Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Exercice 1.

1. Déterminons si $\widehat{CFE}$ est droit.

   D'une part :
   $$CF^2 + FE^2 = 6^2 + 3{,}2^2 = 46{,}24,$$
   et d'autre part :
   $$CE^2 = 6{,}8^2 = 46{,}24.$$
   Ainsi $CF^2 + FE^2 = CE^2$ et, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, CFE est rectangle en F.

   $\widehat{CFE}$ est pas droit.

2. Calculons la longueur de $BCEFCDB$.

   * Calculons DB.
   BCD est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,
   $$DB^2 + BC^2 = DC^2.$$
   Nous en déduisons successivement :
   $$\begin{aligned} DB^2 + 7{,}5^2 &= 8{,}5^2 \\ DB^2 + 7{,}5^2 - 7{,}5^2 &= 8{,}5^2 - 7{,}5^2 \\ BD^2 &= 16 \end{aligned}$$
   Enfin, BD étant une longueur donc un nombre positif :
   $$BD = 4$$

   * Nous pouvons maintenant déterminer la longueur du parcours entier :
   $$\begin{aligned} BCEFCDB &= BC + CE + EF + FC + CD + DB \\ &= 7{,}5 + 6{,}8 + 3{,}2 + 6 + 8{,}5 + 4 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Le parcours fait 36 km.

3. Calculons la distance parcourue en 2 h 45 min.

La distance parcourue en 2 h 45 min à 14 km/h est

$$\begin{aligned} d &= (2 \text{ h} + 45 \text{ min}) \times (14 \text{ km/h}) \\ &= \left(2 \text{ h} + \frac{3}{4} \text{ h}\right) \times (14 \text{ km/h}) \\ &= (2{,}75 \text{ h}) \times (14 \text{ km/h}) \\ &= 2{,}75 \times 14 \text{ h} \cdot \text{km/h} \\ &= 38{,}5 \text{ km} \end{aligned}$$

En 2 h 45 min la classe aura fini le parcours.

Exercice 2.

1. (a) Déterminons la proportion représentée par c.

Notons T la somme totale :

$$T = a + b + c + d$$

donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4} \times T + \frac{1}{3} \times T + c + c \\ T &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) T + 2c \\ T &= \frac{7}{12} T + 2c \\ T - \frac{7}{12} T &= \frac{7}{12} T + 2c - \frac{7}{12} T \\ \frac{5}{12} T &= 2c \\ \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} T &= \frac{1}{2} \times 2c \\ \frac{5}{24} T &= c \end{aligned}$$

c représente $\frac{5}{24}$ de la somme totale.

(b) * Puisque $c = d$

$c = 55$ €.

* Puisque c représente $\frac{5}{24}$ du total :

$$\begin{aligned} c &= \frac{5}{24} \times T \\ \frac{24}{5} \times c &= \frac{24}{5} \times \frac{5}{24} \times T \\ \frac{24}{5} \times 55 \text{ €} &= T \\ 264 \text{ €} &= T \end{aligned}$$

Or :

$$a = \frac{1}{4} \times T$$

donc

$$a = \frac{1}{4} \times 264 \text{ €}$$

$a = 66$ €.

* De même

$$b = \frac{1}{3} \times T$$

donc

$$b = \frac{1}{3} \times 264 \text{ €}$$

$b = 88$ €.

2. Déterminons les différentes proportions demandées.

   *
$$g + h = \frac{1}{3}s$$

or $g = h$ donc

$$2g = \frac{1}{3}s$$
$$\frac{1}{2}\times 2g = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}s$$

$$\boxed{g = \frac{1}{6}s.}$$

   * Puisque $g = h$

$$\boxed{h = \frac{1}{6}s.}$$

   * On a

$$e + f + g + h = s$$
$$e + f + \frac{1}{3}s = s$$
$$e + f + \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}s = s - \frac{1}{3}s$$
$$e + f = \frac{2}{3}s$$

Or $e = 3f$ donc

$$3f + f = \frac{2}{3}s$$
$$4f = \frac{2}{3}s$$
$$\frac{1}{4}\times 4f = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}s$$

$$\boxed{f = \frac{1}{6}s.}$$

* Puisque $e = 3f = 3 \times \frac{1}{6}s$ donc

$$e = \frac{1}{2}s.$$

Exercice 3.

Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

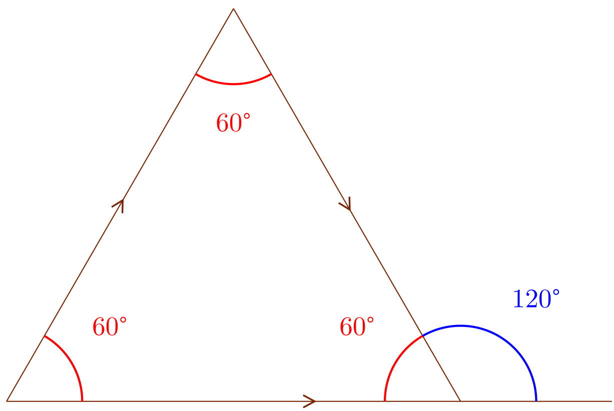
1. (a) aller à x: -75 y: 50 donc

Le point de départ é pour coordonnées : $(-75; 50)$.

(b) Triangle est répété 5 fois donc

5 triangles sont dessinés par le script

(c)

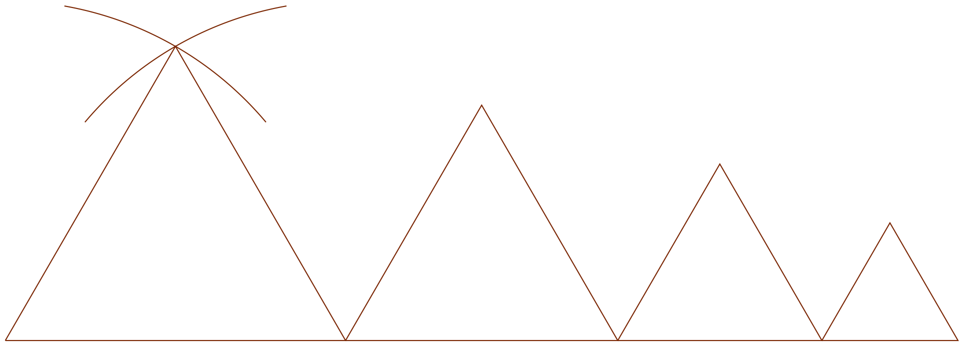


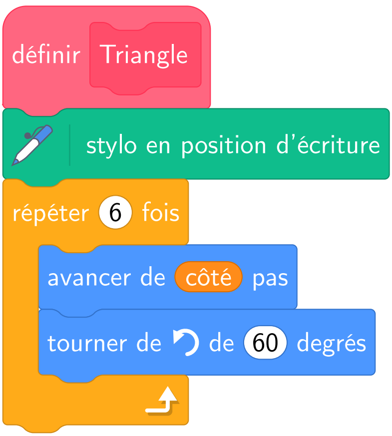
Les triangles dessinés sont équilatéraux.

(d) De mettre côté à 100 puis ajouter -20 à côté nous déduisons que

> la longueur d'un côté du deuxième triangle est 80 pas.

2. Je n'ai pas pu faire en taille réelle. La longueur des côtés des triangles est : 5 cm, 4 cm, 3 cm, 2 cm et 1 cm.



3. 

Exercice 4.

Partie A.

1.
2. Déterminons AC.

   L'aire du terrain rectangulaire est de 100 m^2 donc

$$AC \times CE = 10 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} AC \times (6{,}5\text{ m} + 2\text{ m} + 4\text{ m}) &= 100\text{ m}^2 \\ AC \times (12{,}5\text{ m}) &= 100\text{ m}^2 \\ \frac{AC \times (12{,}5\text{ m})}{12{,}5\text{ m}} &= \frac{100\text{ m}^2}{12{,}5\text{ m}} \\ AC &= \frac{100}{12{,}5}\,\frac{\text{m}^2}{\text{m}} \end{aligned}$$

$$\boxed{AC = 8\text{ m.}}$$

3. (a) Déterminons AD.

Puisque ACD est rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 \\ &= 6{,}5^2 + 8^2 \\ &= 106{,}25 \end{aligned}$$

AD étant une longueur, doncun nombre positif,

$$AD = \sqrt{106{,}25}$$

$$\boxed{AD = \sqrt{106{,}25}\text{ m.}}$$

(b) Calculons la longueur, ℓ_b, de la bordure.

$$\begin{aligned} \ell_b &= AC + CD + DA \\ &= 6{,}5\text{ m} + \sqrt{106{,}25}\text{ m} + 8\text{ m} \\ &\approx 24{,}8 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En arrondissant à l'unité } \ell_b \approx 24{,}8\text{ m.}}$$

(c) Calculons le nombre de rouleaux n_r.

Procédons à une division :

$$24{,}8 = 8 \times 4 + 0{,}8$$

Il faut 9 rouleaux pour entourer la zone 1.

4. (a) Calculons l'aire $\mathscr{A}_1$ de la zone 1.

ACD est rectangle en C donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= \frac{1}{2} \times CD \times CA \\ &= \frac{1}{2} \times (6{,}5 \text{ m}) \times (8 \text{ m}) \\ &= \frac{1}{2} \times 6{,}5 \times 8 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$\mathscr{A}_1 = 26 \text{ m}^2$.

(b) Calculons l'aire $\mathscr{A}_2$ de la zone 2.

FEB est rectangle en E donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= \frac{1}{2} \times FE \times EB \\ &= \frac{1}{2} \times (4 \text{ m}) \times (8 \text{ m}) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$\mathscr{A}_2 = 16 \text{ m}^2$.

(c) Calculons l'aire $\mathscr{A}_3$ de la zone 3.

L'aire de l'entrée e forme de demi-disque est $\mathscr{A}_e = \frac{1}{2} \times \pi \left(1\text{m}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\ \text{m}^2$ donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_3 &= 100\ \text{m}^2 - \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 - \frac{\pi}{2}\ \text{m}^2 \\ &= 100\ \text{m}^2 - 26\ \text{m}^2 - 16\ \text{m}^2 \frac{\pi}{2}\ \text{m}^2 \\ &= \left(100 - 26 - 16 - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_3 = \left(58 - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}^2.}$$

En tronquant

$$\mathscr{A}_3 \approx 56{,}42\ \text{m}^2$$

$$\boxed{\text{En arrondissant au dixième } \mathscr{A}_3 \approx 56{,}4\ \text{m}^2.}$$

5. Déterminons la masse totale m_f de fraises.

Puisqu'on peut planter 6 fraisier par mètre carré, le nombre total de fraisier est, en prenant une valeur approchée par défaut :

$$6 \times 56{,}4 \approx 338.$$

Nous en déduisons la masse totale de fraises escomptée :

$$\begin{aligned}m_f &\approx 338 \times 650\ \text{g} \\ &\approx 219700 \times \frac{1}{1000}\ \text{kg} \\ &\approx 219{,}7\ \text{kg}\end{aligned}$$

$$\boxed{m_f \approx 220\ \text{kg}.}$$

Partie B.

