si \widehat{CFE} est droit.

D'une part :

$$CF^2 + FE^2 = 6^2 + 3,2^2 = 46,24,$$

et d'autre part :

$$CE^2 = 6,8^2 = 46,24.$$

Ainsi $CF^2 + FE^2 = CE^2$ et, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, CFE est rectangle en F .

\widehat{CFE} est pas droit.

2. Déterminer la longueur totale du parcours.

Calculons la longueur de $BCEFCDB$.

* Calculons DB .

BCD est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$DB^2 + BC^2 = DC^2.$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} DB^2 + 7,5^2 &= 8,5^2 \\ DB^2 + 7,5^2 - 7,5^2 &= 8,5^2 - 7,5^2 \\ BD^2 &= 16 \end{aligned}$$

Enfin, BD étant une longueur donc un nombre positif :

$$BD = 4$$

* Nous pouvons maintenant déterminer la longueur du parcours entier :

$$\begin{aligned} BCEFCDB &= BC + CE + EF + FC + CD + DB \\ &= 7,5 + 6,8 + 3,2 + 6 + 8,5 + 4 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Le parcours fait 36 km.

3. Sachant que la vitesse moyenne du groupe est de 14 km/h, la classe fera-t-elle le parcours en moins de 2 h 45 min ? Justifier la réponse.

Calculons la distance parcourue en 2 h 45 min.

La distance parcourue en 2 h 45 min à 14 km/h est

$$\begin{aligned} d &= (2 \text{ h} + 45 \text{ min}) \times (14 \text{ km/h}) \\ &= \left(2 \text{ h} + \frac{3}{4} \text{ h}\right) \times (14 \text{ km/h}) \\ &= (2,75 \text{ h}) \times (14 \text{ km/h}) \\ &= 2,75 \times 14 \text{ h} \cdot \text{km/h} \\ &= 38,5 \text{ km} \end{aligned}$$

En 2 h 45 min la classe aura fini le parcours.

Exercice 2.

1. Quatre personnes A, B, C, D se partagent une somme d'argent. On appelle a , b , c et d les montants respectivement reçus par A, B, C et D. On sait par ailleurs que :

- a représente $\frac{1}{4}$ de la somme totale ;
- b représente $\frac{1}{3}$ de la somme totale ;
- C et D se partagent ce qui reste en prenant chacun le même montant.

(a) Déterminer la proportion que représente c par rapport à la somme totale.

Déterminons la proportion représentée par c .

Notons T la somme totale :

$$T = a + b + c + d$$

donc

$$T = \frac{1}{4} \times T + \frac{1}{3} \times T + c + c$$

$$T = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) T + 2c$$

$$T = \frac{7}{12} T + 2c$$

$$T - \frac{7}{12} T = \frac{7}{12} T + 2c - \frac{7}{12} T$$

$$\frac{5}{12} T = 2c$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{12} T = \frac{1}{2} \times 2c$$

$$\frac{5}{24} T = c$$

c représente $\frac{5}{24}$ de la somme totale.

(b) D reçoit 55 €. Déterminer les valeurs de a , b et c .

* Puisque $c = d$

$$c = 55 \text{ €.}$$

* Puisque c représente $\frac{5}{24}$ du total :

$$\begin{aligned} c &= \frac{5}{24} \times T \\ \frac{24}{5} \times c &= \frac{24}{5} \times \frac{5}{24} \times T \\ \frac{24}{5} \times 55 \text{ €} &= T \\ 264 \text{ €} &= T \end{aligned}$$

Or :

$$a = \frac{1}{4} \times T$$

donc

$$a = \frac{1}{4} \times 264 \text{ €}$$

$$a = 66 \text{ €.}$$

* De même

$$b = \frac{1}{3} \times T$$

donc

$$b = \frac{1}{3} \times 264 \text{ €}$$

$$b = 88 \text{ €.}$$

2. Quatre personnes E, F, G, H se partagent une somme d'argent s . On appelle e , f , g et h les montants respectivement reçus par E, F, G et H. On sait par ailleurs que :

- E perçoit le triple de F ;
- $g + h$ représente $\frac{1}{3}$ de la somme totale ;
- $g = h$.

