Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 1.

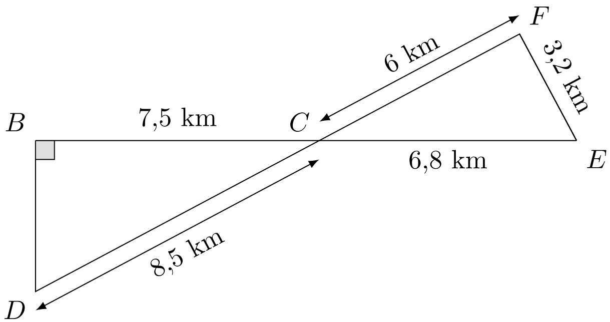
Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

Exercice 1.

Un professeur des écoles, organise avec sa classe de CM1 une randonnée à vélo. Le parcours $BCEFCDB$ est représenté ci-contre.



1. Montrer que l'angle $\widehat{CFE}$ est droit.

Déterminons si $\widehat{CFE}$ est droit.

D'une part :

$$CF^2 + FE^2 = 6^2 + 3{,}2^2 = 46{,}24,$$

et d'autre part :

$$CE^2 = 6{,}8^2 = 46{,}24.$$

Ainsi $CF^2 + FE^2 = CE^2$ et, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, CFE est rectangle en F.

$\boxed{\widehat{CFE} \text{ est pas droit.}}$

2. Déterminer la longueur totale du parcours.

   Calculons la longueur de $BCEFCDB$.

   * Calculons DB.
     BCD est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,
     $$DB^2 + BC^2 = DC^2.$$
     Nous en déduisons successivement :
     $$\begin{aligned} DB^2 + 7{,}5^2 &= 8{,}5^2 \\ DB^2 + 7{,}5^2 - 7{,}5^2 &= 8{,}5^2 - 7{,}5^2 \\ BD^2 &= 16 \end{aligned}$$
     Enfin, BD étant une longueur donc un nombre positif :
     $$BD = 4$$
   * Nous pouvons maintenant déterminer la longueur du parcours entier :
     $$\begin{aligned} BCEFCDB &= BC + CE + EF + FC + CD + DB \\ &= 7{,}5 + 6{,}8 + 3{,}2 + 6 + 8{,}5 + 4 \\ &= 36 \end{aligned}$$

   Le parcours fait 36 km.

3. Sachant que la vitesse moyenne du groupe est de 14 km/h, la classe fera-t-elle le parcours en moins de 2 h 45 min ? Justifier la réponse.

   Calculons la distance parcourue en 2 h 45 min.

   La distance parcourue en 2 h 45 min à 14 km/h est
   $$\begin{aligned} d &= (2 \text{ h} + 45 \text{ min}) \times (14 \text{ km/h}) \\ &= \left(2 \text{ h} + \frac{3}{4} \text{ h}\right) \times (14 \text{ km/h}) \\ &= (2{,}75 \text{ h}) \times (14 \text{ km/h}) \\ &= 2{,}75 \times 14 \text{ h} \cdot \text{km/h} \\ &= 38{,}5 \text{ km} \end{aligned}$$

En 2 h 45 min la classe aura fini le parcours.

Exercice 2.

1. Quatre personnes A, B, C, D se partagent une somme d'argent. On appelle a, b, c et d les montants respectivement reçus par A, B, C et D. On sait par ailleurs que :

   - a représente $\frac{1}{4}$ de la somme totale ;
   - b représente $\frac{1}{3}$ de la somme totale ;
   - C et D se partagent ce qui reste en prenant chacun le même montant.

   (a) Déterminer la proportion que représente c par rapport à la somme totale.

   Déterminons la proportion représentée par c.

   Notons T la somme totale :

$$T = a + b + c + d$$

   donc

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{4} \times T + \frac{1}{3} \times T + c + c \\
T &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) T + 2c \\
T &= \frac{7}{12} T + 2c \\
T - \frac{7}{12} T &= \frac{7}{12} T + 2c - \frac{7}{12} T \\
\frac{5}{12} T &= 2c \\
\frac{1}{2} \times \frac{5}{12} T &= \frac{1}{2} \times 2c \\
\frac{5}{24} T &= c
\end{aligned}$$

c représente $\frac{5}{24}$ de la somme totale.

(b) D reçoit 55 €. Déterminer les valeurs de a, b et c.

* Puisque $c = d$

$$\boxed{c = 55 \text{ €}.}$$

* Puisque c représente $\frac{5}{24}$ du total :

$$c = \frac{5}{24} \times T$$
$$\frac{24}{5} \times c = \frac{24}{5} \times \frac{5}{24} \times T$$
$$\frac{24}{5} \times 55 \text{ €} = T$$
$$264 \text{ €} = T$$

Or :

$$a = \frac{1}{4} \times T$$

donc

$$a = \frac{1}{4} \times 264 \text{ €}$$

$$\boxed{a = 66 \text{ €}.}$$

* De même

$$b = \frac{1}{3} \times T$$

donc

$$b = \frac{1}{3} \times 264 \text{ €}$$

$$\boxed{b = 88 \text{ €}.}$$

2. Quatre personnes E, F, G, H se partagent une somme d'argent s. On appelle e, f, g et h les montants respectivement reçus par E, F, G et H. On sait par ailleurs que :

- E perçoit le triple de F ;
- $g + h$ représente $\frac{1}{3}$ de la somme totale ;
- $g = h$.

Exprimer la part de chacun en fonction de s.

Déterminons les différentes proportions demandées.

*

$$g + h = \frac{1}{3}s$$

or $g = h$ donc

$$2g = \frac{1}{3}s$$
$$\frac{1}{2}\times 2g = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}s$$

$$\boxed{g = \frac{1}{6}s.}$$

* Puisque $g = h$

$$\boxed{h = \frac{1}{6}s.}$$

* On a

$$e + f + g + h = s$$
$$e + f + \frac{1}{3}s = s$$
$$e + f + \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}s = s - \frac{1}{3}s$$
$$e + f = \frac{2}{3}s$$

Or $e = 3f$ donc

$$\begin{aligned} 3f + f &= \frac{2}{3}s \\ 4f &= \frac{2}{3}s \\ \frac{1}{4}\times 4f &= \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}s \end{aligned}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{6}s.}$$

* Puisque $e = 3f = 3 \times \frac{1}{6}s$ donc

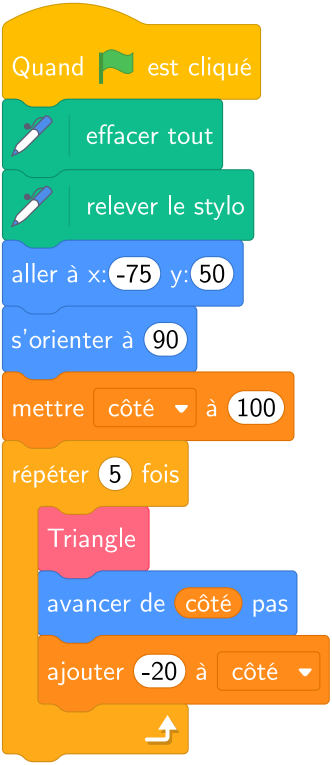
$$\boxed{e = \frac{1}{2}s.}$$

Exercice 3.

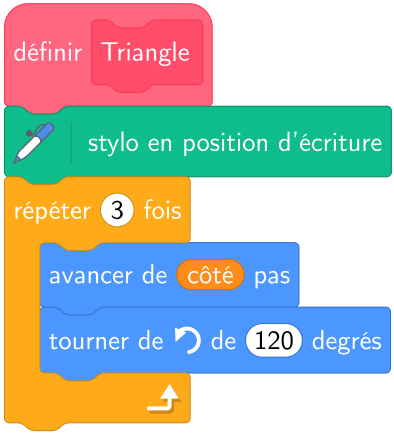
On donne le programme ci-contre qui permet de tracer des triangles de tailles différentes.

Ce programme comporte une variable nommée « côté ». Les longueurs sont données en pixels.

Script.



Bloc Triangle.



On rappelle que l'instruction `s'orienter à 90` signifie que l'on se dirige vers la droite.

Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

1. Répondre aux questions suivantes sans justifier.
   L'utilisateur clique sur le drapeau.

   (a) Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé ?

   `aller à x: -75 y: 50` donc

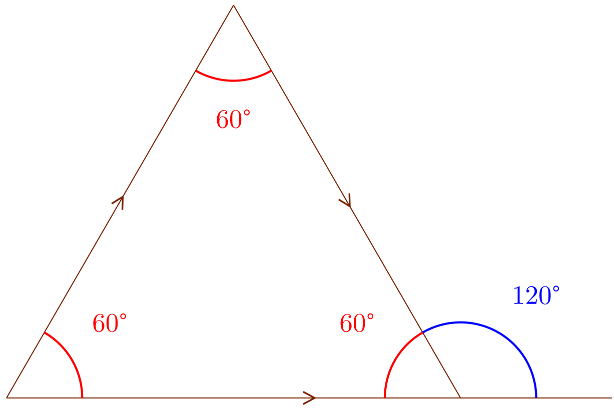
   Le point de départ é pour coordonnées : $(-75; 50)$.

(b) Combien de triangles sont dessinés par le script ?

Triangle est répété 5 fois donc

5 triangles sont dessinés par le script

(c) Quelle est la nature des triangles dessinés ?



Les triangles dessinés sont équilatéraux.

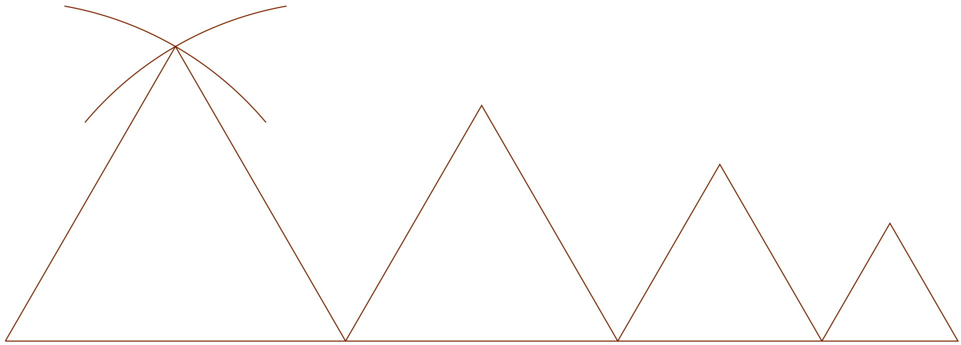
(d) Quelle est la longueur (en pas) d'un côté du deuxième triangle tracé ?

De mettre côté à 100 puis ajouter -20 à côté nous déduisons que

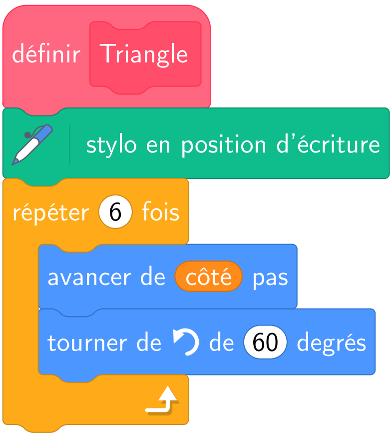
la longueur d'un côté du deuxième triangle est 80 pas.

2. Tracer le dessin obtenu par ce programme en prenant comme échelle 1 cm pour 20 pas.

   Je n'ai pas pu faire en taille réelle. La longueur des côtés des triangles est : 5 cm, 4 cm, 3 cm, 2 cm et 1 cm.



3. Si au lieu de triangles on voulait obtenir des hexagones réguliers, que devrait-on changer dans les instructions du bloc triangle ?

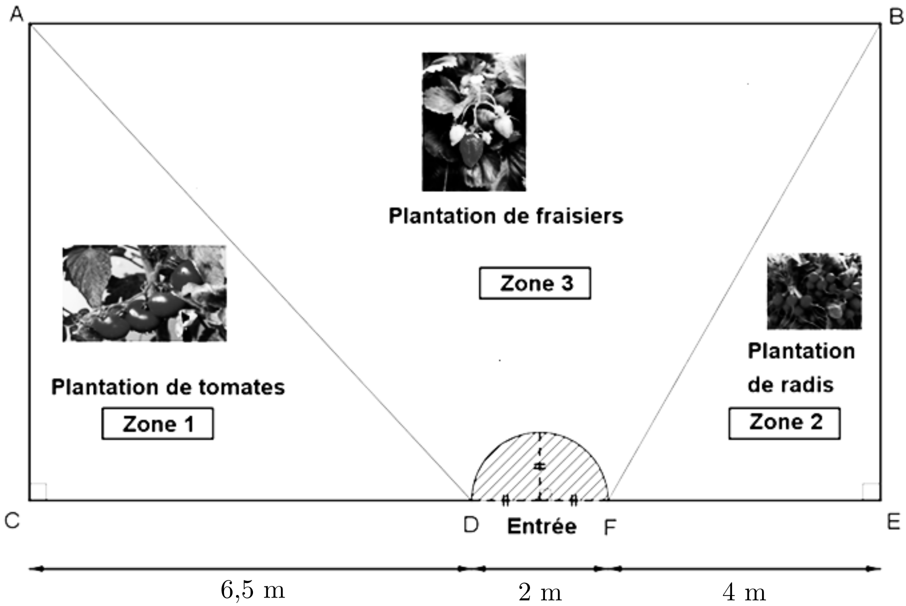


Exercice 4.