1. Déterminons la masse m_s de sucre.

   La masse de sucre doit représenté 55 % de la masse totale m_T autrement dit

$$m_s = \frac{55}{100} \times m_T$$

   Par conséquent la masse de fraisse représente 45 % de la masse totale :

$$\frac{45}{100} \times m_T = 25 \text{ kg}$$

   Nous pouvons en déduire la masse totale :

$$\begin{aligned} \frac{100}{45} \times \frac{45}{100} m_T &= \frac{100}{45} \times 25 \text{ kg} \\ m_T &= \frac{500}{9} \text{ kg} \end{aligned}$$

   Nous en déduisons la masse de sucre :

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{55}{100} \times \frac{500}{9} \text{ kg} \\ &= \frac{275}{9} \text{ kg} \\ &\approx 30{,}55 \text{ kg} \end{aligned}$$

   En arrondissant à l'entier par excès $m_s \approx 31$ kg.

2. Calculons le volume V_c de confiture.

Masse (en kg)	3	25
Volume (en L)	4,8	V_c

   Puisqu'il y a proportionnalité, nous pouvons utiliser un produit en croix :

$$V_c = \frac{25 \times 4{,}8}{3} \text{ L}$$

   $V_c = 40$ L.

3. Déterminons le nombre n_p de pot.

   * Le volume d'un pot, cylindrique, est

$$\begin{aligned} V_p &= \pi\left(\frac{8{,}4\ \text{cm}}{2}\right)^2 \times (11\ \text{cm}) \\ &= 194{,}04\pi\ \text{cm}^3 \\ &= 194{,}04\pi \times \frac{1}{1000}\ \text{L} \\ &= 0{,}19404\pi\ \text{L} \end{aligned}$$

   * Le volume utilisable dans chaque pot est

$$\begin{aligned} V_u &= \frac{8}{9} \times V_p \\ &= \frac{8}{9} \times 0{,}19404\pi\ \text{L} \\ &\approx 0{,}5420\ \text{L} \end{aligned}$$

   * Connaissant la contenance de chaque pot nous pouvons trouver le nombre de pots nécessaires :

$$\begin{aligned} n_p &= \frac{40\ \text{L}}{0{,}542\ \text{L}} \\ &\approx 73{,}8 \end{aligned}$$

   En arrondissant :

Il faut prévoir 74 pots.

Exercice 5.

1. Déterminons le nombre de feuilles nécessaires.

   * La frise aura une longueur de

$$8{,}8\ \text{m} + 7\ \text{m} + 8{,}8\ \text{m} = 24{,}6\ \text{m}$$

* Nous en déduisons le nombre de feuilles nécessaires

$$\frac{24{,}6 \text{ m}}{29{,}7 \text{ cm}} = \frac{24{,}6 \times 100\text{cm}}{29{,}7 \text{ cm}}$$
$$= 82{,}828282\ldots$$

Il faudra 83 feuilles.

2. Déterminons l'échelle de la frise.

La frise doit représenter $2023 - 476 = 1547$.
Nous avons une situation de proportionnalité

Années	1547	1
Longueur	2460 cm	?

En faisant un produit en croix :

$$\frac{1 \times 2460}{1547} \approx 1{,}590.$$

Chaque année sera représentée par 1,6 cm.

3. (a) En `C2` :

$= (\texttt{B2} - 476) * 1{,}6.$

(b) La colonne `D` indique le nombre de feuilles entières à utiliser depuis le début de la frise.

4. * La longueur de la frise jusqu'à l'année 1492 est

$$(1492 - 496) \times 1{,}6 \text{ cm} = 1593{,}6 \text{ cm}.$$

* $8{,}8 \text{ m} = 8{,}8 \times 100 \text{ cm} = 880 \text{ cm}$.
De même : $7 \text{ m} = 700 \text{ cm}$.
Or $800 \text{ cm} + 700 \text{ cm} = 1500 \text{ cm} < 1593{,}6 \text{ cm}$ donc

la date sera sur le mur sud.

Exercice 6.

1.

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles	20 (1)	60 (2)	80
Nombre de garçons	16	54 (3)	70 (4)
Total	36	114	150

* Nombre de filles : 80.
* 24 % des élèves sont musiciens : $\frac{24}{100} \times 150 = 36$.
* Parmi les élèves musiciens 16 sont des garçons.

Les autres les valeurs se déduisent par sommes ou différences dans l'ordre (1), (2), (3) puis (4) (d'autres ordres sont possibles).

2. (a) Notons G l'événement « l'élève choisi est un garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Modélisons l'expérience aléatoire : Ω, l'univers, est l'ensemble des élèves, et nous le munissons de l'équiprobabilité.

G est réalisé par 70 issues, Ω en en contient 150 donc

$$\mathbb{P}(G) = \frac{70}{150}.$$

Des décompositions en facteurs premiers $70 = 2 \times 5 \times$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ nous déduisons la forme irréductible de la réponse :

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{7}{15}.}$$

(b) Notons FM : « l'élève est une fille musicienne ».

Calculons $\mathbb{P}(FM)$.

FM étant réalisé par 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(FM) &= \frac{20}{150} \\ &= \frac{2^2 \times 5}{2 \times 3 \times 5^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(FM) = \frac{2}{15}.}$$

(c) Notons M : « l'élève est un musicien ».

Calculons $\mathbb{P}(\overline{M})$.

$\overline{M}$ est réalisé par 114 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \frac{114}{150} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 19}{2 \times 3 \times 5^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(M) = \tfrac{19}{25}.}$$

3. Avec les probabilités conditionnelles :

Calculons $\mathbb{P}_G(M)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_G(M) &= \frac{\mathbb{P}(G \cap M)}{\mathbb{P}(G)} \\ &= \frac{\frac{16}{150}}{\frac{70}{150}} \\ &= \frac{16}{70} \\ &= \frac{2^4}{3 \times 5 \times 7}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_G(M) = \tfrac{16}{70}.}$$

Il est possible de raisonner en changer de modélisation.
Notons Ω' l'ensemble 70 garçons et munissons-le de l'équiprobabilité.
Dans cet univers M est réalisé par 16 donc

$$\mathbb{P}'(M) = \frac{16}{70}.$$

4. Calculons la proportion de musiciennes d'instruments à vent dans l'école.

* Le nombre de filles jouant d'un instrument à vent est

$$\frac{30}{100} \times 20 = 6.$$

* La proportion représentée par les 6 filles est

$$\frac{6}{150} = \frac{1}{25}.$$

Enfin, comme $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$.

4 % des élèves sont des filles jouant d'un instrument à vent.

Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Exercice 1.

1. Calculons CD.

   Toutes les longueurs sont exprimées en mètre donc nous pouvons ne pas nous préoccuper des unités.

   BCD est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,

   $$BD^2 + BC^2 = CD^2.$$

   Or $BD = FE - AB = 80 - 50 = 30$ donc

   $$\begin{aligned} CD^2 &= 30^2 + 40^2 \\ &= 2500 \end{aligned}$$

   Puisque CD est une longueur, c'est un nombre positif et donc :

   $$\begin{aligned} CD &= \sqrt{2500} \\ &= 50 \end{aligned}$$

   $CD = 50$ m.

2. Calculons la longueur L du parcours.

$$\begin{aligned} L &= AB + BC + \overset{\frown}{CD} + DE + EF + FA \\ &= 50 + 40 + \overset{\frown}{CD} + 30 + 80 + 30 \end{aligned}$$

Or $\overset{\frown}{CD}$ est un demi-cercle de diamètre $[CD]$ donc sa longueur est (la moitié du périmètre du cercle) :

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{CD} &= \frac{1}{2} \times 2\pi \frac{CD}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi \frac{50}{2} \\ &\approx 78{,}539 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} L &\approx 50 + 40 + 78{,}54 + 30 + 80 + 30 \\ &\approx 308{,}54 \end{aligned}$$

En arrondissant à l'unité

$$\boxed{L \approx 309 \text{ m.}}$$

3. Calculons toutes les longueurs mises à l'échelle.

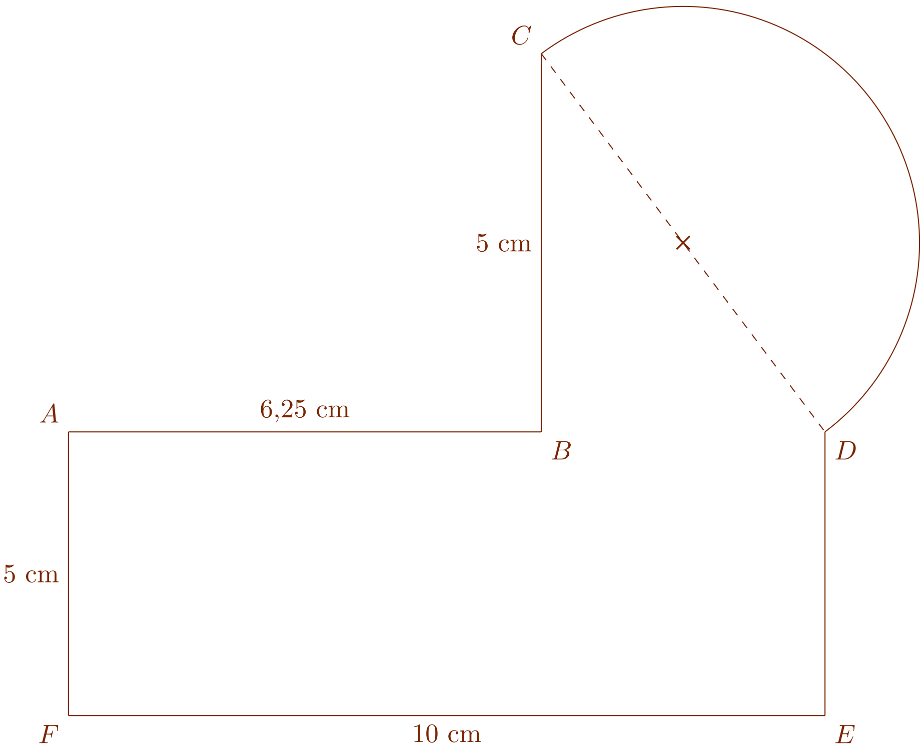
Notons $A'B'$ la longueur AB mise à l'échelle.

$$\begin{aligned} A'B' &= \frac{1}{800} \times 50 \text{ m} \\ &= 50 \times \times 100 \text{ cm} \\ &= 50 \times \frac{1}{8} \text{ cm} \\ &= 6{,}25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nous remarquons qu'il suffit de diviser la longueur réelle exprimée en mètre par 8 pour obtenir la longueur mise à l'échelle en centimètre.
En procédant de même :

Longueur réelle (en m)	50	40	80	30
Longueur à l'échelle en centimètre.	6,25	5	10	3,75

Nous en déduisons le dessin à l'échelle (aucune difficulté pour peu qu'on ait équerre et compas) :



4. Calculons la vitesse moyenne v_K.

$$\begin{aligned} v_K &= \frac{309 \text{ m}}{3 \text{ min}} \\ &= \frac{309 \text{ m}}{3{\times}60 \text{ s}} \\ &= \frac{309}{3 \times 60} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 1{,}716 \text{ m/s en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_K \approx 1{,}72 \text{ m/s.}}$$

$$\begin{aligned} v_K &= \frac{309 \text{ m}}{3 \text{ min}} \\ &= \frac{309 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{3 \times \frac{1}{60} \text{ h}} \\ &= \frac{309 \times \frac{1}{1000}}{3 \times \frac{1}{60}} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 6{,}18 \text{ km/h} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_K \approx 6{,}2 \text{ km/h.}}$$

5. (a) Calculons le nombre T_S de tours de Sophia en 18 minutes.