Exprimer la part de chacun en fonction de s .

Déterminons les différentes proportions demandées.

*

$$g + h = \frac{1}{3}s$$

or $g = h$ donc

$$\begin{aligned} 2g &= \frac{1}{3}s \\ \frac{1}{2} \times 2g &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}s \end{aligned}$$

$$g = \frac{1}{6}s.$$

* Puisque $g = h$

$$h = \frac{1}{6}s.$$

* On a

$$\begin{aligned} e + f + g + h &= s \\ e + f + \frac{1}{3}s &= s \\ e + f + \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}s &= s - \frac{1}{3}s \\ e + f &= \frac{2}{3}s \end{aligned}$$

Or $e = 3f$ donc

$$3f + f = \frac{2}{3}s$$

$$4f = \frac{2}{3}s$$

$$\frac{1}{4} \times 4f = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}s$$

$$f = \frac{1}{6}s.$$

* Puisque $e = 3f = 3 \times \frac{1}{6}s$ donc

$$e = \frac{1}{2}s.$$

Exercice 3.

On donne le programme ci-contre qui permet de tracer des triangles de tailles différentes.

Ce programme comporte une variable nommée « côté ». Les longueurs sont données en pixels.

Script.



Bloc Triangle.



On rappelle que l'instruction **s'orienter à 90** signifie que l'on se dirige vers la droite.

Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : [lien de téléchargement](#).

1. Répondre aux questions suivantes sans justifier.

L'utilisateur clique sur le drapeau.

(a) Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé ?

aller à x: -75 y: 50 donc

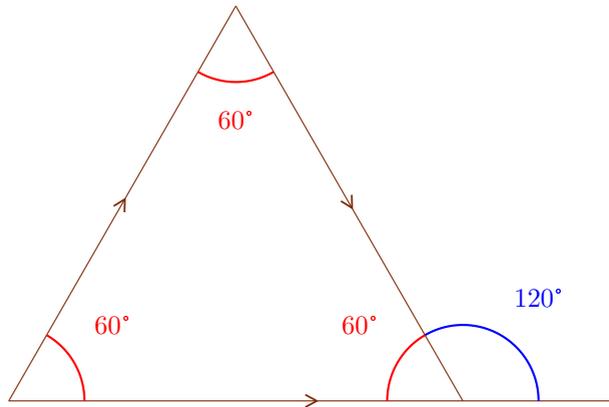
Le point de départ é pour coordonnées : (-75; 50).

(b) Combien de triangles sont dessinés par le script ?

Triangle est répété 5 fois donc

5 triangles sont dessinés par le script

(c) Quelle est la nature des triangles dessinés ?



Les triangles dessinés sont équilatéraux.

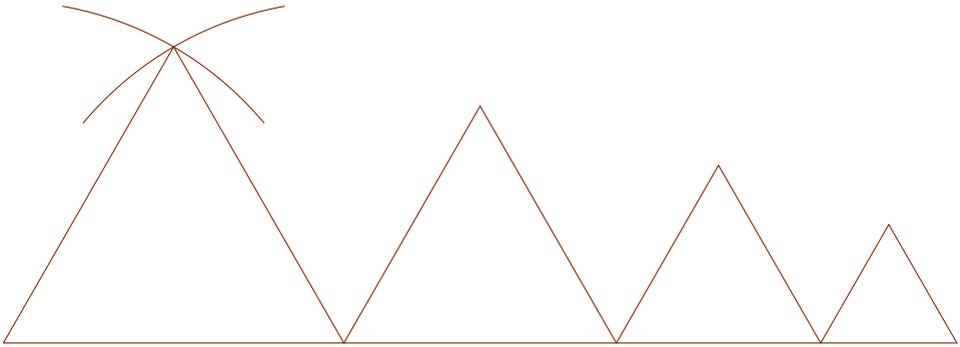
(d) Quelle est la longueur (en pas) d'un côté du deuxième triangle tracé ?