Partie A.

Dans une école, un jardin pédagogique est constitué d'un terrain rectangulaire $ABEC$ dont l'aire est égale à 100 m^2.

Des enseignants de l'école décident de planter avec les élèves différentes cultures sur ce terrain : des fraisiers, des pieds de tomates et des radis.
La répartition dans le terrain est la suivante :



L'entrée est un demi-disque délimité par le demi-cercle de diamètre $[DF]$ (zone hachurée sur la figure ci-dessus). Elle doit rester libre de toute plantation.

1. Justifier que la largeur du terrain correspondant au segment $[CA]$ est égale à 8 m.

2. Tracer un plan du terrain avec les différentes zones à l'échelle 1 : 80.

Déterminons AC.

L'aire du terrain rectangulaire est de 100 m^2 donc

$$AC \times CE = 10 \text{ m}^2$$

ce qui équivaut successivement à :

$$AC \times (6{,}5 \text{ m} + 2 \text{ m} + 4 \text{ m}) = 100 \text{ m}^2$$
$$AC \times (12{,}5 \text{ m}) = 100 \text{ m}^2$$
$$\frac{AC \times (12{,}5 \text{ m})}{12{,}5 \text{ m}} = \frac{100 \text{ m}^2}{12{,}5 \text{ m}}$$
$$AC = \frac{100}{12{,}5} \frac{\text{m}^2}{\text{m}}$$

$$AC = 8 \text{ m.}$$

3. Le directeur de l'école veut installer une bordure sur les trois côtés autour de la zone 1 où on plante des tomates.

   (a) Montrer que $AD = \sqrt{106{,}25}$ m.

   Déterminons AD.

   Puisque ACD est rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 \\ &= 6{,}5^2 + 8^2 \\ &= 106{,}25 \end{aligned}$$

   AD étant une longueur, doncun nombre positif,

$$AD = \sqrt{106{,}25}$$

$$AD = \sqrt{106{,}25} \text{ m.}$$

   (b) Déterminer la longueur de la bordure qu'il doit acheter. On donnera le résultat en mètre arrondi à l'unité.

   Calculons la longueur, ℓ_b, de la bordure.

$$\begin{aligned} \ell_b &= AC + CD + DA \\ &= 6{,}5 \text{ m} + \sqrt{106{,}25} \text{ m} + 8 \text{ m} \\ &\approx 24{,}8 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

   En arrondissant à l'unité $\ell_b \approx 24{,}8$ m.

(c) Les bordures sont vendues par rouleaux de 4 mètres. Déterminer le nombre de rouleaux nécessaire pour entourer la zone 1.

Calculons le nombre de rouleaux n_r.

Procédons à une division :

$$24{,}8 = 8 \times 4 + 0{,}8$$

Il faut 9 rouleaux pour entourer la zone 1.

4. On veut déterminer l'aire de chacune des zones.

(a) Calculer l'aire de la zone 1, en mètre carré.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_1$ de la zone 1.

ACD est rectangle en C donc

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \frac{1}{2} \times CD \times CA \\ &= \frac{1}{2} \times (6{,}5 \text{ m}) \times (8 \text{ m}) \\ &= \frac{1}{2} \times 6{,}5 \times 8 \text{ m} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = 26 \text{ m}^2.}$$

(b) Calculer l'aire de la zone 2, où on plante des radis, en mètre carré.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_2$ de la zone 2.

FEB est rectangle en E donc

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_2 &= \frac{1}{2} \times FE \times EB \\ &= \frac{1}{2} \times (4 \text{ m}) \times (8 \text{ m}) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \text{ m} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_2 = 16 \text{ m}^2.$$

(c) En déduire l'aire de la zone 3, où on plante des fraisiers (sans la zone « Entrée » hachurée sur la figure), en mètre carré. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_3$ de la zone 3.

L'aire de l'entrée e forme de demi-disque est $\mathscr{A}_e = \frac{1}{2} \times \pi (1\text{m})^2 = \frac{\pi}{2} \text{ m}^2$ donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_3 &= 100 \text{ m}^2 - \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 - \frac{\pi}{2} \text{ m}^2 \\
&= 100 \text{ m}^2 - 26 \text{ m}^2 - 16 \text{ m}^2 \frac{\pi}{2} \text{ m}^2 \\
&= \left(100 - 26 - 16 - \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_3 = \left(58 - \tfrac{\pi}{2}\right) \text{ m}^2.$$

En tronquant

$$\mathscr{A}_3 \approx 56{,}42 \text{ m}^2$$

En arrondissant au dixième $\mathscr{A}_3 \approx 56{,}4 \text{ m}^2$.

5. On s'intéresse à la culture des fraisiers.
Sachant qu'on peut planter 6 pieds de fraisiers par m^2 et qu'un pied de fraisier produit en moyenne 650 grammes de fraises par année, quelle masse de fraises les élèves peuvent-ils espérer récolter ? On donnera le résultat en kilogramme, arrondi à l'unité.

Déterminons la masse totale m_f de fraises.

Puisqu'on peut planter 6 fraisier par mètre carré, le nombre total de fraisier est, en prenant une valeur approchée par défaut :

$$6 \times 56{,}4 \approx 338.$$

Nous en déduisons la masse totale de fraises escomptée :

$$\begin{aligned} m_f &\approx 338 \times 650 \text{ g} \\ &\approx 219700 \times \frac{1}{1000} \text{ kg} \\ &\approx 219{,}7 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\boxed{m_f \approx 220 \text{ kg.}}$$

Partie B.

Fin juin, l'école décide de récolter des fraises pour faire de la confiture. Les élèves récoltent ainsi 25 kg de fraises.

1. La recette de confiture de fraise dit que la quantité de sucre nécessaire doit correspondre à 55 % de la masse totale avant cuisson. Quelle masse de sucre, arrondi au kilogramme, le directeur doit-il acheter pour respecter cette recette ?

   Déterminons la masse m_s de sucre.

   La masse de sucre doit représenté 55 % de la masse totale m_T autrement dit

$$m_s = \frac{55}{100} \times m_T$$

   Par conséquent la masse de fraisse représente 45 % de la masse totale :

$$\frac{45}{100} \times m_T = 25 \text{ kg}$$

   Nous pouvons en déduire la masse totale :

$$\begin{aligned} \frac{100}{45} \times \frac{45}{100} m_T &= \frac{100}{45} \times 25 \text{ kg} \\ m_T &= \frac{500}{9} \text{ kg} \end{aligned}$$

   Nous en déduisons la masse de sucre :

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{55}{100} \times \frac{500}{9} \text{ kg} \\ &= \frac{275}{9} \text{ kg} \\ &\approx 30{,}55 \text{ kg} \end{aligned}$$

En arrondissant à l'entier par excès $m_s \approx 31$ kg.

2. Sachant que 3 kg de fraises permettent de réaliser 4,8 L de confiture, combien de litres de confiture peut-on réaliser ?

Calculons le volume V_c de confiture.

Masse (en kg)	3	25
Volume (en L)	4,8	V_c

Puisqu'il y a proportionnalité, nous pouvons utiliser un produit en croix :

$$V_c = \frac{25 \times 4{,}8}{3} \text{ L}$$

$V_c = 40$ L.

3. Il décide de conditionner cette confiture dans des pots cylindriques dont la base est un disque de diamètre 8,4 cm et dont la hauteur mesure 11 cm.
Sachant que les pots ne peuvent être remplis qu'au 8/9 de leur capacité maximale, déterminer le nombre de pots de confiture qu'il devrait réaliser.

On rappelle la formule suivante :

Volume d'un prisme ou d'un cylindre : $V = B \times h$,
où B désigne l'aire de la base du prisme ou du cylindre et h sa hauteur.

Déterminons le nombre n_p de pot.

* Le volume d'un pot, cylindrique, est

$$\begin{aligned} V_p &= \pi \left(\frac{8{,}4 \text{ cm}}{2} \right)^2 \times (11 \text{ cm}) \\ &= 194{,}04\pi \text{ cm}^3 \\ &= 194{,}04\pi \times \frac{1}{1000} \text{ L} \\ &= 0{,}19404\pi \text{ L} \end{aligned}$$

* Le volume utilisable dans chaque pot est

$$\begin{aligned} V_u &= \frac{8}{9} \times V_p \\ &= \frac{8}{9} \times 0{,}19404\pi \text{ L} \\ &\approx 0{,}5420 \text{ L} \end{aligned}$$

* Connaissant la contenance de chaque pot nous pouvons trouver le nombre de pots nécessaires :

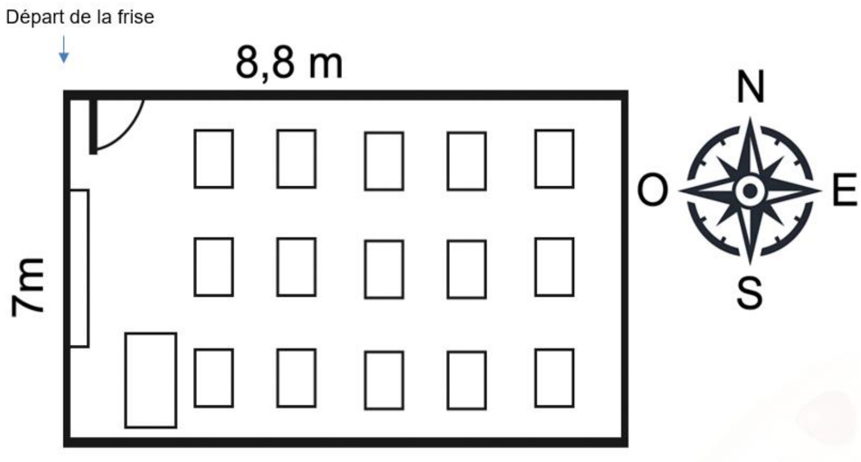
$$\begin{aligned} n_p &= \frac{40 \text{ L}}{0{,}542 \text{ L}} \\ &\approx 73{,}8 \end{aligned}$$

En arrondissant :

Il faut prévoir 74 pots.

Exercice 5.

Un enseignant souhaite décorer sa salle de classe avec une frise chronologique allant de la chute de l'Empire romain (476) à nos jours. Cette frise devra couvrir trois murs de la salle de classe rectangulaire en commençant par le coin nord-ouest et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. La frise passe au-dessus de la porte et s'étend ainsi sur les murs nord, est et sud.



1. Pour effectuer cette frise l'enseignant prévoit d'assembler bord à bord des feuilles de format A4 ($21 \times 29{,}7$ cm) dans le sens de la longueur.
   Montrer qu'il faudra 83 feuilles pour réaliser la frise.

   Déterminons le nombre de feuilles nécessaires.

   * La frise aura une longueur de

   $$8{,}8 \text{ m} + 7 \text{ m} + 8{,}8 \text{ m} = 24{,}6 \text{ m}$$

   * Nous en déduisons le nombre de feuilles nécessaires

   $$\begin{aligned} \frac{24{,}6 \text{ m}}{29{,}7 \text{ cm}} &= \frac{24{,}6 \times 100\text{cm}}{29{,}7 \text{ cm}} \\ &= 82{,}828282\ldots \end{aligned}$$

   Il faudra 83 feuilles.

2. Par combien de centimètres est représentée une année sur cette frise chronologique ?
   Arrondir au millimètre près.

Déterminons l'échelle de la frise.

La frise doit représenter 2023 − 476 = 1547.
Nous avons une situation de proportionnalité

Années	1547	1
Longueur	2460 cm	?

En faisant un produit en croix :

$$\frac{1 \times 2460}{1547} \approx 1{,}590.$$

Chaque année sera représentée par 1,6 cm.

3. L'enseignant a répertorié dans une feuille de calcul automatisé des dates importantes qu'il aimerait faire figurer sur cette frise.

D2 =(C2/29,7)+1

	A	B	C	D	E
1		Année	Nombre de cm du début de la frise		
2	Fin de l'antiquité / Début du Moyen-Âge	476	0	1	
3	Fin du Moyen-Âge / Début de l'époque moderne	1492			
4	Fin de l'époque moderne / Début de l'époque contemporaine	1789			
5					
6					

(a) Proposer une formule à valider dans la cellule `C2`, pouvant être étirée vers le bas afin de trouver tous les résultats de la colonne `C`.

En `C2` :

$$= (\texttt{B2} - 476) * 1{,}6.$$

(b) Sachant que la formule validée dans la cellule `D2` est « = ENT(C2/29,7) + 1 », déterminer à quoi correspondent les nombres de la colonne `D` au sein de la salle de classe.
On rappelle que « ENT(x) » renvoie la partie entière du nombre x.

La colonne `D` indique le nombre de feuilles entières à utiliser depuis le début de la frise.

4. Sur quel mur de la classe se trouvera l'événement « l'accostage de Christophe Colomb sur le continent américain », marquant la fin du Moyen-Âge, si on le positionne sur la frise ?

* La longueur de la frise jusqu'à l'année 1492 est

$$(1492 - 496) \times 1{,}6 \text{ cm} = 1593{,}6 \text{ cm}.$$

* $8{,}8 \text{ m} = 8{,}8 \times 100 \text{ cm} = 880 \text{ cm}$.
De même : $7 \text{ m} = 700 \text{ cm}$.
Or $800 \text{ cm} + 700 \text{ cm} = 1500 \text{ cm} < 1593{,}6 \text{ cm}$ donc

la date sera sur le mur sud.