Nous allons exprimer toutes les grandeurs en mètre et minute.
La distance parcourue par Sophia en 18 minutes est

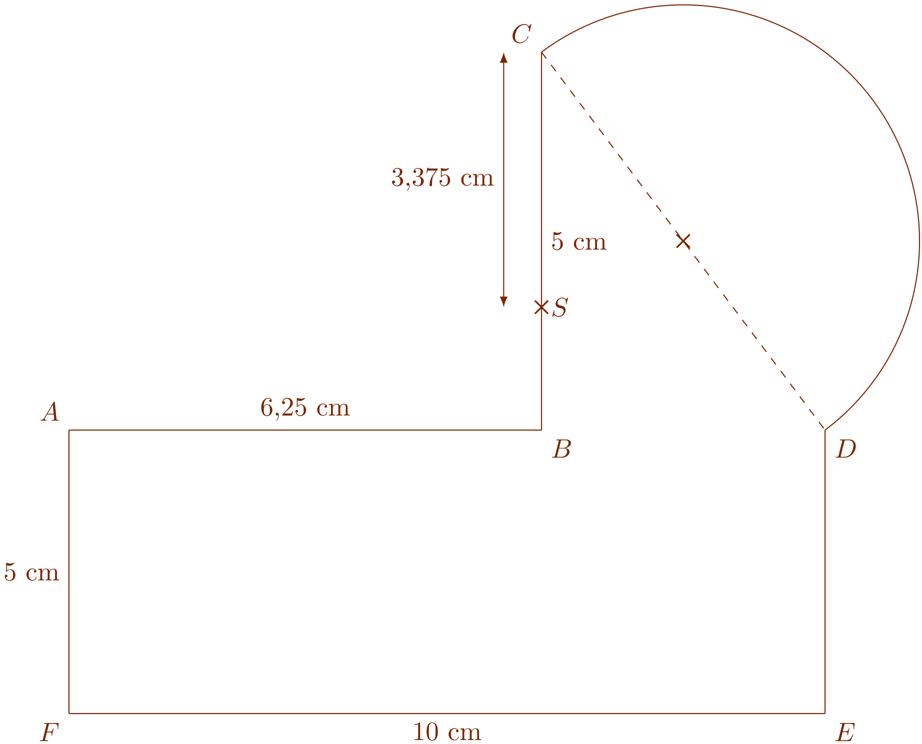
$$\begin{aligned} d_S &= 7 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 18 \text{ min} \\ &= 7 \frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ min}} \times 18 \text{ min} \\ &= \frac{7 \times 1000 \times 18}{60} \frac{\text{m} \cdot \text{min}}{\text{min}} \\ &= 2100 \text{ m} \end{aligned}$$

or chaque toue a une longueur de 309 m donc

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{2100 \text{ m}}{309 \text{ m}} \\ &= \frac{2100}{309} \\ &\approx 6{,}796 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Sophia fera 6 tours complets.}}$$

(b) En procédant à une division euclidienne : $2100 = 6 \times 309 + 246$.
Il lui restait 309 m − 246 m = 63 m pour finir un tour. Sur le trajet $[CB]$ elle avait déjà parcouru 50 m + 40 m − 63 m = 27 m.
Par conséquent S est à $\frac{27}{8}$ cm = 3,375 cm de C sur le trajet $[CB]$.



6. (a) Calculons le nombre moyen $\overline{x}$ de tours.

La série étant regroupée par modalité (les valeurs différentes et les effectifs correspondant) nous allons utiliser la formule de la moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} \\ &= \frac{52 \times 2 + 52 \times 3 + \cdots + 13 \times 8}{52 + 52 + \cdots + 13}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} = 4{,}36 \text{ tours.}}$$

(b) Calculons l'étendue e.

$$\begin{aligned} e &= \max - \min \\ &= 8 - 2 \end{aligned}$$

$e = 6$ tours.

(c) Déterminons la médiane Me.

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13
E.C.C.	52	104	182	247	286	312	325

* Ordonner la série. La série des nombres de tours est déjà rangée dans l'ordre croissant.
* Position de Me. $\frac{N}{2} = \frac{325}{2} = 162{,}5$, la série étant impaire Me est la 163-ième valeur de la série ordonnée.
* Lecture de la valeur de Me. D'après les effectifs cumulés croissants,

$Me = 4$ tours.

(d) Interprétation de la médiane dans la version verre à moitié vide.

50 % des élèves ont fait moins de 4 tours complets.

Déterminons Q_1.

* La série est ordonnée (dans le tableau).
* $\frac{N}{4} = \frac{325}{4} = 81{,}25$ donc Q_1 est la 82i-ième valeur de la série ordonnée.
* D'après les E.C.C.

$Q_1 = 3$ tours.

Déterminons Q_3.

* La série est ordonnée (dans le tableau).
* $\frac{3N}{4} = \frac{325}{4} = 243{,}75$ donc Q_3 est la 244i-ième valeur de la série ordonnée.
* D'après les E.C.C.

$$Q_3 = 5 \text{ tours.}$$

(e) En première approximation, en utilisant la médiane, nous pourrions dire qu'environ 50 % des élèves ont fait au moins 4 tours complets.

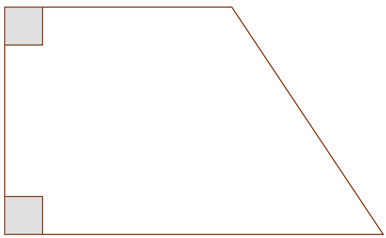
Calculons le pourcentage p d'élèves ayant fait au moins 4 tours.

$$\begin{aligned} p &= \frac{78 + 65 + 39 + 26 + 13}{325} \times 100 \\ &\approx 64{,}923 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

64,92 % des élèves ont fait au moins 4 tours complets.

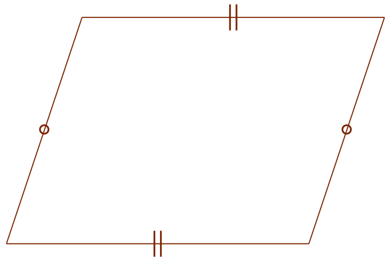
Exercice 2.

1. Les trapèzes rectangles ne sont pas nécessairement des rectangles :

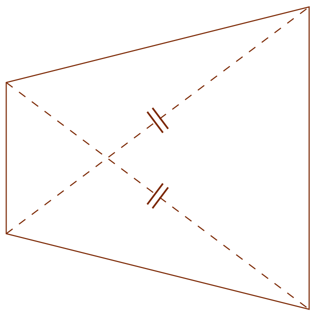


Les quadrilatères possédant deux angles droits ne sont pas tous des rectangles.

2. (a) Tous les parallélogrammes ont des côtés opposés de même longueurs deux à deux cependant tous les parallélogrammes ne sont pas des rectangles.



(b) Voici un quadrilatère dont les diagonales ont même longueur.



Et pourtant cette figure n'est clairement pas un rectangle.

3. Je ne pense pas qu'une justification soit attendue pour une telle question. Si c'était le cas il faudrait établir que deux côtés consécutifs ont même longueur en utilisant le théorème de Pythagore.

   Un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est un carré.

4. Il s'agit visiblement d'un quadrilatère non croisé dont les côtés ont tous la même longueur donc

   $ABCD$ est un losange.

Exercice 3.

	réponse	a	b	c	d
demander donner un nombre et attendre	2				
mettre a à réponse	2	2			
mettre b à (2 * a) + 5	2	2	9		
mettre c à (5 * a) - 4	2	2	9	6	
mettre d à b * c	2	2	9	6	54

	réponse	a	b	c	d
demander donner un nombre et attendre	1,15				
mettre a à réponse	1,15	1,15			
mettre b à (2 * a) + 5	1,15	1,15	7,3		
mettre c à (5 * a) - 4	1,15	1,15	7,3	1,75	
mettre d à b * c	1,15	1,15	7,3	1,75	12,775

Si le nombre saisi est 1,15 le programme renvoie 12,775.

3. En reprenant le tableau d'état des variables, si le nombre saisi par l'utilisateur est x le programme retourne : $(2x+5)(5x-4)=0$.
   Cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
2x + 5 = 0 &\quad \text{ou} \quad 5x - 4 = 0 \\
2x + 5 - 5 = 0 - 5 &\quad \text{ou} \quad 5x - 4 + 4 = 0 + 4 \\
2x = -5 &\quad \text{ou} \quad 5x = 4 \\
\frac{2x}{2} = \frac{-5}{2} &\quad \text{ou} \quad \frac{5x}{5} = \frac{4}{5} \\
x = -\frac{5}{2} &\quad \text{ou} \quad \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Le programme retourne le nombre 0 en choisissant $-\frac{5}{2}$ ou $\frac{4}{5}$.

4. (a)

Choisir un nombre.	3
Prendre son double.	6
Ajouter 5.	11
Calculer le carré du résultat.	121

Si l'utilisateur choisi 3 le programme renvoie 121.

(b)

Choisir un nombre.	$\frac{3}{4}$
Prendre son double.	$\frac{3}{2}$
Ajouter 5.	$\frac{13}{2}$
Calculer le carré du résultat.	$\frac{169}{4}$

Si l'utilisateur choisi $\frac{3}{4}$ le programme renvoie $\frac{169}{4}$.