De mettre côté à 100 puis ajouter -20 à côté nous déduisons que

la longueur d'un côté du deuxième triangle est 80 pas.

2. Tracer le dessin obtenu par ce programme en prenant comme échelle 1 cm pour 20 pas.

Je n'ai pas pu faire en taille réelle. La longueur des côtés des triangles est : 5 cm, 4 cm, 3 cm, 2 cm et 1 cm.



3. Si au lieu de triangles on voulait obtenir des hexagones réguliers, que devrait-on changer dans les instructions du bloc triangle ?



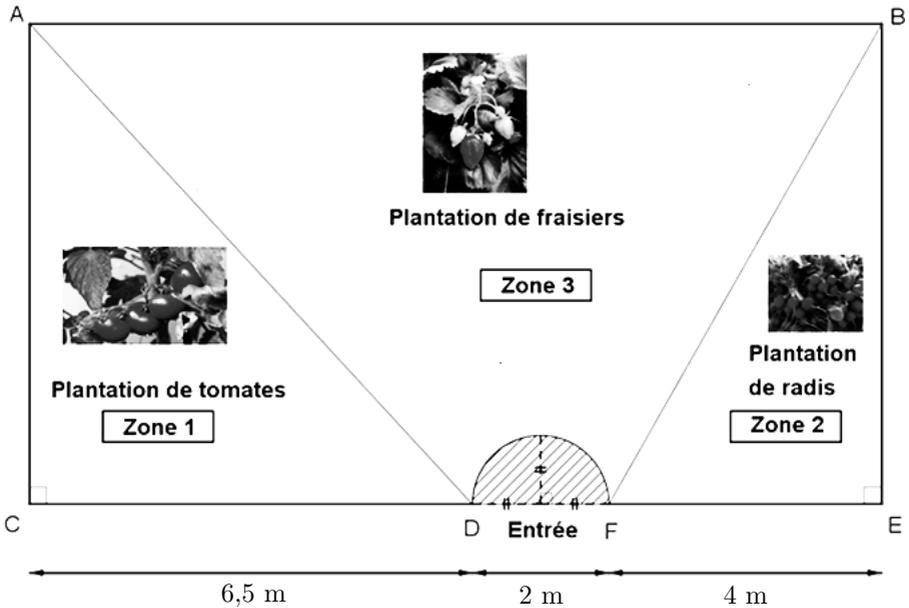
Exercice 4.

Partie A.

Dans une école, un jardin pédagogique est constitué d'un terrain rectangulaire $ABEC$ dont l'aire est égale à 100 m^2 .

Des enseignants de l'école décident de planter avec les élèves différentes cultures sur ce terrain : des fraisières, des pieds de tomates et des radis.

La répartition dans le terrain est la suivante :



L'entrée est un demi-disque délimité par le demi-cercle de diamètre $[DF]$ (zone hachurée sur la figure ci-dessus). Elle doit rester libre de toute plantation.

1. Justifier que la largeur du terrain correspondant au segment $[CA]$ est égale à 8 m.
2. Tracer un plan du terrain avec les différentes zones à l'échelle 1 : 80.

Déterminons AC .

L'aire du terrain rectangulaire est de 100 m^2 donc

$$AC \times CE = 100 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$AC \times (6,5 \text{ m} + 2 \text{ m} + 4 \text{ m}) = 100 \text{ m}^2$$

$$AC \times (12,5 \text{ m}) = 100 \text{ m}^2$$

$$\frac{AC \times (12,5 \text{ m})}{12,5 \text{ m}} = \frac{100 \text{ m}^2}{12,5 \text{ m}}$$

$$AC = \frac{100}{12,5} \frac{\text{m}^2}{\text{m}}$$

$$AC = 8 \text{ m.}$$

3. Le directeur de l'école veut installer une bordure sur les trois côtés autour de la zone 1 où on plante des tomates.

- (a) Montrer que $AD = \sqrt{106,25}$ m.