Exercice 6.

Dans une école élémentaire de 150 élèves, 80 sont des filles. Le directeur veut mettre en place un « orchestre à l'école ». Il réalise une enquête auprès des familles de l'école afin de connaître les élèves qui pratiquent déjà un instrument de musique.

À l'issue de l'enquête, il apparaît que 24 % des élèves sont musiciens.
Parmi ces élèves, 16 sont des garçons.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles			
Nombre de garçons			
Total			150

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles	20 (1)	60 (2)	80
Nombre de garçons	16	54 (3)	70 (4)
Total	36	114	150

* Nombre de filles : 80.
* 24 % des élèves sont musiciens : $\frac{24}{100} \times 150 = 36$.
* Parmi les élèves musiciens 16 sont des garçons.

Les autres les valeurs se déduisent par sommes ou différences dans l'ordre (1), (2), (3) puis (4) (d'autres ordres sont possibles).

2. Dans cette question, on écrira les résultats sous forme de fractions irréductibles.
On interroge un élève au hasard.

(a) Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?

Notons G l'événement « l'élève choisi est un garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Modélisons l'expérience aléatoire : Ω, l'univers, est l'ensemble des élèves, et nous le munissons de l'équiprobabilité.

G est réalisé par 70 issues, Ω en en contient 150 donc

$$\mathbb{P}(G) = \frac{70}{150}.$$

Des décompositions en facteurs premiers $70 = 2 \times 5 \times$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ nous déduisons la forme irréductible de la réponse :

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{7}{15}.}$$

(b) Quelle est la probabilité que ce soit une fille musicienne ?

Notons FM : « l'élève est une fille musicienne ».

Calculons $\mathbb{P}(FM)$.

FM étant réalisé par 20 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(FM) &= \frac{20}{150}\\ &= \frac{2^2 \times 5}{2 \times 3 \times 5^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(FM) = \frac{2}{15}.}$$

(c) Quelle est la probabilité que ce soit un élève non-musicien ?

Notons M : « l'élève est un musicien ».

Calculons $\mathbb{P}(\overline{M})$.

$\overline{M}$ est réalisé par 114 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \frac{114}{150}\\ &= \frac{2\times 3\times 19}{2\times 3\times 5^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(M) = \frac{19}{25}.}$$

3. L'élève interrogé est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il soit musicien ?

Avec les probabilités conditionnelles :

Calculons $\mathbb{P}_G(M)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_G(M) &= \frac{\mathbb{P}(G\cap M)}{\mathbb{P}(G)}\\ &= \frac{\frac{16}{150}}{\frac{70}{150}}\\ &= \frac{16}{70}\\ &= \frac{2^4}{3\times 5\times 7}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_G(M) = \frac{16}{70}.}$$

Il est possible de raisonner en changer de modélisation.
Notons Ω' l'ensemble 70 garçons et munissons-le de l'équiprobabilité.
Dans cet univers M est réalisé par 16 donc

$$\mathbb{P}'(M) = \frac{16}{70}.$$

4. 30 % des filles musiciennes jouent d'un instrument à vent. Quel pourcentage cela représente-t-il par rapport à l'effectif total de l'école ?

   Calculons la proportion de musiciennes d'instruments à vent dans l'école.

   * Le nombre de filles jouant d'un instrument à vent est

   $$\frac{30}{100} \times 20 = 6.$$

   * La proportion représentée par les 6 filles est

   $$\frac{6}{150} = \frac{1}{25}.$$

   Enfin, comme $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$.

   4 % des élèves sont des filles jouant d'un instrument à vent.

Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 2.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

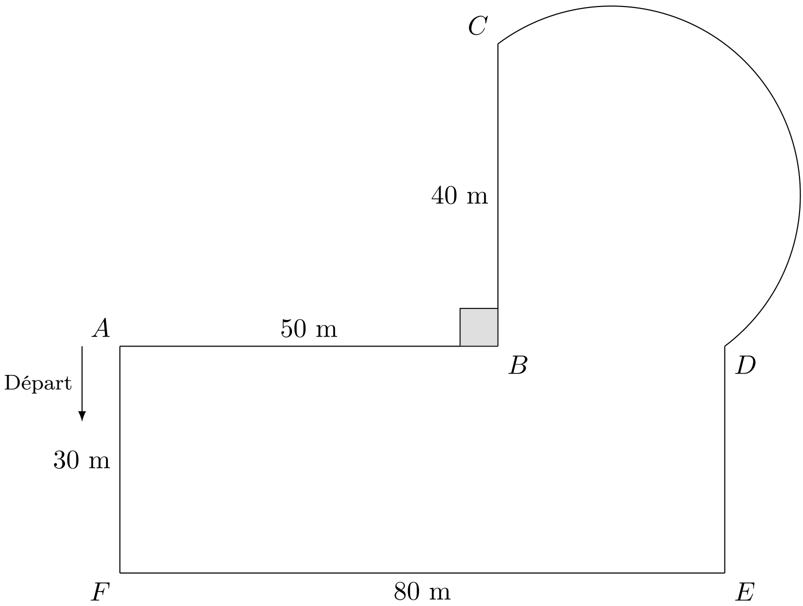
Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

Exercice 1.

Une directrice d'école primaire souhaite inscrire les élèves de l'école à une course solidaire d'action contre la faim afin de les sensibiliser à la sous-nutrition dans le monde.
Il s'agit pour chaque élève de faire le plus de tours possible d'un parcours prédéfini. Pour chaque tour effectué, l'élève récolte une somme d'argent fixe qui sera versée à l'association caritative.

La directrice décide de faire courir les élèves dans la cour de l'école, le long d'un parcours schématisé ci-dessous. Une partie du parcours est constituée d'un demi-cercle de diamètre $[CD]$ et les longueurs sont données en mètre.



Les points A, B et D sont alignés et le quadrilatère $AFED$ est un rectangle. Les élèves partent du point A et se déplacent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On a : $AB = 50$ m ; $BC = 40$ m ; $EF = 80$ m et $FA = 30$ m.

1. Calculer la longueur du segment $[CD]$.

   Calculons CD.

   Toutes les longueurs sont exprimées en mètre donc nous pouvons ne pas nous préoccuper des unités.

   BCD est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore,

   $$BD^2 + BC^2 = CD^2.$$

   Or $BD = FE - AB = 80 - 50 = 30$ donc

   $$\begin{aligned} CD^2 &= 30^2 + 40^2 \\ &= 2500 \end{aligned}$$

   Puisque CD est une longueur, c'est un nombre positif et donc :

   $$\begin{aligned} CD &= \sqrt{2500} \\ &= 50 \end{aligned}$$

$$CD = 50 \text{ m.}$$

2. Montrer que la longueur du parcours, arrondie au mètre, est 309 m. On utilisera cette valeur dans la suite de l'exercice.

   Calculons la longueur L du parcours.

$$\begin{aligned} L &= AB + BC + \overset{\frown}{CD} + DE + EF + FA \\ &= 50 + 40 + \overset{\frown}{CD} + 30 + 80 + 30 \end{aligned}$$

   Or $\overset{\frown}{CD}$ est un demi-cercle de diamètre $[CD]$ donc sa longueur est (la moitié du périmètre du cercle) :

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{CD} &= \frac{1}{2} \times 2\pi \frac{CD}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi \frac{50}{2} \\ &\approx 78{,}539 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned} L &\approx 50 + 40 + 78{,}54 + 30 + 80 + 30 \\ &\approx 308{,}54 \end{aligned}$$

   En arrondissant à l'unité

$$L \approx 309 \text{ m.}$$

3. Construire un plan du parcours à l'échelle 1/800.

   Calculons toutes les longueurs mises à l'échelle.

   Notons $A'B'$ la longueur AB mise à l'échelle.

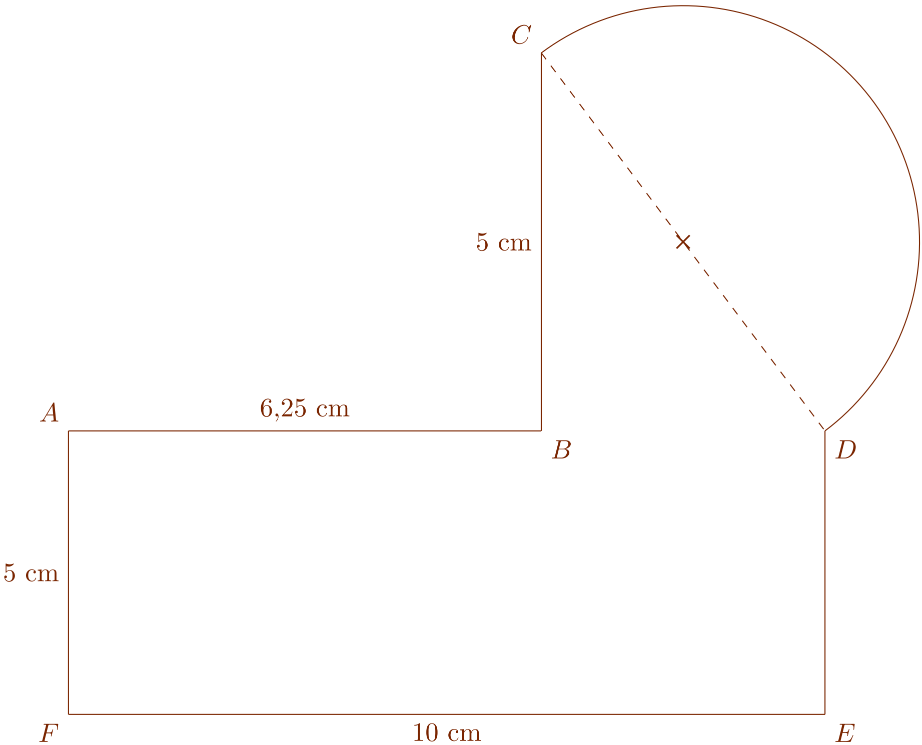
$$\begin{aligned} A'B' &= \frac{1}{800} \times 50 \text{ m} \\ &= 50 \times \times 100 \text{ cm} \\ &= 50 \times \frac{1}{8} \text{ cm} \\ &= 6{,}25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nous remarquons qu'il suffit de diviser la longueur réelle exprimée en mètre par 8 pour obtenir la longueur mise à l'échelle en centimètre.

En procédant de même :

Longueur réelle (en m)	50	40	80	30
Longueur à l'échelle en centimètre.	6,25	5	10	3,75

Nous en déduisons le dessin à l'échelle (aucune difficulté pour peu qu'on ait équerre et compas) :



4. Killian a effectué un tour complet en 3 minutes.
   À quelle vitesse moyenne Killian a-t-il couru ? On donnera le résultat en mètre par seconde arrondi au centième, puis en kilomètre par heure, arrondi au dixième.

   Calculons la vitesse moyenne v_K.

$$\begin{aligned} v_K &= \frac{309 \text{ m}}{3 \text{ min}} \\ &= \frac{309 \text{ m}}{3 \times 60 \text{ s}} \\ &= \frac{309}{3 \times 60} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 1{,}716 \text{ m/s en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_K \approx 1{,}72 \text{ m/s.}}$$

$$\begin{aligned} v_K &= \frac{309 \text{ m}}{3 \text{ min}} \\ &= \frac{309 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{3 \times \frac{1}{60} \text{ h}} \\ &= \frac{309 \times \frac{1}{1000}}{3 \times \frac{1}{60}} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 6{,}18 \text{ km/h} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_K \approx 6{,}2 \text{ km/h.}}$$

5. On suppose que Sophia court à une vitesse constante de 7 km/h.

   (a) Combien de tours complets pourrait-elle effectuer à cette vitesse en 18 minutes ?

   Calculons le nombre T_S de tours de Sophia en 18 minutes.

   Nous allons exprimer toutes les grandeurs en mètre et minute.
   La distance parcourue par Sophia en 18 minutes est

$$\begin{aligned} d_S &= 7 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 18 \text{ min} \\ &= 7 \frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ min}} \times 18 \text{ min} \\ &= \frac{7 \times 1000 \times 18}{60} \frac{\text{m} \cdot \text{min}}{\text{min}} \\ &= 2100 \text{ m} \end{aligned}$$

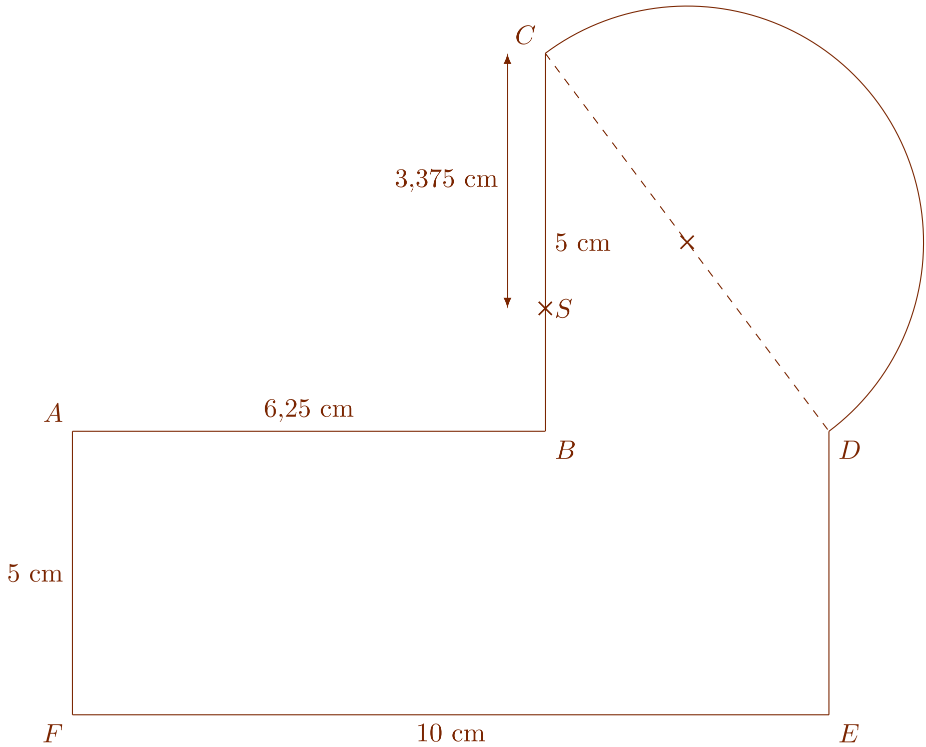
or chaque toue a une longueur de 309 m donc

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{2100 \text{ m}}{309 \text{ m}} \\ &= \frac{2100}{309} \\ &\approx 6{,}796 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Sophia fera 6 tours complets.}}$$

(b) On désigne par S le point du parcours où Sophia se trouve au bout de 18 minutes de course. Placer le point S sur le plan réalisé à la question 3.