5. (a) La cellule `D2` permet de retrouver le résultat 4.(a).

(b) En cellule `A2` :

$$= (2 * \texttt{A1} + 5) \wedge 2$$

6. (a) Déterminons pour quel nombre de départ x le programme renvoie 0.

Choisir un nombre.	x
Prendre son double.	$2x$
Ajouter 5.	$2x+5$
Calculer le carré du résultat.	$(2x+5)^2$

Ainsi nous voulons que :

$$(2x+5)^2 = 0.$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 2x+5 &= 0 \\ 2x+5-5 &= 0-5 \\ 2x &= -5 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{-5}{2} \\ x &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Pour que le programme B renvoie 0 il faut choisir $-\frac{5}{2}$ comme nombre de départ.

(b) $\frac{-5}{2}$ est une fraction, c'est-à-dire le quotient d'un entier par un autre entier, donc

$-\frac{5}{2}$ est un nombre rationnel.

(c) Justifions que $-\frac{5}{2}$ est décimal.

Il y a de nombreuses approches : il admet une écriture décimale dont la partie décimale est finie, il s'écrit sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, il s'écrit sous forme d'une fraction dont le dénominateur est un produit de puissances de 2 et de 5.

$-\frac{5}{2} = -2{,}5$ puisqu'il admet une écriture décimale dont la partie décimale est finie

$-\frac{5}{2}$ est un nombre décimal.

7. La question est ambiguë : faut-il que le nombre de départ soit le même pour le programme A et le programme B ? Nous allons supposer que oui. Et la question revient à :

   Résolvons l'équation $(2x+5)(5x-4) = (2x+5)^2$.

   On pourrait être tenté de simplifier par $2x+5$ mais ce serait exclue une solution au problème. Nous allons ici nous ramener à une équation produit nul.
   L'équation équivaut successivement à :

$$
\begin{aligned}
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)^2 = (2x+5)^2-(2x+5)^2 &= 0\\
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)^2 &= 0\\
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)\times(2x+5) &= 0\\
(2x+5)\left[(5x-4)-(2x+5)\right] &= 0\\
(2x+5)\left[5x-4-2x-5\right] &= 0\\
(2x+5)(3x-9) &= 0\\
2x+5=0 \quad &\text{ou} \quad 3x-9=0\\
2x+5-5=0-5 \quad &\text{ou} \quad 3x-9+9=0+9\\
2x=-5 \quad &\text{ou} \quad 3x=9\\
\frac{2x}{2}=\frac{-5}{2} \quad &\text{ou} \quad \frac{3x}{3}=\frac{9}{3}\\
x=-\frac{5}{2} \quad &\text{ou} \quad x=3
\end{aligned}
$$

Les programmes renvoient les mêmes nombres si les nombres de départ sont $-\frac{5}{2}$ ou 3.

Exercice 4.

1. (a) Notons T_1 : « elle touche un bateau au premier tir ».

   Calculons $\mathbb{P}(T_1)$.

L'univers est formé des $8 \times 8 = 64$ cases de la grille. Les choix d'une telle case sont supposés équiprobables. T_1 est réalisé par 12 issues, à savoir les cases grisées : $(A,4)$, $(B,4)$, ...
Donc

$$\mathbb{P}(T_1) = \frac{12}{64}.$$

$$\mathbb{P}(T_1) = \frac{3}{16}.$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(\overline{T_1})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{T_1}) &= 1 - \mathbb{P}(T_1)\\ &= 1 - \frac{3}{16}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\overline{T_1}) = \frac{13}{16}.$$

(c) Déterminons le nombre n_c de cases formant le bateau recherché.

Il y a équiprobabilité entre les cases, il y a 64 cases au total, est l'événement T_2 : « le bateau recherché est touché est réalisé par n_c cases donc

$$\mathbb{P}(T_2) = \frac{n_c}{64}$$

Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{16}$ donc

$$\frac{1}{16} = \frac{n_c}{64}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}\times 64 &= \frac{n_c}{64}\times 64\\ 4 &= n_c\end{aligned}$$

Le bateau recherché est formé de 4 cases.

(d) Notons T_3 : « toucher un bateau en tirant dans la colonne B ».

Calculons $\mathbb{P}_2(T_3)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 8 cases de la colonne B qui sont toutes équiprobables et l'événement T_3 regroupe les 4 cases grisées de la colonne B donc

$$\mathbb{P}_2(T_3) = \frac{4}{8}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_2(T_3) = \frac{1}{2}.}$$

2. Notons $T4$: « couler le bateau au coup suivant ».

Calculons $\mathbb{P}_3(T_4)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 3 cases qui entourent la cases E1 et qui permettent de placer un bateau et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_4 regroupe la seule case grisée adjacente à E1 donc

$$\boxed{\mathbb{P}_3(T_4) = \frac{1}{3}.}$$

3. L'utilisation du présent dans l'énoncé des questions 3 et 4 crée une ambiguïté. Nous admettrons que la question 2 n'a pas eu lieu.

Notons T_5 : « toucher un bateau après deux coups dans l'eau suivant ».

Calculons $\mathbb{P}_4(T_5)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des $64 - 2 = 62$ cases qui n'ont pas été visées et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_5 regroupe les 12 cases grisées donc

$$\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{12}{62}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{6}{31}.}$$

Exercice 5.

1. Convertissons des Fahrenheit vers les Celsius.

   95°F exprimés en degrés Celsius donnent

$$\begin{aligned} C &= (95-32)\frac{5}{9} \\ &= 35 \end{aligned}$$

   $$\boxed{95°\text{F} = 35°\text{C}.}$$

2.
3. Déterminons F de sorte que $C = F$.

   On veut

$$\begin{aligned} F &= (F-32)\times\frac{5}{9} \\ \frac{9}{5}F &= F-32 \\ \frac{9}{5}F - F &= -32 \\ \frac{4}{5}F &= -32 \\ F &= -32\times\frac{5}{4} \\ F &= -40 \end{aligned}$$

   Les mesures en Celsius et Fahrenheit sont égales dans un seul cas : $-40°\text{C} = -40°\text{F}$.

Exercice 6.

1. Effectuons 6×8.
   — Avec le pied et la main gauches, on lève les 5 orteils et 1 doigt, représentant ainsi le 6.

— Avec le pied et la main droites, on lève les 5 orteils et 3 doigts, représentant ainsi le 8.
La somme du nombre de doigts levés nous indique un nombre de dizaines (ici $1 + 3 = 4$), le produit des doigts baissés nous indique un nombre d'unités (ici $4 \times 2 = 8$.
Donc

$$6 \times 8 = 48.$$

2. (a) $5 - g$ est le nombre de doigts baissés de la main gauche et $5 - d$ celui de la main droite.

(b) Démontrons l'égalité proposée.

D'une part :

$$\begin{aligned}(5+g)(5+d) &= 5 \times 5 + 5 \times d + g \times 5 + g \times d \\ &= 25 + 5d + 5g + gd \\ &= gd + 5d + 5g + 25\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}&10(g+d) + (5-g)(5-d) \\ &= 10 \times d + 10 \times g + 5 \times 5 + 5 \times (-d) + (-g) \times 5 + (-g) \times (-d) \\ &= 10d + 10g + 25 - 5d - 5g + gd \\ &= gd + 5d + 5g + 25\end{aligned}$$

donc, par transitivité,

$$(5+g)(5+d) = 10(g+d) + (5-g)(5-d).$$

(c) La règle de calcul est donc valable.

Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Exercice 1.

1. Avec la calculatrice : $4\,216 \div 17 = 248$.
   Autrement dit $17 \times 248 = 4\,216$ donc

   4 216 est un multiple de 17.

2. (a) Un nombre est divisible par 3 si

   la somme des chiffres qui le compose est un multiple de 3.

   (b) Notons n le chiffre des unités du nombre de l'exemple.
   Nous devons avoir $2 + 2 + 9 + n = 13 + n$ qui est un multiple de 3.
   Testons toutes les possibilités :

n	$13 + n$
1	14
2	15
3	16
4	17
5	18
6	19
7	20
8	21
9	22

   Le chiffre des unités caché est 2 ou 5 ou 8.

3. (a) Démontrons que 413 est divisible par 7.

   $41 - 2 \times 3 = 35$ or $35 = 5 \times 7$ donc

   423 est divisible par 7.

(b)

$$529 - 2 \times 2 = 525$$
$$52 - 2 \times 5 = 42$$

Or $42 = 6 \times 7$ donc 42 est un multiplie de 7.
Nous en déduisons que 525 est un multiple de 7.
Nous en déduisons enfin que

5 292 est un multiple de 7.

(c) Dans `C1` : « = `A1` − 10 ∗ `B1` ».

Dans `D1` : « = `B1` − 2 ∗ `C1` ».

(d) Le 7 (visible dans la cellule `D5`) est divisible par 7 donc il en est de même successivement pour 112, 1 120, 11 389, 113 890 et enfin 1 138 984.

1 138 984 est un multiple de 7.

Exercice 2.

1. (a) Calculons BC.

Toutes les longueurs considérées sont exprimées dans la même unité, le mètre, on peut donc ne pas l'indiquer dans nos calculs sans que cela soit source d'erreur.

Puisque ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} BC^2 &= 300^2 + 400^2 \\ &= 250\,000 \end{aligned}$$

Puisque BC est une longueur c'est un nombre positif et donc

$$BC = \sqrt{250\,000}$$

$$\boxed{BC = 500 \text{ m.}}$$

(b) Calculons CF.

* C, I, B d'une part et C, I, B d'autre part sont alignés dans cet ordre (puisque $F \in [AC]$ et $I \in [BC]$). Ainsi nous avons une configuration de Thalès.
* $(AB) \parallel (FI)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CF}{AC} = \frac{IC}{BC}.$$

Autrement dit :

$$\frac{CF}{400} = \frac{350}{500}$$

Donc

$$\frac{CF}{400} \times 400 = \frac{350}{500} \times 400$$
$$CF = \frac{350}{500} \times 400$$

$$\boxed{CF = 280 \text{ m.}}$$

Calculons IF.

De même que ci-dessus

$$\frac{IF}{AB} = \frac{IC}{BC}.$$

Autrement dit :

$$\frac{IF}{300} = \frac{350}{500}$$

Donc

$$IF = \frac{350}{500} \times 300$$

$$IF = 210 \text{ m.}$$

(c) Calculons ED.