Déterminons AD .

Puisque ACD est rectangle en C , d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 \\ &= 6,5^2 + 8^2 \\ &= 106,25 \end{aligned}$$

AD étant une longueur, donc un nombre positif,

$$AD = \sqrt{106,25}$$

$$AD = \sqrt{106,25} \text{ m.}$$

- (b) Déterminer la longueur de la bordure qu'il doit acheter. On donnera le résultat en mètre arrondi à l'unité.

Calculons la longueur, ℓ_b , de la bordure.

$$\begin{aligned} \ell_b &= AC + CD + DA \\ &= 6,5 \text{ m} + \sqrt{106,25} \text{ m} + 8 \text{ m} \\ &\approx 24,8 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

En arrondissant à l'unité $\ell_b \approx 24,8$ m.

- (c) Les bordures sont vendues par rouleaux de 4 mètres. Déterminer le nombre de rouleaux nécessaire pour entourer la zone 1.

Calculons le nombre de rouleaux n_r .

Procédons à une division :

$$24,8 = 8 \times 4 + 0,8$$

Il faut 9 rouleaux pour entourer la zone 1.

4. On veut déterminer l'aire de chacune des zones.

- (a) Calculer l'aire de la zone 1, en mètre carré.

Calculons l'aire \mathcal{A}_1 de la zone 1.

ACD est rectangle en C donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2} \times CD \times CA \\ &= \frac{1}{2} \times (6,5 \text{ m}) \times (8 \text{ m}) \\ &= \frac{1}{2} \times 6,5 \times 8 \text{ m} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_1 = 26 \text{ m}^2.$$

- (b) Calculer l'aire de la zone 2, où on plante des radis, en mètre carré.

Calculons l'aire \mathcal{A}_2 de la zone 2.

FEB est rectangle en E donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \frac{1}{2} \times FE \times EB \\ &= \frac{1}{2} \times (4 \text{ m}) \times (8 \text{ m}) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \text{ m} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_2 = 16 \text{ m}^2.$$

- (c) En déduire l'aire de la zone 3, où on plante des fraisiers (sans la zone « Entrée » hachurée sur la figure), en mètre carré. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

Calculons l'aire \mathcal{A}_3 de la zone 3.

L'aire de l'entrée e forme de demi-disque est $\mathcal{A}_e = \frac{1}{2} \times \pi (1\text{m})^2 = \frac{\pi}{2} \text{ m}^2$ donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= 100 \text{ m}^2 - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \frac{\pi}{2} \text{ m}^2 \\ &= 100 \text{ m}^2 - 26 \text{ m}^2 - 16 \text{ m}^2 - \frac{\pi}{2} \text{ m}^2 \\ &= \left(100 - 26 - 16 - \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_3 = \left(58 - \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}^2.$$

En tronquant

$$\mathcal{A}_3 \approx 56,42 \text{ m}^2$$

$$\text{En arrondissant au dixième } \mathcal{A}_3 \approx 56,4 \text{ m}^2.$$

5. On s'intéresse à la culture des fraisiers.

Sachant qu'on peut planter 6 pieds de fraisiers par m^2 et qu'un pied de fraisier produit en moyenne 650 grammes de fraises par année, quelle masse de fraises les élèves peuvent-ils espérer récolter ? On donnera le résultat en kilogramme, arrondi à l'unité.

Déterminons la masse totale m_f de fraises.