En procédant à une division euclidienne : $2100 = 6 \times 309 + 246$.
Il lui restait $309 \text{ m} - 246 \text{ m} = 63 \text{ m}$ pour finir un tour. Sur le trajet $[CB]$ elle avait déjà parcouru $50 \text{ m} + 40 \text{ m} - 63 \text{ m} = 27 \text{ m}$.
Par conséquent S est à $\frac{27}{8}$ cm $= 3{,}375$ cm de C sur le trajet $[CB]$.



6. L'école est composée de 325 élèves. Le tableau ci-dessous indique le nombre de tours complets effectués par les élèves.

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13

(a) Quel est le nombre moyen de tours complets effectués ?

Calculons le nombre moyen $\overline{x}$ de tours.

La série étant regroupée par modalité (les valeurs différentes et les effectifs correspondant) nous allons utiliser la formule de la moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} \\ &= \frac{52 \times 2 + 52 \times 3 + \cdots + 13 \times 8}{52 + 52 + \cdots + 13}\end{aligned}$$

$$\overline{x} = 4{,}36 \text{ tours.}$$

(b) Quelle est l'étendue de cette série statistique ?

Calculons l'étendue e.

$$\begin{aligned} e &= \max - \min \\ &= 8 - 2 \end{aligned}$$

$$e = 6 \text{ tours.}$$

(c) Déterminer la médiane de cette série statistique.

Déterminons la médiane Me.

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13
E.C.C.	52	104	182	247	286	312	325

* Ordonner la série. La série des nombres de tours est déjà rangée dans l'ordre croissant.
* Position de Me. $\frac{N}{2} = \frac{325}{2} = 162{,}5$, la série étant impaire Me est la 163-ième valeur de la série ordonnée.
* Lecture de la valeur de Me. D'après les effectifs cumulés croissants,

$$Me = 4 \text{ tours.}$$

(d) Interpréter le résultat de la question (c).

Interprétation de la médiane dans la version verre à moitié vide.

50 % des élèves ont fait moins de 4 tours complets.

Déterminer le premier et le troisième quartile de cette série.

Déterminons Q_1.

* La série est ordonnée (dans le tableau).

* $\frac{N}{4} = \frac{325}{4} = 81{,}25$ donc Q_1 est la 82i-ième valeur de la série ordonnée.

* D'après les E.C.C.

$Q_1 = 3$ tours.

Déterminons Q_3.

* La série est ordonnée (dans le tableau).

* $\frac{3N}{4} = \frac{325}{4} = 243{,}75$ donc Q_3 est la 244i-ième valeur de la série ordonnée.

* D'après les E.C.C.

$Q_3 = 5$ tours.

(e) Quel pourcentage d'élèves a réussi à faire au moins 4 tours ?

En première approximation, en utilisant la médiane, nous pourrions dire qu'environ 50 % des élèves ont fait au moins 4 tours complets.

Calculons le pourcentage p d'élèves ayant fait au moins 4 tours.

$$\begin{aligned} p &= \frac{78 + 65 + 39 + 26 + 13}{325} \times 100 \\ &\approx 64{,}923 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

64,92 % des élèves ont fait au moins 4 tours complets.

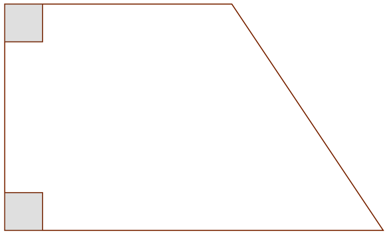
Exercice 2.

Un rectangle est défini dans le dictionnaire de la façon suivante :

« Un rectangle est un quadrilatère dont les quatre angles sont droits. »

1. Un quadrilatère qui possède deux angles droits est-il un rectangle ? Justifier.

Les trapèzes rectangles ne sont pas nécessairement des rectangles :



Les quadrilatères possédant deux angles droits ne sont pas tous des rectangles.

2. Dans une classe de CE2, une enseignante demande à ses élèves de compléter la phrase suivante : « Un rectangle est un quadrilatère dont ... ».

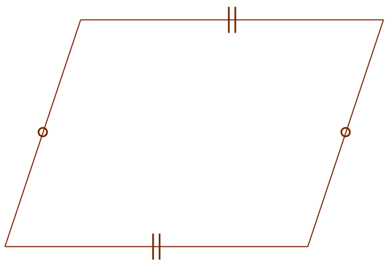
   Voici deux réponses proposées :

   Élève A : « Un rectangle est un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur ».

   Élève B : « Un rectangle est un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur ».

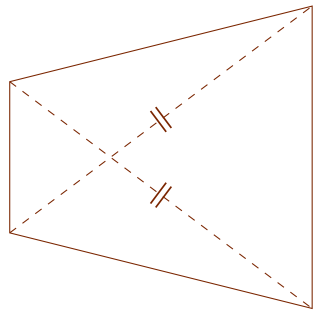
   (a) Préciser en quoi la réponse de l'élève A ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.

   Tous les parallélogrammes ont des côtés opposés de même longueurs deux à deux cependant tous les parallélogrammes ne sont pas des rectangles.



   (b) Préciser en quoi la réponse de l'élève B ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.

   Voici un quadrilatère dont les diagonales ont même longueur.



Et pourtant cette figure n'est clairement pas un rectangle.

3. Qu'elle est la nature d'un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires ?

   Je ne pense pas qu'une justification soit attendue pour une telle question. Si c'était le cas il faudrait établir que deux côtés consécutifs ont même longueur en utilisant le théorème de Pythagore.

   Un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est un carré.

4. En s'appuyant sur le codage du quadrilatère ci-après dessiné à main levée, préciser la nature du quadrilatère en question en justifiant la réponse.

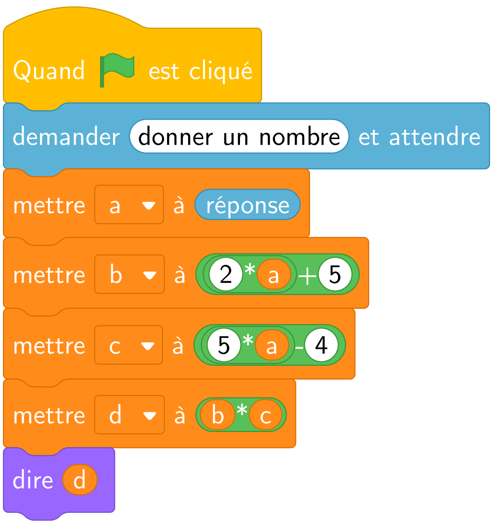
   Il s'agit visiblement d'un quadrilatère non croisé dont les côtés ont tous la même longueur donc

   $ABCD$ est un losange.

Exercice 3.

Voici deux programmes de calcul :

Programme A.



Programme B.

Choisir un nombre. Prendre son double. Ajouter 5. Calculer le carré du résultat. Retourner le résultat trouvé.

1. Montrer que si l'utilisateur saisit le nombre 2, alors le programme A retourne le nombre 54.

	réponse	a	b	c	d
demander (donner un nombre) et attendre	2				
mettre a à (réponse)	2	2			
mettre b à ((2 * a) + 5)	2	2	9		
mettre c à ((5 * a) - 4)	2	2	9	6	
mettre d à (b * c)	2	2	9	6	54

2. Calculer le résultat obtenu avec le programme A si le nombre saisi par l'utilisateur est 1,15.

	réponse	a	b	c	d
demander (donner un nombre) et attendre	1,15				
mettre a à (réponse)	1,15	1,15			
mettre b à ((2 * a) + 5)	1,15	1,15	7,3		
mettre c à ((5 * a) - 4)	1,15	1,15	7,3	1,75	
mettre d à (b * c)	1,15	1,15	7,3	1,75	12,775

Si le nombre saisi est 1,15 le programme renvoie 12,775.

3. Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le nombre 0 ?

En reprenant le tableau d'état des variables, si le nombre saisi par l'utilisateur est x le programme retourne : $(2x + 5)(5x - 4) = 0$.
Cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 2x+5 &= 0 \quad \text{ou} \quad 5x-4=0 \\ 2x+5-5 &= 0-5 \quad \text{ou} \quad 5x-4+4=0+4 \\ 2x &= -5 \quad \text{ou} \quad 5x=4 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{-5}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{5x}{5}=\frac{4}{5} \\ x &= -\frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Le programme retourne le nombre 0 en choisissant $-\frac{5}{2}$ ou $\frac{4}{5}$.

4. (a) Si l'utilisateur saisit le nombre 3, quel résultat le programme B retourne-t-il ?

Choisir un nombre.	3
Prendre son double.	6
Ajouter 5.	11
Calculer le carré du résultat.	121

Si l'utilisateur choisi 3 le programme renvoie 121.

(b) Si l'utilisateur saisit le nombre $\frac{3}{4}$, quel résultat le programme B retourne-t-il ?

Choisir un nombre.	$\frac{3}{4}$
Prendre son double.	$\frac{3}{2}$
Ajouter 5.	$\frac{13}{2}$
Calculer le carré du résultat.	$\frac{169}{4}$

Si l'utilisateur choisi $\frac{3}{4}$ le programme renvoie $\frac{169}{4}$.

5. On détermine les résultats suivants retournés par le programme B à l'aide d'une feuille de calcul automatisé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
2	25	49	81	121	169	225	289	361	441	
3										

(a) Quelle cellule du tableur permet de retrouver la réponse à la question 4.a. ci-dessus ?

La cellule `D2` permet de retrouver le résultat 4.(a).

(b) Quelle formule a pu être saisie dans la cellule `A2` de la feuille de calcul automatisé afin de la copier-glisser sur la ligne 2 ?

En cellule `A2` :

`= (2 * A1 + 5) ∧ 2`

6. (a) Pour quel nombre de départ le programme B retourne-t-il le nombre zéro ?

Déterminons pour quel nombre de départ x le programme renvoie 0.

Choisir un nombre.	x
Prendre son double.	$2x$
Ajouter 5.	$2x+5$
Calculer le carré du résultat.	$(2x+5)^2$

Ainsi nous voulons que :

$$(2x+5)^2 = 0.$$

Cette équation équivaut successivement à :

$$2x+5 = 0$$
$$2x+5-5 = 0-5$$
$$2x = -5$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{-5}{2}$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

Pour que le programme B renvoie 0 il faut choisir $-\frac{5}{2}$ comme nombre de départ.

(b) Ce nombre de départ est-il rationnel ? Justifier.

$\frac{-5}{2}$ est une fraction, c'est-à-dire le quotient d'un entier par un autre entier, donc

$-\frac{5}{2}$ est un nombre rationnel.

(c) Ce nombre de départ est-il décimal ? Justifier.

Justifions que $-\frac{5}{2}$ est décimal.

Il y a de nombreuses approches : il admet une écriture décimale dont la partie décimale est finie, il s'écrit sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, il s'écrit sous forme d'une fraction dont le dénominateur est un produit de puissances de 2 et de 5.
$-\frac{5}{2} = -2{,}5$ puisqu'il admet une écriture décimale dont la partie décimale est finie

$-\frac{5}{2}$ est un nombre décimal.

7. Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le même résultat que le programme B ?

La question est ambiguë : faut-il que le nombre de départ soit le même pour le programme A et le programme B ? Nous allons supposer que oui. Et la question revient à :

Résolvons l'équation $(2x+5)(5x-4) = (2x+5)^2$.

On pourrait être tenté de simplifier par $2x+5$ mais ce serait exclue une solution au problème. Nous allons ici nous ramener à une équation produit nul.