* B, C, D d'une part et A, C, E d'autre part sont alignés dans cet ordre (puisque les droites (AE) et (BD) se coupent en C). Ainsi nous avons une configuration de Thalès.
* $(AB) \parallel (ED)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{BC}.$$

Autrement dit :

$$\frac{ED}{300} = \frac{1250}{500}$$

Donc

$$ED = \frac{1250}{500} \times 300$$

$$ED = 750 \text{ m.}$$

(d) Calculons la longueur ℓ de la ligne brisée $ABIFCDE$.

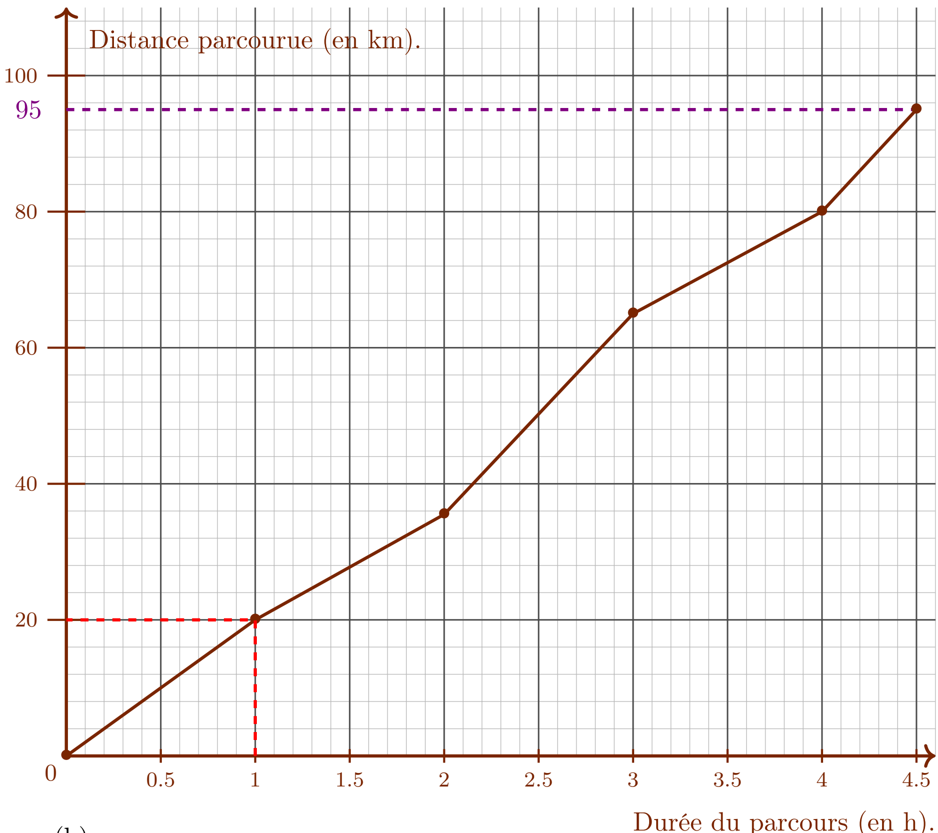
$$\begin{aligned}\ell &= AB + BI + IF + FC + CD + DE \\ &= 300 + (BC - IC) + 210 + 280 + 1250 + 750 \\ &= 300 + (500 - 350) + 210 + 280 + 1250 + 750\end{aligned}$$

$$\ell = 2940 \text{ m.}$$

2. (a) Les fonctions qui représente les situations de proportionnalité sont les fonctions linéaires. Or les courbes représentatives de fonctions linéaires sont des droites passant par l'origine du repère.

La courbe n'étant pas une droite

il n'y a pas proportionnalité entre la durée et la distance parcourue.



(b)

En une heure il a parcouru 20 km.

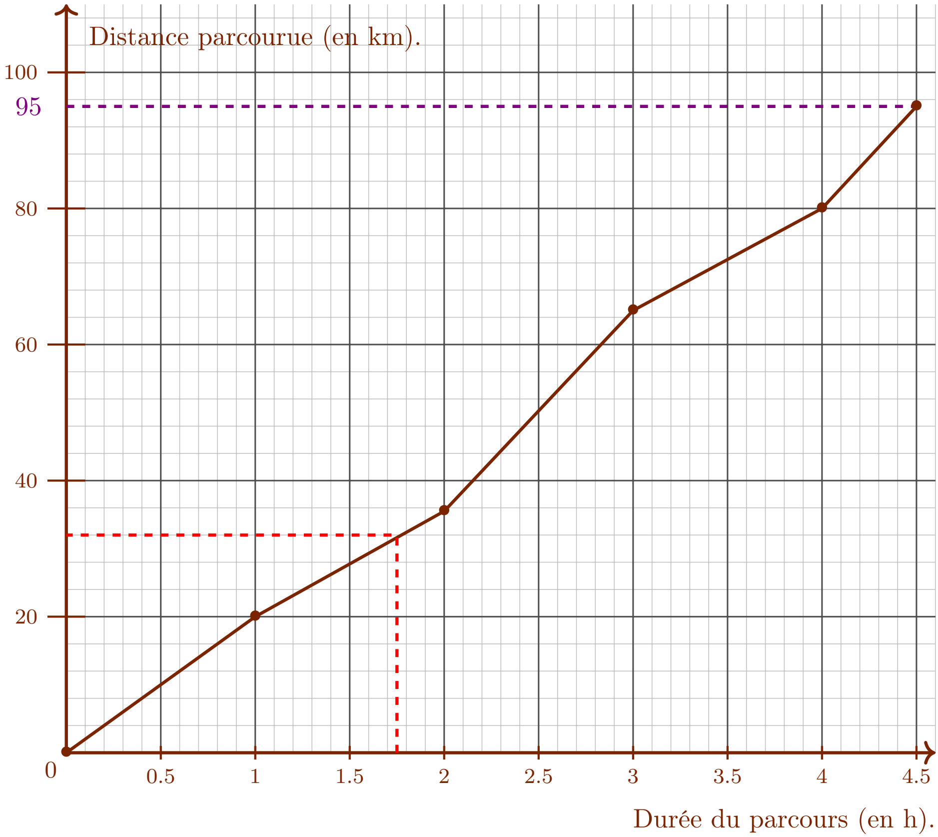
(c) Déterminons la vitesse moyenne, v_1, pendant la première heure.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{20 \text{ km}}{1 \text{ h}} \\ &= \frac{20 \times 1000 \text{ m}}{1 \times 60 \text{ min}} \\ &= \frac{20000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\ &= \frac{50}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 5{,}555 \text{ m/s en tronquant,} \end{aligned}$$

donc en arrondissant au centième

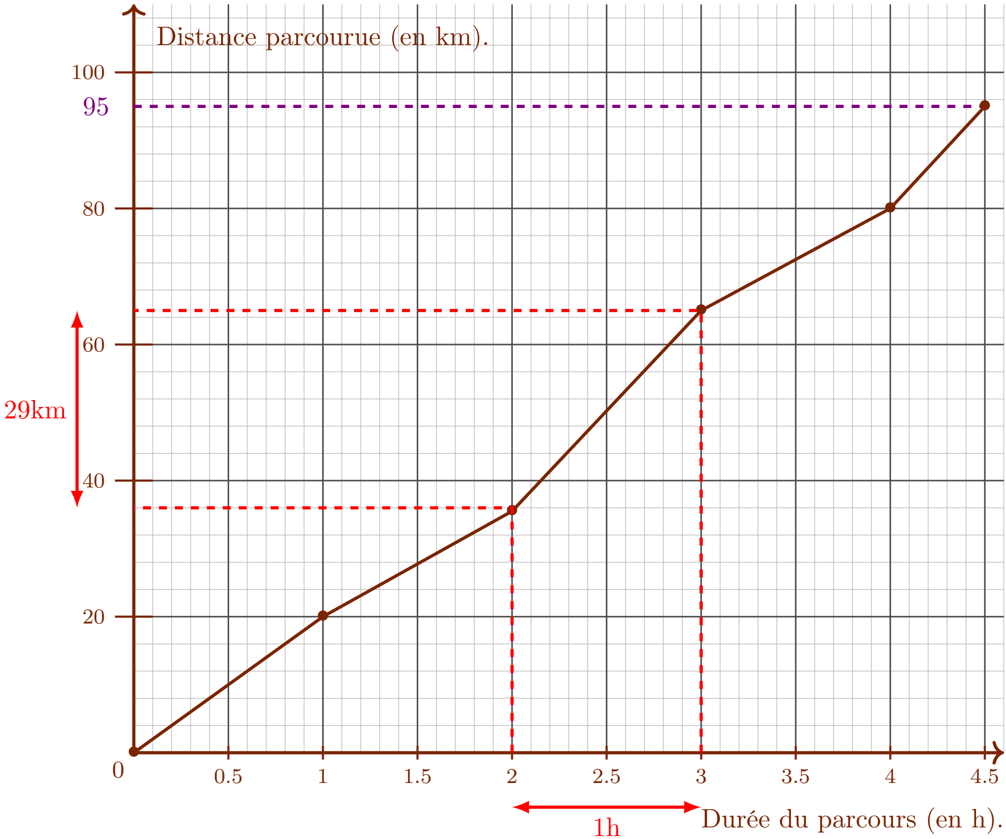
$v_1 \approx 5{,}56$ m/s.

(d) 1 h 45 = 1,75 h.



En 1 h 45 il a parcouru 32 km.

(e) Déterminons la vitesse, v_2, pendant la troisième heure.



$$v_2 = \frac{29 \text{ km}}{1\text{km}}$$

$$\boxed{v_2 = 29 \text{ km/h.}}$$

(f) Comparons v_1 et v_2.

Calculons le taux d'évolution entre ces deux vitesses exprimé en pourcentage :

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{29 - 20}{20} \times 100 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Autrement dit $t > 40$.

$$\boxed{\text{Sa vitesse moyenne lors de la troisième heure est supérieure de plus de 40 \% à sa vitesse moyenne lors de la première heure.}}$$

(g) Déterminons la vitesse moyenne v_3 durant la sortie.

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{95 \text{ km}}{4{,}5 \text{ h}} \\ &= \frac{19}{9} \frac{\text{km}}{\text{h}} && \approx 2{,}111 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{v_3 \approx 2{,}11 \text{ km/h}.}$$

Exercice 3.

1. - Puisque la figure à quatre côtés

   $$\boxed{\text{l'affirmation « c'est un quadrilatère » est vraie.}}$$

   - Puisque le quadrilatère à quatre côtés de même longueur, 100 pas

   $$\boxed{\text{l'affirmation « c'est un losange » est vraie.}}$$

   - Puisque le quadrilatère a trois angles droits (de 90°)

   $$\boxed{\text{l'affirmation « c'est un rectangle » est vraie.}}$$

- Puisque le quadrilatère est à la fois un losange et un rectangle

> l'affirmation « c'est un carré » est vraie.