Puisqu'on peut planter 6 fraisier par mètre carré, le nombre total de fraisier est, en prenant une valeur approchée par défaut :

$$6 \times 56,4 \approx 338.$$

Nous en déduisons la masse totale de fraises escomptée :

$$\begin{aligned}
 m_f &\approx 338 \times 650 \text{ g} \\
 &\approx 219700 \times \frac{1}{1000} \text{ kg} \\
 &\approx 219,7 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

$$m_f \approx 220 \text{ kg.}$$

Partie B.

Fin juin, l'école décide de récolter des fraises pour faire de la confiture. Les élèves récoltent ainsi 25 kg de fraises.

1. La recette de confiture de fraise dit que la quantité de sucre nécessaire doit correspondre à 55 % de la masse totale avant cuisson. Quelle masse de sucre, arrondi au kilogramme, le directeur doit-il acheter pour respecter cette recette?

Déterminons la masse m_s de sucre.

La masse de sucre doit représenté 55 % de la masse totale m_T autrement dit

$$m_s = \frac{55}{100} \times m_T$$

Par conséquent la masse de fraise représente 45 % de la masse totale :

$$\frac{45}{100} \times m_T = 25 \text{ kg}$$

Nous pouvons en déduire la masse totale :

$$\begin{aligned}
 \frac{100}{45} \times \frac{45}{100} m_T &= \frac{100}{45} \times 25 \text{ kg} \\
 m_T &= \frac{500}{9} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons la masse de sucre :

$$\begin{aligned}
 m_s &= \frac{55}{100} \times \frac{500}{9} \text{ kg} \\
 &= \frac{275}{9} \text{ kg} \\
 &\approx 30,55 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

En arrondissant à l'entier par excès $m_s \approx 31$ kg.

2. Sachant que 3 kg de fraises permettent de réaliser 4,8 L de confiture, combien de litres de confiture peut-on réaliser ?

Calculons le volume V_c de confiture.

Masse (en kg)	3	25
Volume (en L)	4,8	V_c

Puisqu'il y a proportionnalité, nous pouvons utiliser un produit en croix :

$$V_c = \frac{25 \times 4,8}{3} \text{ L}$$

$$V_c = 40 \text{ L.}$$

3. Il décide de conditionner cette confiture dans des pots cylindriques dont la base est un disque de diamètre 8,4 cm et dont la hauteur mesure 11 cm. Sachant que les pots ne peuvent être remplis qu'au $\frac{8}{9}$ de leur capacité maximale, déterminer le nombre de pots de confiture qu'il devrait réaliser.

On rappelle la formule suivante :

*Volume d'un prisme ou d'un cylindre : $V = B \times h$,
où B désigne l'aire de la base du prisme ou du cylindre et h sa hauteur.*

Déterminons le nombre n_p de pot.

* Le volume d'un pot, cylindrique, est

$$\begin{aligned} V_p &= \pi \left(\frac{8,4 \text{ cm}}{2} \right)^2 \times (11 \text{ cm}) \\ &= 194,04\pi \text{ cm}^3 \\ &= 194,04\pi \times \frac{1}{1000} \text{ L} \\ &= 0,19404\pi \text{ L} \end{aligned}$$

* Le volume utilisable dans chaque pot est

$$\begin{aligned} V_u &= \frac{8}{9} \times V_p \\ &= \frac{8}{9} \times 0,19404\pi \text{ L} \\ &\approx 0,5420 \text{ L} \end{aligned}$$

* Connaissant la contenance de chaque pot nous pouvons trouver le nombre de pots nécessaires :