L'équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)^2 = (2x+5)^2-(2x+5)^2 &= 0\\
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)^2 &= 0\\
(2x+5)(5x-4)-(2x+5)\times(2x+5) &= 0\\
(2x+5)\left[(5x-4)-(2x+5)\right] &= 0\\
(2x+5)\left[5x-4-2x-5\right] &= 0\\
(2x+5)(3x-9) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
2x+5=0 & \text{ou} & 3x-9=0\\
2x+5-5=0-5 & \text{ou} & 3x-9+9=0+9\\
2x=-5 & \text{ou} & 3x=9\\
\dfrac{2x}{2}=\dfrac{-5}{2} & \text{ou} & \dfrac{3x}{3}=\dfrac{9}{3}\\
x=-\dfrac{5}{2} & \text{ou} & x=3
\end{array}$$

Les programmes renvoient les mêmes nombres si les nombres de départ sont $-\frac{5}{2}$ ou 3.

Exercice 4.

Deux élèves de CM2, Jeanne et Teddy, jouent à la bataille navale. Il s'agit d'un jeu de société, appelé également « touché-coulé ».

Les deux joueurs doivent commencer par placer quatre navires horizontalement ou verticalement (sans chevauchement) sur leur grille de 8 lignes et 8 colonnes, tenue secrète : 1 navire de deux cases, 2 navires de trois cases et 1 navire de quatre cases.

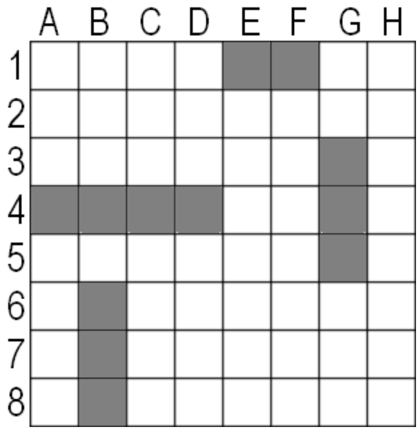
Ils doivent ensuite tenter de faire « couler » les navires adverses en « touchant » toutes les cases de chaque navire de l'autre joueur. Pour cela, chacun, à son tour, énonce une case de la grille, sous le format « lettre-nombre », par exemple C2.

Lorsqu'un joueur énonce une case, son adversaire répond :

- « À l'eau ! », si la case énoncée est vide ;
- « Touché ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si les autres parties du navire n'ont pas encore toutes été touchées ;
- « Touché-coulé ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si toutes les autres parties du navire ont déjà été touchées.

Le gagnant est le joueur qui fait « couler » chez son adversaire tous les navires (au sens de toucher toutes les cases de chacun d'eux) avant que les siens ne le soient.

Voici ci-dessous la grille de Teddy : les quatre bateaux sont schématisés par des rectangles gris.



On suppose qu'à chaque tir, Jeanne choisit au hasard et de manière équiprobable une case de la grille qu'elle n'a pas énoncée précédemment.

1. Au premier essai :

   (a) Quelle est la probabilité que Jeanne touche un bateau ?

   Notons T_1 : « elle touche un bateau au premier tir ».

   Calculons $\mathbb{P}(T_1)$.

   L'univers est formé des $8 \times 8 = 64$ cases de la grille. Les choix d'une telle case sont supposés équiprobables. T_1 est réalisé par 12 issues, à savoir les cases grisées : $(A,4)$, $(B,4)$, ...
   Donc
   $$\mathbb{P}(T_1) = \frac{12}{64}.$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(T_1) = \frac{3}{16}.}$$

   (b) Quelle est la probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau ?

   Calculons $\mathbb{P}(\overline{T_1})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{T_1}) &= 1 - \mathbb{P}(T_1)\\ &= 1 - \frac{3}{16}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\overline{T_1}) = \frac{13}{16}$.

(c) Un des bateaux a une chance sur seize d'être touché. De combien de cases est-il composé ?

Déterminons le nombre n_c de cases formant le bateau recherché.

Il y a équiprobabilité entre les cases, il y a 64 cases au total, est l'événement T_2 : « le bateau recherché est touché est réalisé par n_c cases donc

$$\mathbb{P}(T_2) = \frac{n_c}{64}$$

Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{16}$ donc

$$\frac{1}{16} = \frac{n_c}{64}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}\times 64 &= \frac{n_c}{64}\times 64\\ 4 &= n_c\end{aligned}$$

Le bateau recherché est formé de 4 cases.

(d) Jeanne choisit une case de la colonne B. Quelle est la probabilité qu'elle touche un bateau ?

Notons T_3 : « toucher un bateau en tirant dans la colonne B ».

Calculons $\mathbb{P}_2(T_3)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 8 cases de la colonne B qui sont toutes équiprobables et l'événement T_3 regroupe les 4 cases grisées de la colonne B donc

$$\mathbb{P}_2(T_3) = \frac{4}{8}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_2(T_3) = \tfrac{1}{2}.}$$

2. Au premier essai de la partie, Jeanne désigne la case « E1 ». Teddy annonce « Touché ! ». Jeanne souhaite couler le bateau touché et choisit une case adjacente à la case « E1 ».
   Quelle est la probabilité qu'elle coule le bateau au coup suivant ? Justifier.

   Notons $T4$: « couler le bateau au coup suivant ».

   Calculons $\mathbb{P}_3(T_4)$.

   Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 3 cases qui entourent la cases E1 et qui permettent de placer un bateau et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_4 regroupe la seule case grisée adjacente à E1 donc

   $$\boxed{\mathbb{P}_3(T_4) = \tfrac{1}{3}.}$$

3. Teddy annonce « À l'eau ! » pour les deux premiers essais de Jeanne. Quelle est la probabilité de toucher un bateau pour son troisième essai ?

   L'utilisation du présent dans l'énoncé des questions 3 et 4 crée une ambiguïté. Nous admettrons que la question 2 n'a pas eu lieu.

   Notons T_5 : « toucher un bateau après deux coups dans l'eau suivant ».

   Calculons $\mathbb{P}_4(T_5)$.

   Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des $64 - 2 = 62$ cases qui n'ont pas été visées et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_5 regroupe les 12 cases grisées donc

   $$\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{12}{62}$$

$$\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{6}{31}.$$

Exercice 5.

Pour choisir une unité de température, les physiciens se sont heurtés à l'absence de « température zéro » (le zéro absolu n'était pas connu à l'époque). Deux systèmes principaux ont été créés et restent utilisés : le degré Celsius (°C) et le degré Fahrenheit (°F).

Voici ci-dessous une formule permettant de passer de la mesure d'une température en degré Fahrenheit (notée F) vers la mesure de la même température en degré Celsius (notée C)

$$C = (F - 32) \times \frac{5}{9}.$$

1. En utilisant cette formule, convertir 95°F en degré Celsius.

   Convertissons des Fahrenheit vers les Celsius.

   95°F exprimés en degrés Celsius donnent

$$\begin{aligned} C &= (95 - 32)\frac{5}{9} \\ &= 35 \end{aligned}$$

$$95°\text{F} = 35°\text{C}.$$

2. En utilisant cette formule, convertir 5°C en degré Fahrenheit.

   Déterminons la température F, exprimée en degré Fahrenheit, égale 5°C.

$$5 = (F - 32) \times \frac{5}{9}$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 5\times\frac{9}{5} &= (F - 32) \times \frac{5}{9}\times\frac{9}{5} \\ 9 &= F - 32 \\ 9 + +32 &= F - 32+32 \\ 41 &= F \end{aligned}$$

$5°C = 41°F$.

3. Existe-t-il des températures pour lesquelles la mesure en degrés Celsius est égale à la mesure en degrés Fahrenheit ? Donner toutes les réponses possibles en justifiant.

   Déterminons F de sorte que $C = F$.

   On veut

$$\begin{aligned} F &= (F - 32) \times \frac{5}{9} \\ \frac{9}{5}F &= F - 32 \\ \frac{9}{5}F - F &= -32 \\ \frac{4}{5}F &= -32 \\ F &= -32 \times \frac{5}{4} \\ F &= -40 \end{aligned}$$

Les mesures en Celsius et Fahrenheit sont égales dans un seul cas : $-40°C = -40°F$.

Exercice 6.

Un professeur des écoles d'une classe de CE1 présente à ses élèves une règle de calcul qui permet de déterminer avec ses dix doigts et ses dix orteils le produit de deux nombres entiers compris entre 5 et 10 en utilisant les résultats des tables appris précédemment. Il s'appuie sur l'exemple suivant.

Effectuons 6×7.

— Avec le pied et la main gauches, on lève les 5 orteils et 1 doigt, représentant ainsi le 6.

— Avec le pied et la main droites, on lève les 5 orteils et 2 doigts, représentant ainsi le 7.

Pour le calcul on ne regarde que les mains et on procède de la manière suivante : la somme du nombre de doigts levés nous indique un nombre de dizaines, le produit des doigts baissés nous indique un nombre d'unités. Ici on a : $(1 + 2)$ dizaines et (4×3) unités, soit encore 3 dizaines et 12 unités. On obtient donc le nombre 42.

1. Appliquer cette règle pour calculer le produit 6×8.

   Effectuons 6×8.
   - Avec le pied et la main gauches, on lève les 5 orteils et 1 doigt, représentant ainsi le 6.
   - Avec le pied et la main droites, on lève les 5 orteils et 3 doigts, représentant ainsi le 8.
     La somme du nombre de doigts levés nous indique un nombre de dizaines (ici $1 + 3 = 4$), le produit des doigts baissés nous indique un nombre d'unités (ici $4 \times 2 = 8$.
     Donc

     $$\boxed{6 \times 8 = 48.}$$

2. On note g le nombre de doigts levés de la main gauche et d le nombre de doigts levés de la main droite.

   (a) Que représentent dans ce contexte les nombres $(5 - g)$ et $(5 - d)$?

   > $5 - g$ est le nombre de doigts baissés de la main gauche et $5 - d$ celui de la main droite.

   (b) Démontrer l'égalité : $(5 + g)(5 + d) = 10(g + d) + (5 - g)(5 - d)$.

   Démontrons l'égalité proposée.

   D'une part :

   $$\begin{aligned}(5+g)(5+d) &= 5 \times 5 + 5 \times d + g \times 5 + g \times d \\ &= 25 + 5d + 5g + gd \\ &= gd + 5d + 5g + 25\end{aligned}$$

   d'autre part :

   $$\begin{aligned}&10(g+d) + (5-g)(5-d) \\ =\ & 10 \times d + 10 \times g + 5 \times 5 + 5 \times (-d) + (-g) \times 5 + (-g) \times (-d) \\ =\ & 10d + 10g + 25 - 5d - 5g + gd \\ =\ & gd + 5d + 5g + 25\end{aligned}$$

donc, par transitivité,

$$(5+g)(5+d) = 10(g+d) + (5-g)(5-d).$$

(c) Conclure quant à la validité de la règle de calcul.

La règle de calcul est donc valable.

Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 3.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

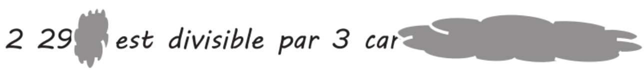
Exercice 1.

1. L'entier 4 216 est-il un multiple de 17 ? Justifier.

   Avec la calculatrice : $4\,216 \div 17 = 248$.
   Autrement dit $17 \times 248 = 4\,216$ donc

   4 216 est un multiple de 17.

2. Guillaume veut revoir sa leçon en prenant son petit déjeuner. Malheureusement, il a renversé son chocolat sur sa feuille. Le chiffre des unités et la justification de l'exemple du maître, sont illisibles...



   (a) Rappeler le critère de divisibilité par 3.

   Un nombre est divisible par 3 si

   la somme des chiffres qui le compose est un multiple de 3.

(b) Donner toutes les valeurs possibles du chiffre des unités, caché par la tâche située à gauche.

Notons n le chiffre des unités du nombre de l'exemple.
Nous devons avoir $2 + 2 + 9 + n = 13 + n$ qui est un multiple de 3.
Testons toutes les possibilités :

n	$13 + n$
1	14
2	15
3	16
4	17
5	18
6	19
7	20
8	21
9	22

Le chiffre des unités caché est 2 ou 5 ou 8.

3. On admet qu'un nombre entier n est divisible par 7 si et seulement si la différence entre son nombre de dizaines et le double de son chiffre des unités est un multiple de 7, positif ou négatif.
Par exemple, 294 est divisible par 7 car $29 - 4 \times 2 = 21$, et 21 est divisible par 7.

(a) En détaillant les étapes, vérifier que 413 est bien divisible par 7 en utilisant le critère indiqué ci-dessus.

Démontrons que 413 est divisible par 7.

$41 - 2 \times 3 = 35$ or $35 = 5 \times 7$ donc

423 est divisible par 7.

(b) Le nombre 5 292 est-il divisible par 7 ? Répondre en appliquant, plusieurs fois si nécessaire, le critère précédent.

$$529 - 2 \times 2 = 525$$
$$52 - 2 \times 5 = 42$$

Or $42 = 6 \times 7$ donc 42 est un multiple de 7.
Nous en déduisons que 525 est un multiple de 7.
Nous en déduisons enfin que

$$\boxed{5\,292 \text{ est un multiple de } 7.}$$

(c) Pour déterminer si 1 138 984 est divisible par 7, on utilise le critère précédent à l'aide d'un tableur. On rappelle que la fonction ENT renvoie la partie entière d'un nombre.

B1 | fx Σ = | =ENT(A1/10)

	A	B	C	D
1	1138984	113898	4	113890
2	113890	11389	0	11389
3	11389	1138	9	1120
4	1120	112	0	112
5	112	11	2	7

Dans la cellule `B1` on a saisi la formule : « `= ENT(A1/10)` ».
Observer la feuille de calcul puis indiquer des formules ayant pu être saisies dans les cellules `C1` et `D1` qui, étirées vers le bas de la feuille de calcul, permettent d'obtenir directement la feuille de calcul ci-dessus.