2. (a) Déterminons RS de sorte que les cotés mesurent 7 cm.

   Puisque la longueur des côtés du pentagone obtenu est proportionnelle à RS nous avons le tableau de proportionnalité suivant, où toutes les longueurs sont exprimées en centimètres :

RS	4	x
Côté	$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	7

   À l'aide d'un produit en croix :

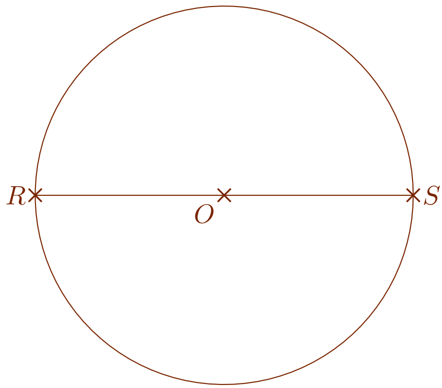
$$x = \frac{4\times 7}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$
$$\approx 11{,}909 \text{ en tronquant.}$$

> Pour que le côté mesure 7 cm il faut que $RS \approx 11{,}9$ cm.

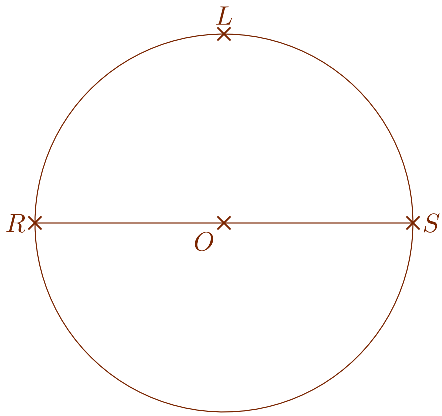
   (b) Tracer un segment [RS].
   Avec $RS = 12$ cm.

   Placer le point O au milieu du segment $[RS]$.

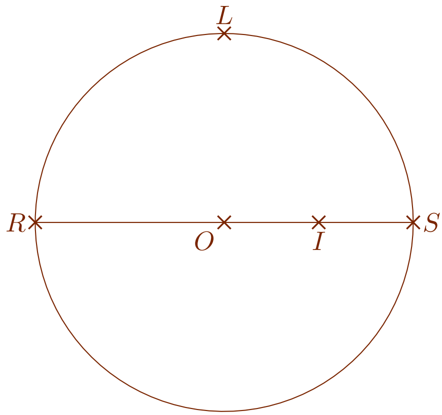
   Tracer le cercle de diamètre $[RS]$.



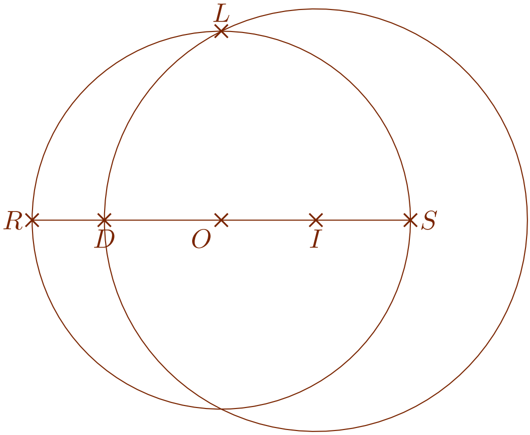
Soit L un point de ce cercle tel que $(OL) \perp (RS)$.



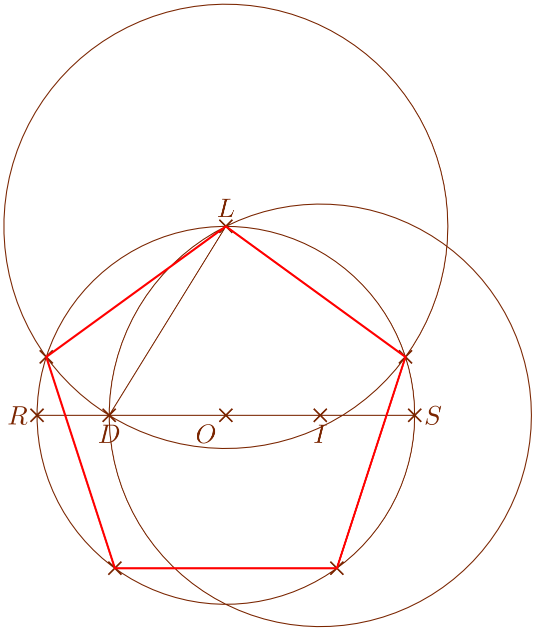
Placer le point I au milieu du segment $[OS]$.



Le cercle de centre I et de rayon IL coupe le segment $[RO]$ en D.



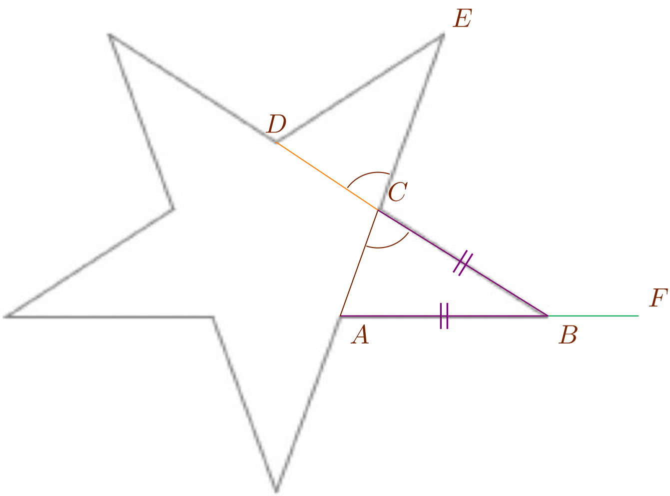
LD est la longueur des côtés du pentagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre $[RS]$, placer les 5 sommets du pentagone sur le cercle.



(c)

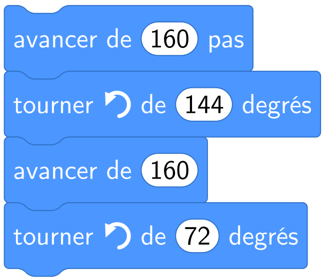
(d) L'étoile est formée de 10 segments faisant tous 80 pas donc

L'étoile a un périmètre de 800 pas.



(e)

D'après le programme fourni $\widehat{DCE} = 72°$ donc $\widehat{ACB} = 72°$.
Comme ABC est isocèle en B, $\widehat{CAB} = 72°$.
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle égale 180°, $\widehat{ABC} = 180° - 72° - 72° = 36°$.
Finalement $\widehat{FBC} = 180° - 36° = 144°$.



Exercice 4.

1. Les deux nombres étant distincts il peut prendre le nombre de jeton égale soit au plus grand des deux nombres obtenus, c'est-à-dire 3, soit le double du plus petit donc $2 \times 2 = 4$, soit encore passer son tour et n'obtenir aucun jeton.

L'ensemble des cas possibles est $\{3; 4; 0\}$.

2. En distinguant les deux dés, un tirage est assimilable à un couple de nombre entiers compris (au sens large) entre 1 et 6. Par exemple (1,3) représente l'événement obtenir 1 avec le premier dé et 3 avec le second.

Intuitivement :

L'ensemble des tirages permettant d'obtenir 3 est $\{(1{,}3),(2{,}3),(3{,}3),(3{,}2),(3{,}1)\}$.

Pour s'en convaincre nous pouvons représenter dans un tableau double entrée le nombre de jetons obtenus en fonction des résultats des dés (sans tenir compte de la possibilité de passer son tour qui rajouterai un zéro dans chaque casse du tableau.

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2 / 3	2 / 4	2 / 5	2 / 6
2	2	2	4 / 3	4	4 / 5	4 / 6
3	3 / 2	3 / 4	3	6 / 4	6 / 5	6
4	4 / 2	4	4 / 6	4	8 / 5	8 / 6
5	5 / 2	5 / 4	5 / 6	5 / 8	5	10 / 6
6	6 / 2	6 / 4	6	6 / 8	6 / 10	6

3. (a) Notons A : « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Les deux dés étant bien équilibrés il semble naturel de modéliser la situation en choisissant pour univers l'ensemble des 36 couples de nombres que donnent les dés et pour loi de probabilité la loi uniforme (équiprobabilité).

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et $A = \{(2{,}3),(3{,}2)\}$ est réalisé par deux issues donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}.$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}.$$

(b) Notons B : « au moins un des nombres obtenus est 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et

$$B = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(2,6),(3,5),(3,4),(3,2),(3,1)\}$$

est réalisé par 11 issues donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}.$$

(c) Notons C : « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et, d'après ce tableau

D_1 / D_2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2 / 3	2 / 4	2 / 5	2 / 6
2	2	2	4 / 3	4	4 / 5	4 / 6
3	3 / 2	3 / 4	3	6 / 4	6 / 5	6
4	4 / 2	4	4 / 6	4	8 / 5	8 / 6
5	5 / 2	5 / 4	5 / 6	5 / 8	5	10 / 6
6	6 / 2	6 / 4	6	6 / 8	6 / 10	6

C est réalisé par 13 issues donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{13}{36}.$$

4. Il n'y a aucun lien entre deux lancés de dé. Les lancés sont indépendants. Ces sont des expériences aléatoires indépendantes et par conséquent

   la probabilité reste identique.

5. Il peut prendre $2 \times 1 = 2$ jetons ou 4 jetons.

   Il ne peut pas prendre 4 jetons puisqu'il a déjà 12 jetons et qu'il dépasserait l'objectif de 15 jetons.

   S'il prend les 2 jetons il en aura maintenant 14 et il devra n'en obtenir qu'un seul ensuite. Or la probabilité d'obtenir un seul jeton est de $\frac{1}{36}$ et celle d'obtenir directement 3 jetons est bien plus élevée.

   Il est préférable qu'il passe son tour en espérant obtenir un 3 au tour suivant.

Exercice 5.

257 admet une écriture décimale dont la partie décimale ne comporte que des 0.

On peut aussi bien argumenté que 257 peut s'écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 puisque : $257 = \frac{257}{10^0}$.

L'affirmation 1 est vraie.

La somme (ou différence) de deux nombres rationnels est un nombre rationnel. Nous pouvons le vérifier dans ce cas particulier.

$$\begin{aligned}
\frac{7}{3} - 8 &= \frac{7}{3} - \frac{8}{1} \\
&= \frac{7}{3} - \frac{8\times3}{1\times3} \\
&= \frac{7}{3} - \frac{24}{3} \\
&= \frac{7-24}{3} \\
&= \frac{-17}{3}
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu un quotient d'entiers donc il s'agit bien d'une fraction ;

L'affirmation 2 est vraie.