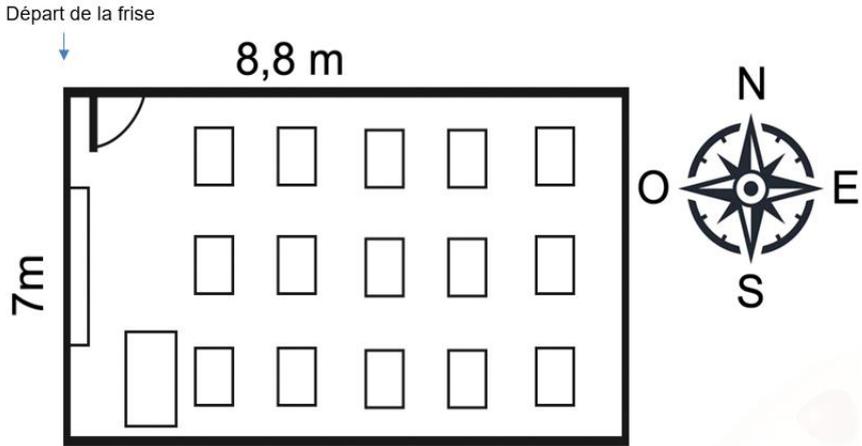
$$\begin{aligned} n_p &= \frac{40 \text{ L}}{0,542 \text{ L}} \\ &\approx 73,8 \end{aligned}$$

En arrondissant :

Il faut prévoir 74 pots.

Exercice 5.

Un enseignant souhaite décorer sa salle de classe avec une frise chronologique allant de la chute de l'Empire romain (476) à nos jours. Cette frise devra couvrir trois murs de la salle de classe rectangulaire en commençant par le coin nord-ouest et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. La frise passe au-dessus de la porte et s'étend ainsi sur les murs nord, est et sud.



1. Pour effectuer cette frise l'enseignant prévoit d'assembler bord à bord des feuilles de format A4 ($21 \times 29,7$ cm) dans le sens de la longueur. Montrer qu'il faudra 83 feuilles pour réaliser la frise.

Déterminons le nombre de feuilles nécessaires.

* La frise aura une longueur de

$$8,8 \text{ m} + 7 \text{ m} + 8,8 \text{ m} = 24,6 \text{ m}$$

* Nous en déduisons le nombre de feuilles nécessaires

$$\begin{aligned} \frac{24,6 \text{ m}}{29,7 \text{ cm}} &= \frac{24,6 \times 100 \text{ cm}}{29,7 \text{ cm}} \\ &= 82,828282 \dots \end{aligned}$$

Il faudra 83 feuilles.

2. Par combien de centimètres est représentée une année sur cette frise chronologique ? Arrondir au millimètre près.

Déterminons l'échelle de la frise.

La frise doit représenter $2023 - 476 = 1547$.

Nous avons une situation de proportionnalité

Années	1547	1
Longueur	2460 cm	?

En faisant un produit en croix :

$$\frac{1 \times 2460}{1547} \approx 1,590.$$

Chaque année sera représentée par 1,6 cm.

3. L'enseignant a répertorié dans une feuille de calcul automatisé des dates importantes qu'il aimerait faire figurer sur cette frise.

D2		: × ✓ fx		=(C2/29,7)+1	
	A	B	C	D	E
1		Année	Nombre de cm du début de la frise		
2	Fin de l'antiquité / Début du Moyen-Âge	476	0	1	
3	Fin du Moyen-Âge / Début de l'époque moderne	1492			
4	Fin de l'époque moderne / Début de l'époque contemporaine	1789			
5					
6					

- (a) Proposer une formule à valider dans la cellule C2, pouvant être étirée vers le bas afin de trouver tous les résultats de la colonne C.

En C2 :

$$= (B2 - 476) * 1,6.$$

- (b) Sachant que la formule validée dans la cellule D2 est « = ENT(C2/29,7) + 1 », déterminer à quoi correspondent les nombres de la colonne D au sein de la salle de classe.

On rappelle que « ENT(x) » renvoie la partie entière du nombre x.

La colonne D indique le nombre de feuilles entières à utiliser depuis le début de la frise.

4. Sur quel mur de la classe se trouvera l'événement « l'accostage de Christophe Colomb sur le continent américain », marquant la fin du Moyen-Âge, si on le positionne sur la frise ?