Dans `C1` : « `= A1 – 10 * B1` ».

Dans `D1` : « `= B1 – 2 * C1` ».

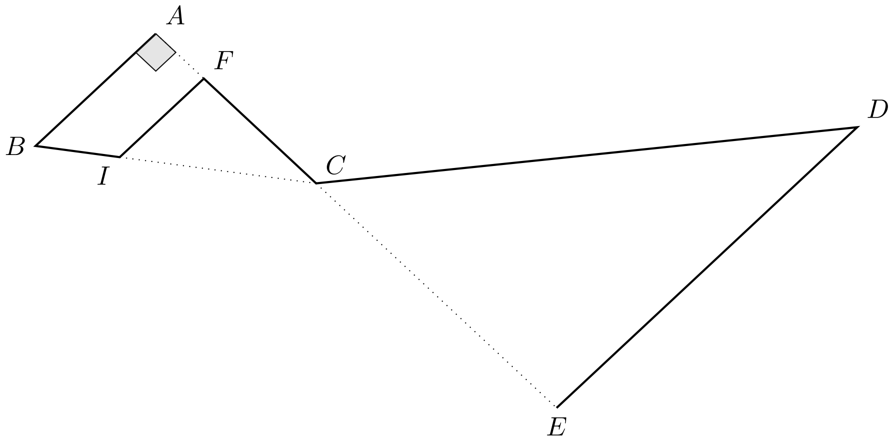
(d) Le nombre 1 138 984 est-il divisible par 7 ? Justifier en interprétant les résultats fournis par la feuille de calcul.

Le 7 (visible dans la cellule `D5`) est divisible par 7 donc il en est de même successivement pour 112, 1 120, 11 389, 113 890 et enfin 1 138 984.

$$\boxed{1\,138\,984 \text{ est un multiple de } 7.}$$

Exercice 2.

1. Nadia se prépare pour le cross organisé par son école dont le parcours, $ABIFCDE$, est représenté ci-dessous.



Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.
$F \in [AC]$ et $I \in [BC]$.
Les droites (AB), (FI) et (DE) sont parallèles.
ABC est un rectangle en A.
$AB = 300$ m ; $AC = 400$ m ; $CD = 1250$ m et $IC = 350$ m.

(a) Déterminer la longueur BC.

Calculons BC.

Toutes les longueurs considérées sont exprimées dans la même unité, le mètre, on peut donc ne pas l'indiquer dans nos calculs sans que cela soit source d'erreur.

Puisque ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} BC^2 &= 300^2 + 400^2 \\ &= 250\,000 \end{aligned}$$

Puisque BC est une longueur c'est un nombre positif et donc

$$BC = \sqrt{250\,000}$$

$$BC = 500 \text{ m.}$$

(b) Déterminer les longueurs IF et CF.

Calculons CF.

* C, I, B d'une part et C, I, B d'autre part sont alignés dans cet ordre (puisque $F \in [AC]$ et $I \in [BC]$). Ainsi nous avons une configuration de Thalès.
* $(AB) \parallel (FI)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CF}{AC} = \frac{IC}{BC}.$$

Autrement dit :

$$\frac{CF}{400} = \frac{350}{500}$$

Donc

$$\frac{CF}{400}\times 400 = \frac{350}{500}\times 400$$
$$CF = \frac{350}{500} \times 400$$

$$CF = 280 \text{ m.}$$

Calculons IF.

De même que ci-dessus

$$\frac{IF}{AB} = \frac{IC}{BC}.$$

Autrement dit :

$$\frac{IF}{300} = \frac{350}{500}$$

Donc

$$IF = \frac{350}{500} \times 300$$

$$\boxed{IF = 210 \text{ m.}}$$

(c) Déterminer la longueur ED.

Calculons ED.

* B, C, D d'une part et A, C, E d'autre part sont alignés dans cet ordre (puisque les droites (AE) et (BD) se coupent en C). Ainsi nous avons une configuration de Thalès.
* $(AB) \parallel (ED)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{BC}.$$

Autrement dit :

$$\frac{ED}{300} = \frac{1250}{500}$$

Donc

$$ED = \frac{1250}{500} \times 300$$

$$\boxed{ED = 750 \text{ m.}}$$

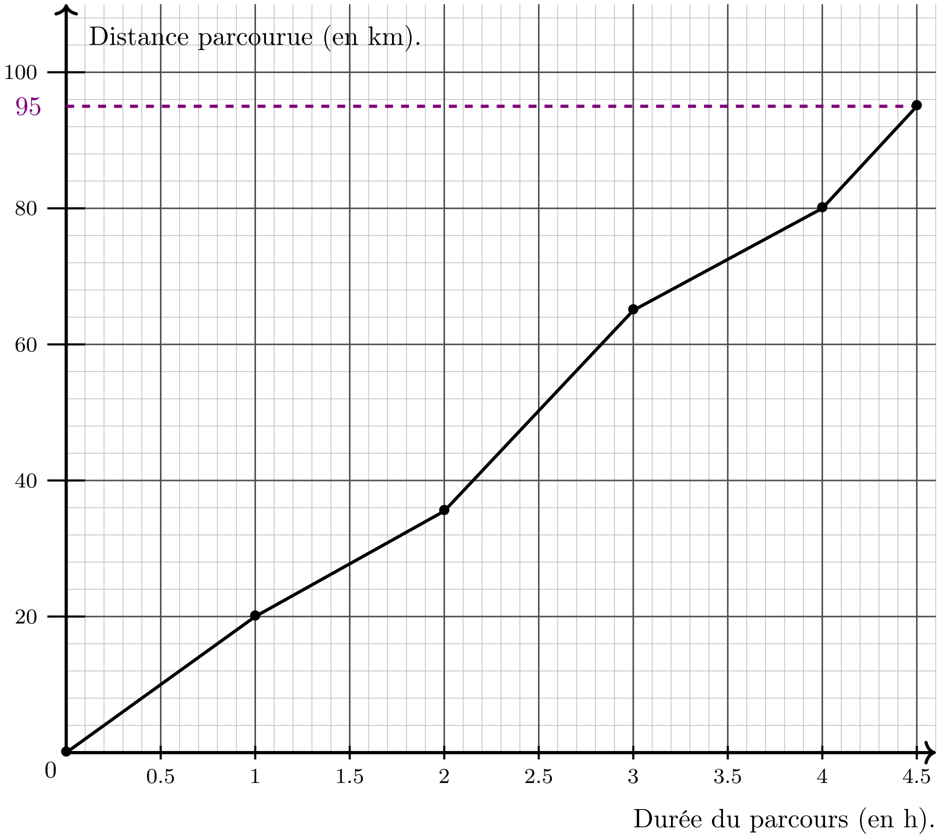
(d) Calculer la longueur du parcours $ABIFCDE$.

Calculons la longueur ℓ de la ligne brisée $ABIFCDE$.

$$\begin{aligned}\ell &= AB + BI + IF + FC + CD + DE \\ &= 300 + (BC - IC) + 210 + 280 + 1250 + 750 \\ &= 300 + (500 - 350) + 210 + 280 + 1250 + 750\end{aligned}$$

$\ell = 2940$ m.

2. Quentin, un adolescent de 16 ans, fait du vélo. On a représenté ci-dessous la distance parcourue en fonction de la durée de parcours lors de sa dernière sortie.



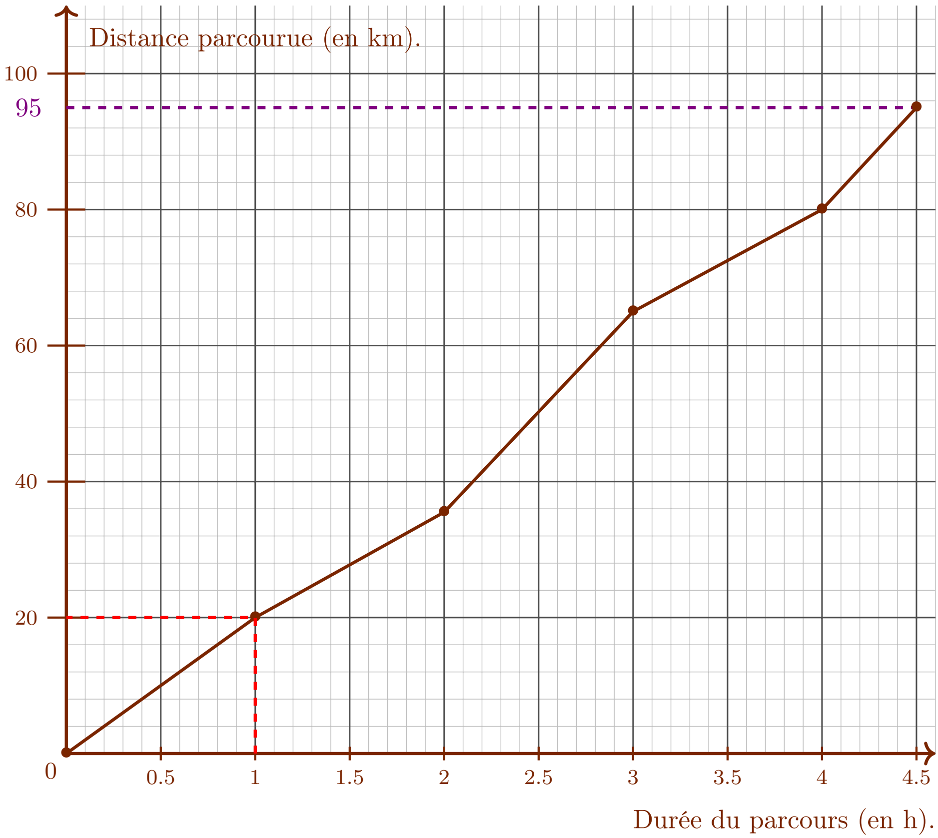
(a) La durée du parcours en heure est-elle proportionnelle à la distance parcourue en kilomètre ? Justifier.

Les fonctions qui représente les situations de proportionnalité sont les fonctions linéaires. Or les courbes représentatives de fonctions linéaires sont des droites passant par l'origine du repère.
La courbe n'étant pas une droite

il n'y a pas proportionnalité entre la durée et la distance parcourue.

Les réponses aux questions suivantes seront données avec la précision permise par le graphique.

(b) Quelle distance Quentin a-t-il parcouru en 1 h ?



En une heure il a parcouru 20 km.

(c) Déterminer la vitesse moyenne de Quentin durant la première heure, en mètre par seconde, avec un arrondi au centième.

Déterminons la vitesse moyenne, v_1, pendant la première heure.

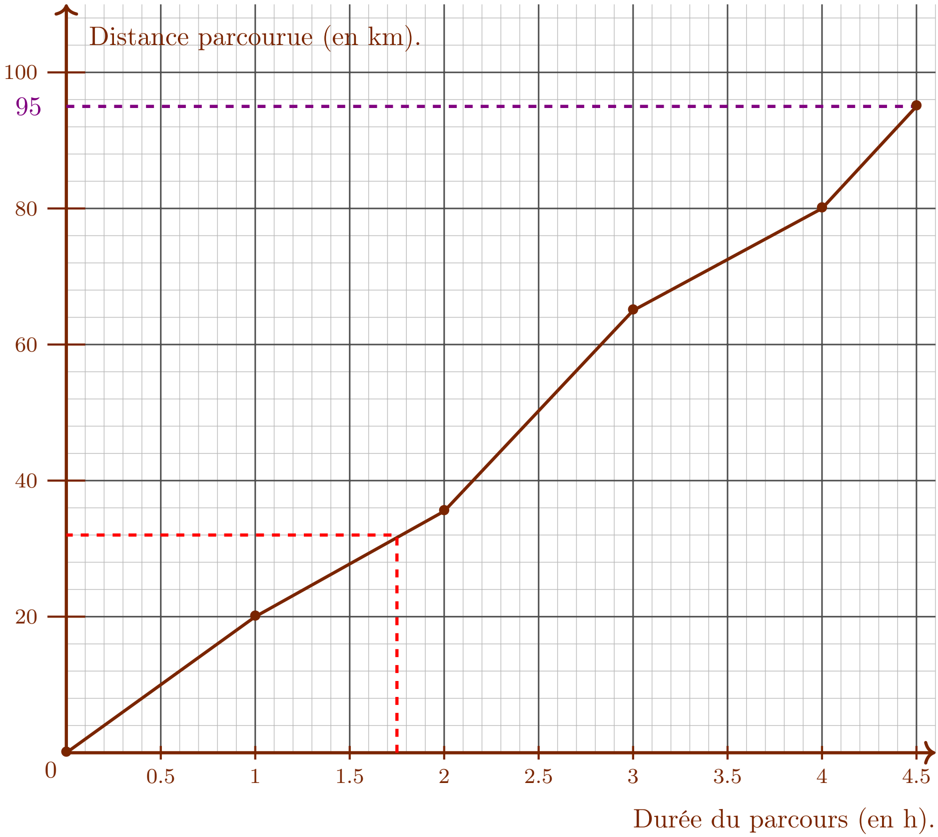
$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{20 \text{ km}}{1 \text{ h}} \\ &= \frac{20 \times 1000 \text{ m}}{1 \times 60 \text{ min}} \\ &= \frac{20000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\ &= \frac{50}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 5{,}555 \text{ m/s en tronquant,} \end{aligned}$$

donc en arrondissant au centième

$$\boxed{v_1 \approx 5{,}56 \text{ m/s.}}$$

(d) Quelle distance Quentin a-t-il parcouru en 1 h 45 ?