Quelques essais permettent de conjecturer que le résultat est vrai. Démontrons-le.

Démontrons que l'affirmation est vraie.

Soit n un nombre entier. Les nombres entiers qui le suivent sont $n+1$ et $n+2$. Considérons leur somme :

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= n+n+1+n+2 \\ &= 3n+3\times 1 \\ &= 3n+3\times 1 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

On a montré que, pour tout entier n, $n+(n+1)+(n+2)$ est un multiple de 3.

L'affirmation 3 est vraie.

Résolvons l'équation.

$$(x+1)(x-2) = (x-3)(x+4)$$

équivaut successivement à :

$$(x+1)(x-2)-(x-3)(x+4) = 0x\times x + x\times(-2) + 1\times x + 1\times(-2) - (x\times x +$$

$$\begin{aligned} x^2-2x+x-2-(x^2+4x-3x-12) &= 0 \\ x^2-x-1-(x^2+x-12) &= 0 \\ x^2-x-1-x^2-x+12 &= 0 \\ -2x+11 &= 0 \\ -2x &= -11 \\ x &= \frac{-11}{-2} \\ x &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Puisque $\frac{11}{2}$ est une forme irréductible nous pouvons conclure

L'affirmation 4 est fausse.

Calculons le taux d'évolution global correspondant aux deux augmentations.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 15 % est

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{15}{100} \qquad = 1{,}15 \end{aligned}$$

De même pour une hausse de 10 % le coefficient multiplicateur est $CM_2 = 1{,}1$.
Donc le coefficient multiplicateur global des deux hausses successives est

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 1{,}15 \times 1{,}1 \\ &= 1{,}265 \end{aligned}$$

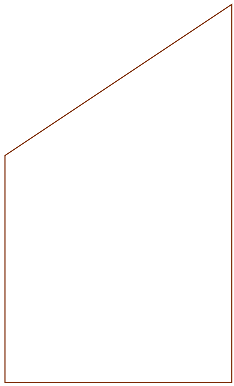
Donc le taux d'évolution global en pourcentage est de

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (1{,}265 - 1) \\ &= 26{,}5 \end{aligned}$$

Or les taux d'évolution correspondant à une augmentation d'un quart est 25 % donc

l'affirmation 5 est fausse.

Donnons un contre-exemple



L'affirmation 6 est fausse.

L'un des angles d'un triangle rectangle a forcément une mesure de 90°.
Tous les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°.

L'affirmation 7 est fausse.

$f(-11) = -3 \times (-11) + 1 = 34 \neq 4$ donc -11 n'est pas un antécédente de 4 par f et donc

l'affirmation 8 est fausse.

Déterminons si ABC est rectangle.

Le plus grand côté de ABC est $[AC]$ donc s'il est rectangle ce ne peut être qu'en B.
Le problème se ramène à déterminer si ABC est rectangle en B.
D'une part $AB^2 + BC^2 = 35^2 + 12^{=}1329$ et d'autre part $39^2 = 1521$ donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore ABC n'est pas rectangle en B.
Et donc il n'est âs rectangle (tout court).

L'affirmation 9 est fausse.

Il s'agit d'un résultat classique : si les dimensions d'une surface sont multipliées par 3 alors son aire est multipliée par $3^2 = 9$. C'est un résultat évident sur un carré un peu moins sur un triangle.

Toujours est-il que l'aire n'est pas multipliée par 3.

L'affirmation 10 est fausse.

Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Exercice 1.

Partie A : étude des trajets.

1. Démontrons que RDF est rectangle en F.

   D'une part

$$\begin{aligned} DF^2 + RF^2 &= 13{,}80^2 + 18{,}91^2 \\ &= 548{,}0281 \end{aligned}$$

   d'autre part

$$\begin{aligned} DR^2 &= 23{,}41^2 \\ &= 548{,}0281 \end{aligned}$$

   donc $DF^2 + RF^2 = DR^2$.
   Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que

   RDF est rectangle en F.

2. Déterminons la durée t du trajet.

$$v = \frac{d}{t}$$

donc

$$\begin{aligned}
t &= \frac{d}{v} \\
&= \frac{23{,}41\ \text{km}}{10\ \text{nœuds}} \\
&= \frac{23\,410\ \text{m}}{10 \times 1\,852\ \text{m}\cdot\text{h}^{-1}} \\
&= \frac{23\,410}{10 \times 1\,852}\ \frac{\text{m}\cdot\text{h}}{\text{m}} \\
&= \frac{23\,410}{10 \times 1\,852} \times 60\ \text{min} \\
&\approx 75{,}84\ \text{min}
\end{aligned}$$

Le trajet dure 76 minutes.

3. (a) Calculons la longueur L d'un tour du fort.

Le tour étant circulaire de rayon 500 m :

$$\begin{aligned}
L &= 2\pi \times 500\ \text{m} \\
&\approx 3141{,}59\ \text{m}
\end{aligned}$$

$L \approx 3\,142$ m.

(b) Calculons la distance L_A du trajet A.

$$\begin{aligned}
L_A &= RF + 2L + FD \\
&= 18{,}91\ \text{km} + 2 \times 3142\ \text{m} + 13{,}8\ \text{km} \\
&= 18{,}91\ \text{km} + 2 \times 3{,}142\ \text{km} + 13{,}8\ \text{km} \\
&= 38{,}994\ \text{km}
\end{aligned}$$

$L_A \approx 39$ km.

4. Calculons la vitesse moyenne v_A sur le trajet A.

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{L_A}{2\ \text{h}} \\ &= \frac{29\ \text{km}}{2\ \text{h}} \\ &= \frac{29}{2}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 19{,}5\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} \\ &= 19{,}5 \times \frac{1}{1{,}852}\ \text{nœud} \\ &\approx 10{,}529\ \text{nœud} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_A \approx 11\ \text{nœud.}}$$

Partie B : étude de tarifs.

1. Calculons la recette $R(30)$ si le prix est fixé à 30 euro.

$$R(30) = 450 \times 30\ \text{euro}$$

$$\boxed{R(30) = 13\,500\ €.}$$

2. (a) Si le prix de la place est de 40 € alors le nombre d'augmentations de 10 centimes = 0,1 € est

$$\frac{40-30}{0{,}10} = 100$$

Donc le nombre de places vendues est

$$450 - 100 \times 3 = 150$$

La recette est alors de

$$R(40) = 150 \times 40 \text{ €}$$

$$\boxed{R(40) = 6\,000 \text{ €}.}$$

(b) Si le prix de la place est de 10 € alors le nombre de diminutions est de 10 centimes = 0,1 € est

$$\frac{30 - 10}{0{,}10} = 200$$

Donc le nombre de places vendues est

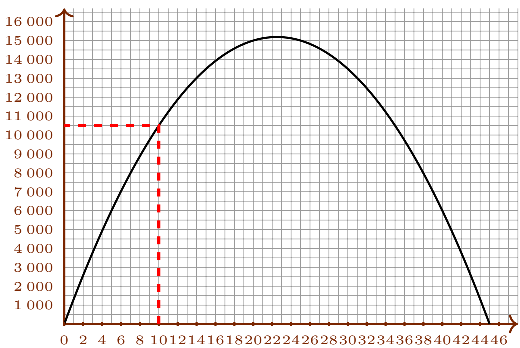
$$450 + 200 \times 3 = 1050$$

La recette est alors de

$$R(10) = 1050 \times 10 \text{ €}$$

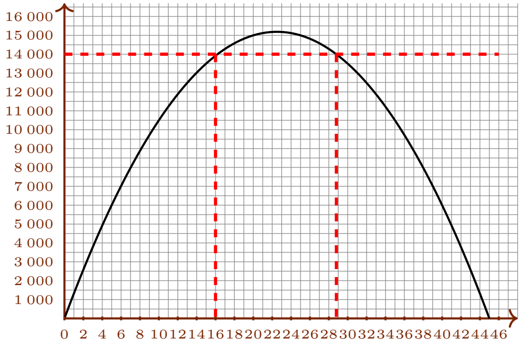
$$\boxed{R(10) = 10\,500 \text{ €}.}$$

3. (a)



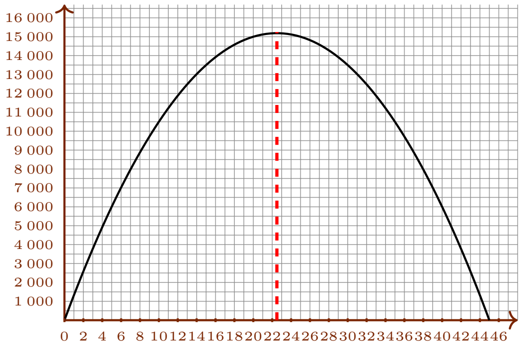
$$\boxed{R(10) = 10\,500 \text{ €}.}$$

(b)



Pour une recette de 14 000 € il faut un prix unitaire de 16 ou 28,8 euro.

(c)



Pour une recette maximale il faut un prix unitaire de 22,5 euro. La recette maximal est alors de 15 250 €.

Exercice 2.

1. Calculons le volume total de bois nécessaire V_t.

   Le volume d'un parallélépipède rectangle est

$$\begin{aligned} V_p &= (40\text{ cm}) \times (1\text{ m}) \times (1{,}25\text{ m}) \\ &= (0{,}40\text{ m}) \times (1\text{ m}) \times (1{,}25\text{ m}) \\ &= 0{,}40 \times 1 \times 1{,}25\text{ m}^3 \\ &= 0{,}5\text{ m}^3 \end{aligned}$$

Donc pour les trente appuis le volume est de

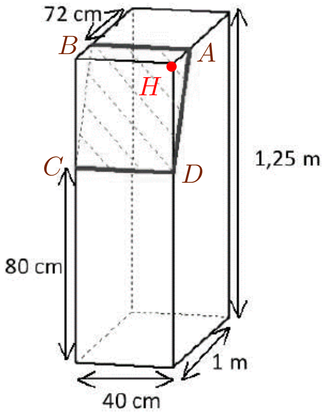
$$\begin{aligned} V_t &= 30 \times V_p \\ &= 30 \times 0{,}5\text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{V_t = 15\text{ m}^3.}$$

2. (a) Calculons l'aire $\mathscr{S}(ABCD)$ de la surface d'une assise.

$ABCD$ est un rectangle pour calculer son aire il faut les longueurs de deux côtés consécutifs.

* $CD = 40$ cm.
* Notons H l'un des sommets du prisme découpé :



AHD est un triangle rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore, $AH^2 + HD^2 = AD^2$.