* La longueur de la frise jusqu'à l'année 1492 est

$$(1492 - 496) \times 1,6 \text{ cm} = 1593,6 \text{ cm.}$$

* $8,8 \text{ m} = 8,8 \times 100 \text{ cm} = 880 \text{ cm.}$

De même : $7 \text{ m} = 700 \text{ cm.}$

Or $800 \text{ cm} + 700 \text{ cm} = 1500 \text{ cm} < 1593,6 \text{ cm}$ donc

la date sera sur le mur sud.

Exercice 6.

Dans une école élémentaire de 150 élèves, 80 sont des filles. Le directeur veut mettre en place un « orchestre à l'école ». Il réalise une enquête auprès des familles de l'école afin de connaître les élèves qui pratiquent déjà un instrument de musique.

À l'issue de l'enquête, il apparaît que 24 % des élèves sont musiciens.

Parmi ces élèves, 16 sont des garçons.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles			
Nombre de garçons			
Total			150

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles	20 (1)	60 (2)	80
Nombre de garçons	16	54 (3)	70 (4)
Total	36	114	150

* Nombre de filles : 80.

* 24 % des élèves sont musiciens : $\frac{24}{100} \times 150 = 36$.

* Parmi les élèves musiciens 16 sont des garçons.

Les autres les valeurs se déduisent par sommes ou différences dans l'ordre (1), (2), (3) puis (4) (d'autres ordres sont possibles).

2. Dans cette question, on écrira les résultats sous forme de fractions irréductibles.

On interroge un élève au hasard.

- (a) Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?

Notons G l'événement « l'élève choisi est un garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Modélisons l'expérience aléatoire : Ω , l'univers, est l'ensemble des élèves, et nous le munissons de l'équiprobabilité.

G est réalisé par 70 issues, Ω en contient 150 donc

$$\mathbb{P}(G) = \frac{70}{150}.$$

Des décompositions en facteurs premiers $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ nous déduisons la forme irréductible de la réponse :

$$\mathbb{P}(G) = \frac{7}{15}.$$

- (b) Quelle est la probabilité que ce soit une fille musicienne ?

Notons FM : « l'élève est une fille musicienne ».

Calculons $\mathbb{P}(FM)$.

FM étant réalisé par 20 issues donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(FM) &= \frac{20}{150} \\ &= \frac{2^2 \times 5}{2 \times 3 \times 5^2} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(FM) = \frac{2}{15}.$$

(c) Quelle est la probabilité que ce soit un élève non-musicien ?

Notons M : « l'élève est un musicien ».

Calculons $\mathbb{P}(\overline{M})$.

\overline{M} est réalisé par 114 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \frac{114}{150} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 19}{2 \times 3 \times 5^2}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(M) = \frac{19}{25}.$$

3. L'élève interrogé est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il soit musicien ?

Avec les probabilités conditionnelles :

Calculons $\mathbb{P}_G(M)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_G(M) &= \frac{\mathbb{P}(G \cap M)}{\mathbb{P}(G)} \\ &= \frac{\frac{16}{150}}{\frac{70}{150}} \\ &= \frac{16}{70} \\ &= \frac{2^4}{3 \times 5 \times 7}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_G(M) = \frac{16}{70}.$$

Il est possible de raisonner en changeant de modélisation.

Notons Ω' l'ensemble 70 garçons et munissons-le de l'équiprobabilité.

Dans cet univers M est réalisé par 16 donc

$$\mathbb{P}'(M) = \frac{16}{70}.$$

4. 30 % des filles musiciennes jouent d'un instrument à vent. Quel pourcentage cela représente-t-il par rapport à l'effectif total de l'école ?

Calculons la proportion de musiciennes d'instruments à vent dans l'école.

- * Le nombre de filles jouant d'un instrument à vent est

$$\frac{30}{100} \times 20 = 6.$$

- * La proportion représentée par les 6 filles est

$$\frac{6}{150} = \frac{1}{25}.$$

Enfin, comme $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$.

4 % des élèves sont des filles jouant d'un instrument à vent.