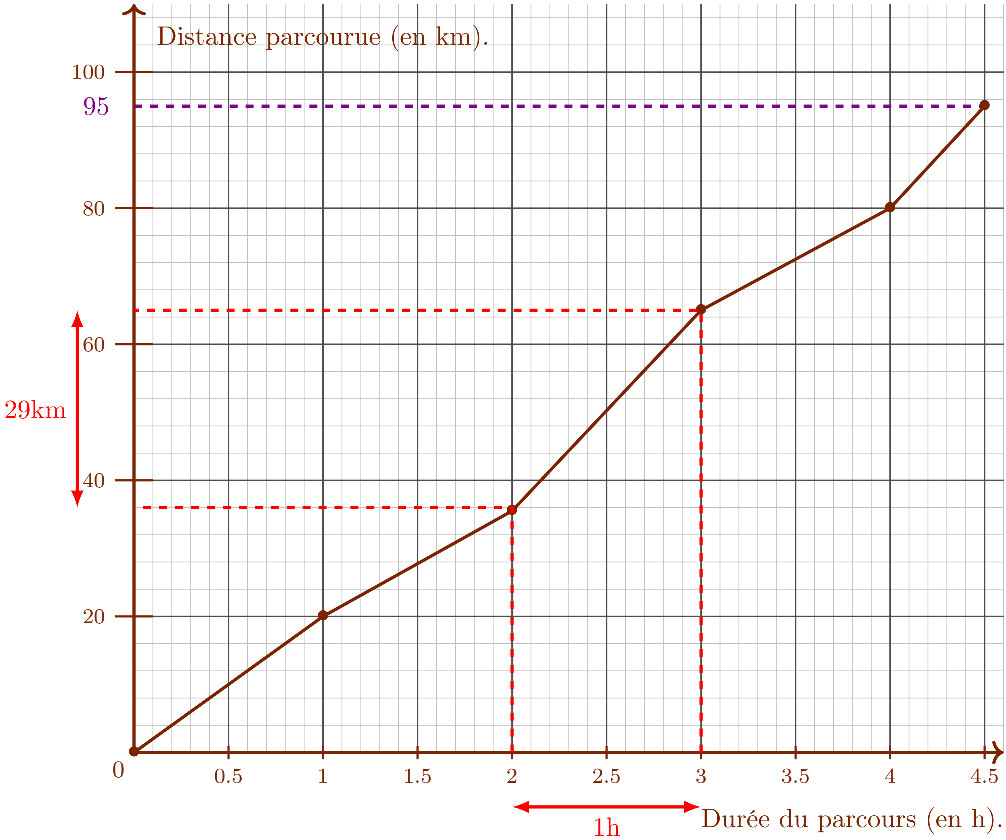
1 h 45 = 1,75 h.



En 1 h 45 il a parcouru 32 km.

(e) Estimer la vitesse de Quentin durant la troisième heure de son parcours, en kilomètre par heure.

Déterminons la vitesse, v_2, pendant la troisième heure.



$$v_2 = \frac{29 \text{ km}}{1\text{km}}$$

$$\boxed{v_2 = 29 \text{ km/h.}}$$

(f) Peut-on affirmer que sa vitesse moyenne lors de la troisième heure est supérieure de plus de 40 % à sa vitesse moyenne lors de la première heure ? Justifier.

Comparons v_1 et v_2.

Calculons le taux d'évolution entre ces deux vitesses exprimé en pourcentage :

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 \\ &= \frac{29 - 20}{20} \times 100 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Autrement dit $t > 40$.

> Sa vitesse moyenne lors de la troisième heure est supérieure de plus de 40 % à sa vitesse moyenne lors de la première heure.

(g) Quelle est la vitesse moyenne de Quentin lors de cette sortie, en kilomètre par heure, avec un arrondi au centième.

Déterminons la vitesse moyenne v_3 durant la sortie.

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{95 \text{ km}}{4{,}5 \text{ h}} \\ &= \frac{19}{9} \frac{\text{km}}{\text{h}} && \approx 2{,}111 \text{ en tronquant} \end{aligned}$$

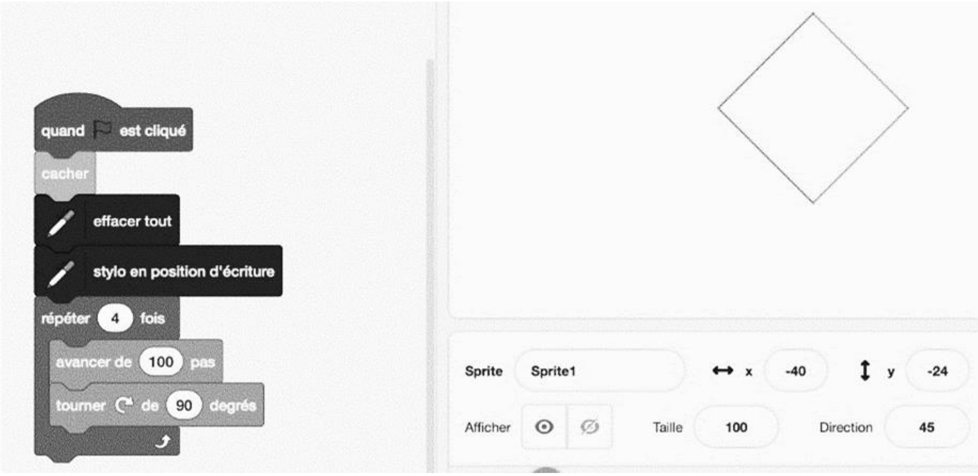
donc

> $v_3 \approx 2{,}11$ km/h.

Exercice 3.

Un enseignant de CM2 souhaite créer avec ses élèves des décorations pour la salle de classe.

1. Un premier groupe fabriquera une guirlande constituée d'un motif proposé par l'enseignant dans le script ci-dessous.



En voyant apparaître la figure,

- Pierre dit : « c'est un losange ».
- Ana dit : « ce n'est pas un rectangle ».
- Karim dit : « c'est un quadrilatère ».
- Lucie dit : « c'est un carré ».

En utilisant le script et les propriétés des quadrilatères, dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

- Puisque la figure à quatre côtés

  l'affirmation « c'est un quadrilatère » est vraie.

- Puisque le quadrilatère à quatre côtés de même longueur, 100 pas

  l'affirmation « c'est un losange » est vraie.

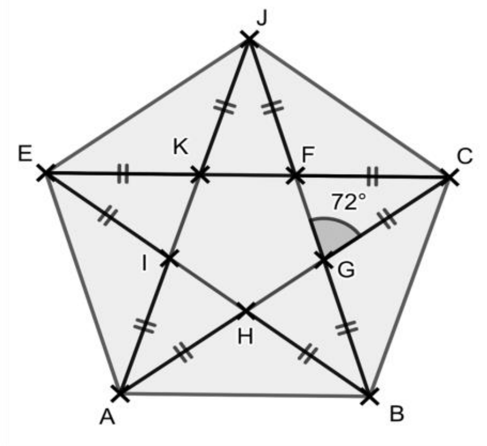
- Puisque le quadrilatère a trois angles droits (de 90°)

  l'affirmation « c'est un rectangle » est vraie.

- Puisque le quadrilatère est à la fois un losange et un rectangle

  l'affirmation « c'est un carré » est vraie.

2. Un second groupe fabriquera des étoiles. L'enseignant leur a montré comment dessiner une étoile à cinq branches sur GeoGebra en utilisant un pentagone :



Pour pouvoir construire des pentagones avec la règle et le compas, il propose le programme de construction ci-dessous.

Tracer un segment [RS]. Placer le point O au milieu du segment $[RS]$. Tracer le cercle de diamètre $[RS]$. Soit L un point de ce cercle tel que $(OL) \perp (RS)$. Placer le point I au milieu du segment $[OS]$. Le cercle de centre I et de rayon IL coupe le segment $[RO]$ en D. LD est la longueur des côtés du pentagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre $[RS]$, placer les 5 sommets du pentagone sur le cercle. Construire le pentagone.

La longueur des côtés du pentagone obtenu est proportionnelle à la longueur du segment $[RS]$ choisi au départ. En choisissant un segment $[RS]$ de longueur 4 cm, on obtient un pentagone dont les côtés mesurent $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ cm.

(a) Montrer que pour obtenir un pentagone dont les côtés mesurent 7 cm, il faut commencer par construire un segment $[RS]$ mesurant environ 11,9 cm.

Déterminons RS de sorte que les cotés mesurent 7 cm.

Puisque la longueur des côtés du pentagone obtenu est proportionnelle à RS nous avons le tableau de proportionnalité suivant, où toutes les longueurs sont exprimées en centimètres :

RS	4	x
Côté	$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	7

À l'aide d'un produit en croix :

$$x = \frac{4\times 7}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$
$$\approx 11{,}909 \text{ en tronquant.}$$

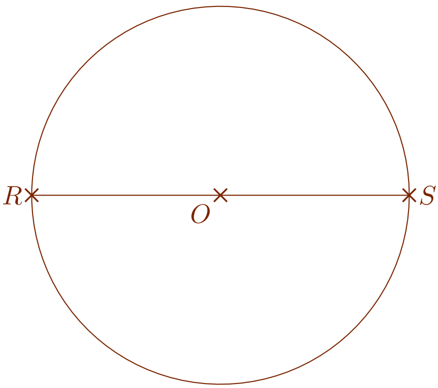
Pour que le côté mesure 7 cm il faut que $RS \approx 11{,}9$ cm.

(b) En utilisant le programme de construction précédent, construire un pentagone régulier $LMNPQ$ dont les côtés mesurent 7 cm.

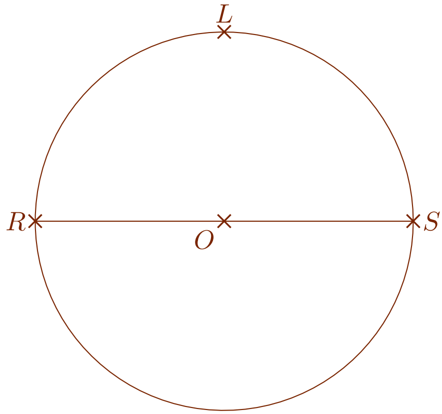
Tracer un segment [RS].
Avec $RS = 12$ cm.

Placer le point O au milieu du segment $[RS]$.

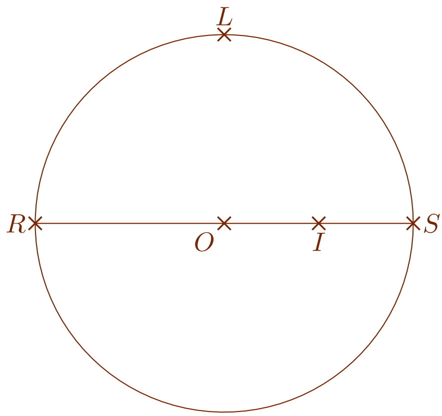
Tracer le cercle de diamètre $[RS]$.



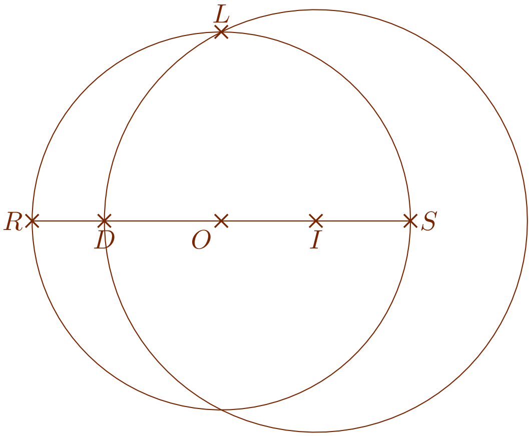
Soit L un point de ce cercle tel que $(OL)\perp(RS)$.



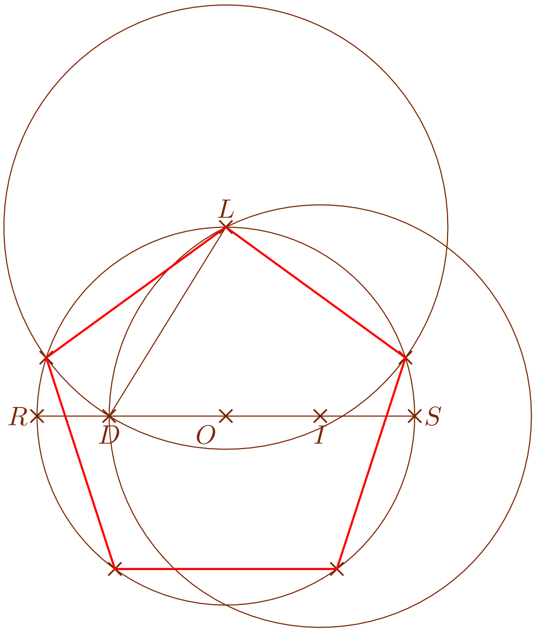
Placer le point I au milieu du segment $[OS]$.