Or $AH = 1\text{ m} - 72\text{ cm} = 100\text{ cm} - 72\text{ cm} = 28\text{ cm}$ et $HD = 1{,}25\text{ m} - 80\text{ cm} = 125\text{ cm} - 80\text{ cm} = 45\text{ cm}$ donc, si AD est exprimé en centimètre,

$$\begin{aligned} AD^2 &= 28^2 + 45^2 \\ &= 2809 \end{aligned}$$

AD étant une longueur c'est un nombre postif et donc :

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{2809} \\ &= 53 \end{aligned}$$

Ainsi $AD = 53$ cm.

Des points précédents nous déduisons :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(ABCD) &= CD \times AD \\ &= 40\text{ cm} \times 53\text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}(ABCD) = 2\,120\text{ cm}^2.}$$

(b) Calculons l'aire totale $\mathscr{S}_t$ à peindre.

$\mathscr{S}_t = 30 \times \mathscr{S}(ABCD) = 30 \times 2\,120\text{ cm}^2 = 63600 \times \frac{1}{10000}\text{ m}^2$ donc

$$\boxed{\mathscr{S}_t = 6{,}36\text{ m}^2.}$$

(c) Si 1 litre permet de peindre 10 m^2, un pot de 0,5 ℓ permet de peindre 5 m^2.
Donc

$$\boxed{\text{pour peindre } 6{,}36\text{ m}^2 \text{ il faudra deux pots.}}$$

Exercice 3.

1. (a) Modélisons la situation. Sans indication spécifique on peut estimer que toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées : il y a équiprobabilité. Ainsi l'univers formé des 52 cartes est muni de la loi uniforme.

   La moitié des cartes étant rouges :

   la probabilité d'obtenir une carte rouge est $\frac{1}{2}$.

   (b) Un quart des cartes étant des piques :

   la probabilité d'obtenir un pique est $\frac{1}{4}$.

   (c) Il y a quatre valets parmi les 52 cartes donc

   la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

   (d) Il y a deux dames de couleur rouge parmi les 52 cartes donc

   la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

   (e) Il y a 26 cartes rouges et deux dames noires parmi les 52 cartes donc

   la probabilité d'obtenir une carte de couleur rouge ou une dame est $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$.

2. Déterminons le nombre N de cartes joker rajoutées.

   La probabilité d'obtenir une des N cartes joker parmi les $52 + N$ cartes est (en supposant toujours l'équiprobabilité) :

$$\frac{N}{52 + N} = \frac{1}{14}$$

   On en déduit par un produit en croix :

$$14N = 52 + N$$

équation du premier degré qui équivaut successivement à :

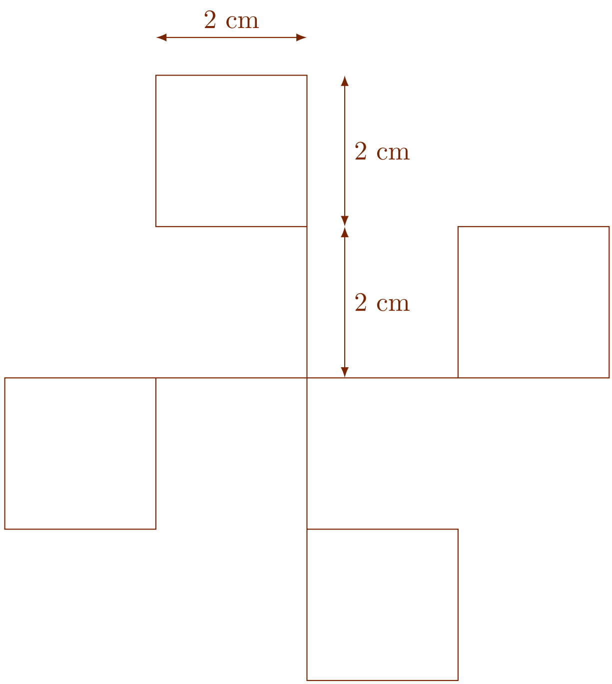
$$\begin{aligned} 14N - N &= 52 + N - N \\ 13N &= 52 \\ \frac{13N}{N} &= \frac{52}{13} \end{aligned}$$

$$\boxed{N = 4.}$$

Exercice 4.

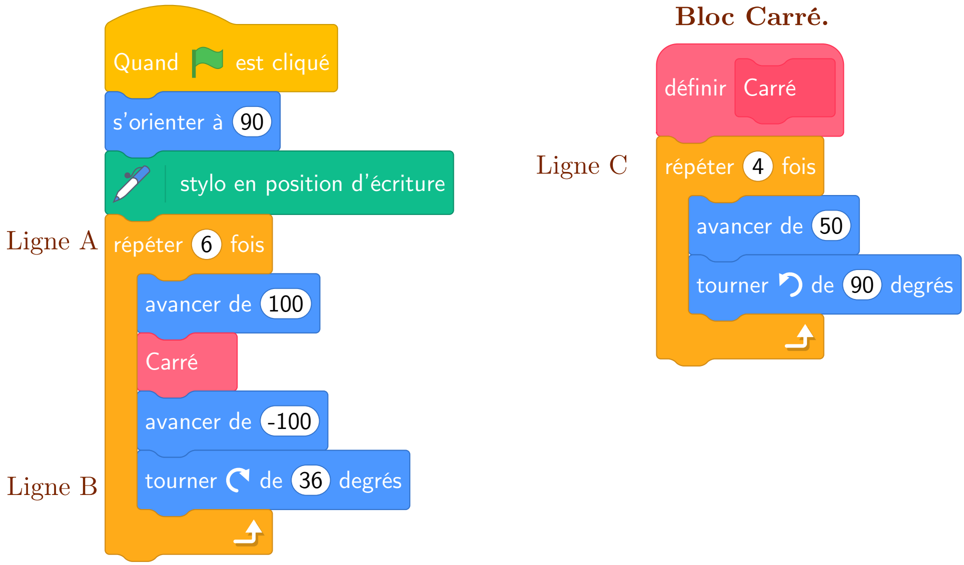
Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

1.



2. (a) On modifie le programme de la façon suivante :

Script principal. **Bloc Carré.**



(b)

La transformation permettant de passer de $ABCD$ à $EFGH$ est la rotation de centre O et d'angle 60° (ou $\frac{\pi}{3}$).

Exercice 5.

1. Calculons l'étendue des salaires.

$$\begin{aligned} e &= \max - \min \\ &= 5500 - 1923 \end{aligned}$$

$e = 3577$ €.

2. Calculons le salaire net S_{dn} de la directrice.

   Le montant des charges sur le salaire de la directrice est de

$$\frac{22}{100} \times 5500 \text{ €} = 1210 \text{ €}$$

donc le salaire net est

$$S_{dn} = 5500 \text{ €} - 1210 \text{ €}$$

$$\boxed{S_{dn} = 4290 \text{ €}.}$$

3.

En `B4` on entre : = `B3` $*$ 22/100.

4.

En `B5` on entre : = `B3` − `B4`.

5. Calculons le salaire moyen brut $\overline{x}$.

   On utilise la formule de la moyenne pondérée :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r}\\ &= \frac{4 \times 1923 + 5 \times 2307 + 2 \times 2693 + 3 \times 4200 + 1 \times 5500}{4 + 5 + 2 + 3 + 1}\\ &\approx 2847{,}53\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{x} \approx 2848 \text{ €}.}$$

6. Déterminons la médiane Me des salaires bruts.

   * La série des salaires bruts est rangée dans l'ordre croissant dans l'énoncé.
   * Il y a $4 + 5 + 2 + 3 + 1 = 15$ employés. $\frac{15}{2} = 7{,}5$ donc la médiane est la huitième valeur (série impaire).

* En cumulant les effectifs : $4+5=9$ don la huitième valeur de la série ordonnée est 2307.

$$Me = 2307 \text{ €}.$$

7. Notons x le salaire brut de l'ingénieur.

   Déterminons x.

   On doit avoir :

$$x - \frac{22}{100} \times x = 3200$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{22}{100}\right)x &= 3200 \\ 0{,}78x &= 3200 \\ \frac{0{,}78x}{0{,}78} &= \frac{3200}{0{,}78} \\ x &= \frac{3200}{0{,}78} \end{aligned}$$

   Donc

$$x \approx 4102{,}564$$

$$x \approx 4103 \text{ €}.$$

Exercice 6.

1.

Nombre choisi	43	57	52	60	16
Nombre retourné	34	75	25	6	61
Différence entre le nombre choisi et son « retourné »	9	-18	27	54	-45

2. Il semble que la différence entre un nombre et son retourné soit un multiple de 9.

3. (a) $N = 10d + u.$

(b) $R = 10u + d.$

(c)

$$\begin{aligned} N - R &= 10d + u - (10u + d) \\ &= 10d + 10u - 10u - d \\ &= 9d - 9u \end{aligned}$$

donc, en factorisant par 9

$N - R = 9(d - u).$

(d) D'après la question précédente : $N - R = 9(d - u)$. Or $d - u$ est un nombre entier donc

$N - R$ est un multiple de 9.

(e) Si $N - R = 63$ alors

$$\begin{aligned} 9(d - u) &= 63 \\ \frac{9(d - u)}{9} &= \frac{63}{9} \\ d - u &= 7 \\ d &= 7 + u \end{aligned}$$

Or $0 \leqslant u \leqslant 9$ et $0 \leqslant d \leqslant 9$ donc les couples possibles pour (u,d) (dans cet ordre) sont (0,7), (1,8), (2,9).

Pour que $N - R = 63$ il faut choisir 70, 81 ou 92.

(f) Si $N - R = 56$ comme $56 = 2^3 \times 7$ n'est pas divisible par 9 donc il n'existe pas de nombre qui convienne.

L'ensemble des nombres possibles est l'ensemble vide.

Exercice 7.

1. Il a obtenu le prix de deux glaces.

2. Déterminons x et y.

   La ligne concernant Raphaël se traduit par

$$2x + 4y = 22.$$

   La ligne concernant Lena se traduit par

$$x + 3y = 14.$$

   On a donc le système

$$\begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$$

   De la seconde équation nous déduisons $x = 14 - 3y$.
   En substituant dans la première : $2(14 - 3y) + 4y = 22$, ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 2 \times 14 - 2 \times 3y + 4y &= 22 \\ 28 - 6y + 4y &= 22 \\ -2y22 - 28 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

   Puis de $x = 14 - 3y$ nous déduisons, sachant que $y = 3$, $x = 14 - 3 \times 3 = 5$.

   Un cône coûte 5 zeds et une glace fusée coûte 3 zeds.