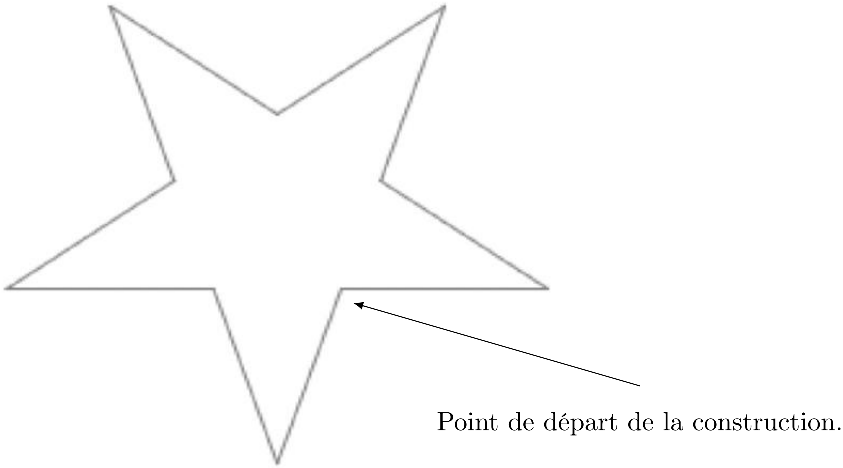
Le cercle de centre I et de rayon IL coupe le segment $[RO]$ en D.



LD est la longueur des côtés du pentagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre $[RS]$, placer les 5 sommets du pentagone sur le cercle.



Puis, il leur montre l'étoile à cinq branches ci-dessous, obtenue en utilisant le logiciel Scratch :



(c) Recopier et compléter les lignes 7 et 9 du script utilisé pour construire l'étoile.

On rappelle que lorsque le lutin est orienté à 90° cela signifie qu'il va se déplacer vers la droite.

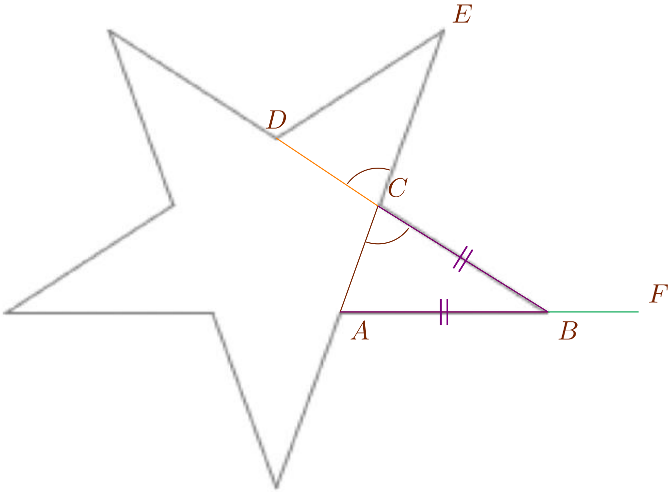
Ligne 7
Ligne 9

(d) Quel est le périmètre, en pas, de cette étoile ?

L'étoile est formée de 10 segments faisant tous 80 pas donc

> L'étoile a un périmètre de 800 pas.

(e) L'enseignant souhaite doubler le périmètre de son étoile. Recopier les quatre lignes à l'intérieur du bloc « répéter », ligne 8 à 11, en apportant les modifications nécessaires pour obtenir cette nouvelle étoile.



D'après le programme fourni $\widehat{DCE} = 72°$ donc $\widehat{ACB} = 72°$.
Comme ABC est isocèle en B, $\widehat{CAB} = 72°$.
Puisque la somme des mesures des angles d'un triangle égale 180°, $\widehat{ABC} = 180° - 72° - 72° = 36°$.
Finalement $\widehat{FBC} = 180° - 36° = 144°$.

```
avancer de (160) pas
tourner ↺ de (144) degrés
avancer de (160)
tourner ↺ de (72) degrés
```

Exercice 4.

Dans une classe de Grande Section, l'enseignant propose à ses élèves le jeu suivant dans lequel il s'agit d'être le premier à avoir exactement 15 jetons (source : *Découvrir les maths GS* - Éditions Hatier). Chaque élève lance deux dés bien équilibrés, identiques, à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Il considère les deux nombres indiqués sur les faces supérieures de chacun des dés.

Lorsque les deux dés indiquent le même nombre, l'élève prend autant de jetons que l'indique l'un des deux dés. Sinon, il prend autant de jetons que le plus grand des deux nombres ou le double de jetons du plus petit.

Après avoir lancé les dés, un élève a la possibilité de passer son tour. Dans ce cas, il ne prend aucun jeton.

1. Un élève lance les deux dés ; il obtient un 3 et un 2. Combien de jetons peut-il prendre ? Donner tous les cas possibles.

   Les deux nombres étant distincts il peut prendre le nombre de jeton égale soit au plus grand des deux nombres obtenus, c'est-à-dire 3, soit le double du plus petit donc $2 \times 2 = 4$, soit encore passer son tour et n'obtenir aucun jeton.

   L'ensemble des cas possibles est $\{3; 4; 0\}$.

2. Dresser la liste des tirages permettant d'obtenir 3 jetons.

   En distinguant les deux dés, un tirage est assimilable à un couple de nombre entiers compris (au sens large) entre 1 et 6. Par exemple (1,3) représente l'événement obtenir 1 avec le premier dé et 3 avec le second.

   Intuitivement :

   L'ensemble des tirages permettant d'obtenir 3 est $\{(1{,}3),(2{,}3),(3{,}3),(3{,}2),(3{,}1)\}$.

   Pour s'en convaincre nous pouvons représenter dans un tableau double entrée le nombre de jetons obtenus en fonction des résultats des dés (sans tenir compte de la possibilité de passer son tour qui rajouterai un zéro dans chaque casse du tableau.

D_2 / D_1	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3 / 2	4 / 2	5 / 2	6 / 2
2	2	2	3 / 4	4	5 / 4	6 / 4
3	2 / 3	4 / 3	3	4 / 6	5 / 6	6
4	2 / 4	4	6 / 4	4	5 / 8	6 / 8
5	2 / 5	4 / 5	6 / 5	8 / 5	5	6 / 10
6	2 / 6	4 / 6	6	8 / 6	10 / 6	6

3. Un élève lance les deux dés.

(a) Montrer que la probabilité de l'événement « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 » est $\frac{1}{18}$.

Notons A : « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Les deux dés étant bien équilibrés il semble naturel de modéliser la situation en choisissant pour univers l'ensemble des 36 couples de nombres que donnent les dés et pour loi de probabilité la loi uniforme (équiprobabilité).
Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et $A = \{(2,3),(3,2)\}$ est réalisé par deux issues donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}.}$$

(b) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des nombres obtenus est 3 » ?

Notons B : « au moins un des nombres obtenus est 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et

$$B = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(2,6),(3,5),(3,4),(3,2),(3,1)\}$$

est réalisé par 11 issues donc

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}.}$$

(c) Quelle est la probabilité de l'événement « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons » ?

Notons C : « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et, d'après ce tableau

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3 / 2	4 / 2	5 / 2	6 / 2
2	2	2	3 / 4	4	5 / 4	6 / 4
3	2 / 3	4 / 3	3	4 / 6	5 / 6	6
4	2 / 4	4	6 / 4	4	5 / 8	6 / 8
5	2 / 5	4 / 5	6 / 5	8 / 5	5	6 / 10
6	2 / 6	4 / 6	6	8 / 6	10 / 6	6

C est réalisé par 13 issues donc

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{13}{36}.}$$

4. Après un nouveau lancer des deux dés, un élève a pris 3 jetons. Au lancer suivant, la probabilité qu'il prenne de nouveau 3 jetons augmente-t-elle, reste-t-elle identique ou diminue-t-elle par rapport à la probabilité d'avoir pris 3 jetons au tirage précédent ? Justifier.

Il n'y a aucun lien entre deux lancés de dé. Les lancés sont indépendants. Ces sont des expériences aléatoires indépendantes et par conséquent la probabilité reste identique.

5. En fin de partie, un élève possède 12 jetons. Lors de son lancer de dés, il obtient un 1 et un 4. Pourquoi est-il préférable pour lui de passer son tour ?

   Il peut prendre $2 \times 1 = 2$ jetons ou 4 jetons.

   Il ne peut pas prendre 4 jetons puisqu'il a déjà 12 jetons et qu'il dépasserait l'objectif de 15 jetons.

   S'il prend les 2 jetons il en aura maintenant 14 et il devra n'en obtenir qu'un seul ensuite. Or la probabilité d'obtenir un seul jeton est de $\frac{1}{36}$ et celle d'obtenir directement 3 jetons est bien plus élevée.

   Il est préférable qu'il passe son tour en espérant obtenir un 3 au tour suivant.

Exercice 5.

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Affirmation 1 : « 257 est un nombre décimal. »

257 admet une écriture décimale dont la partie décimale ne comporte que des 0.

On peut aussi bien argumenté que 257 peut s'écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 puisque : $257 = \frac{257}{10^0}$.

L'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2 : « $\dfrac{7}{3} - 8$ est un nombre rationnel. »

La somme (ou différence) de deux nombres rationnels est un nombre rationnel. Nous pouvons le vérifier dans ce cas particulier.

$$\begin{aligned}\frac{7}{3}-8 &= \frac{7}{3}-\frac{8}{1}\\ &= \frac{7}{3}-\frac{8\times3}{1\times3}\\ &= \frac{7}{3}-\frac{24}{3}\\ &= \frac{7-24}{3}\\ &= \frac{-17}{3}\end{aligned}$$

Nous avons obtenu un quotient d'entiers donc il s'agit bien d'une fraction ;

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 : « la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de trois. »

Quelques essais permettent de conjecturer que le résultat est vrai. Démontrons-le.

Démontrons que l'affirmation est vraie.

Soit n un nombre entier. Les nombres entiers qui le suivent sont $n+1$ et $n+2$. Considérons leur somme :

$$\begin{aligned}n+(n+1)+(n+2) &= n+n+1+n+2\\ &= 3n+3\times1\\ &= 3n+3\times1\\ &= 3(n+1)\end{aligned}$$

On a montré que, pour tout entier n, $n+(n+1)+(n+2)$ est un multiple de 3.

L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4 : « l'équation $(x+1)(x-2)=(x-3)(x+4)$ admet un nombre entier comme solution. »

Résolvons l'équation.

$$(x+1)(x-2) = (x-3)(x+4)$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
(x+1)(x-2) - (x-3)(x+4) &= 0x \times x + x \times (-2) + 1 \times x + 1 \times (-2) - (x \times x + \\
x^2 - 2x + x - 2 - (x^2 + 4x - 3x - 12) &= 0 \\
x^2 - x - 1 - (x^2 + x - 12) &= 0 \\
x^2 - x - 1 - x^2 - x + 12 &= 0 \\
-2x + 11 &= 0 \\
-2x &= -11 \\
x &= \frac{-11}{-2} \\
x &= \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{11}{2}$ est une forme irréductible nous pouvons conclure

L'affirmation 4 est fausse.

Affirmation 5 : « augmenter une quantité de 15 % puis de 10 % revient à l'augmenter de son quart.

Calculons le taux d'évolution global correspondant aux deux augmentations.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 15 % est

$$\begin{aligned}
CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\
&= 1 + \frac{15}{100} \qquad = 1{,}15
\end{aligned}$$

De même pour une hausse de 10 % le coefficient multiplicateur est $CM_2 = 1{,}1$.
Donc le coefficient multiplicateur global des deux hausses successives est

$$\begin{aligned}
CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\
&= 1{,}15 \times 1{,}1 \\
&= 1{,}265
\end{aligned}$$

Donc le taux d'évolution global en pourcentage est de

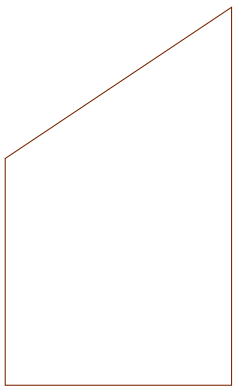
$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (1{,}265 - 1) \\ &= 26{,}5 \end{aligned}$$

Or les taux d'évolution correspondant à une augmentation d'un quart est 25 % donc

l'affirmation 5 est fausse.

Affirmation 6 : « un quadrilatère ayant un angle droit est un rectangle. »

Donnons un contre-exemple



L'affirmation 6 est fausse.

Affirmation 7 : « un triangle rectangle peut être équilatéral. »

L'un des angles d'un triangle rectangle a forcément une mesure de 90°.
Tous les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°.

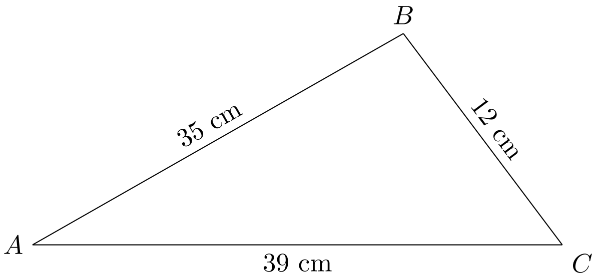
L'affirmation 7 est fausse.

Affirmation 8 : « par la fonction f définie par $f(x) = -3x + 1$, l'antécédent de 4 est -11. »

$f(-11) = -3 \times (-11) + 1 = 34 \neq 4$ donc -11 n'est pas un antécédente de 4 par f et donc

$$\boxed{\text{l'affirmation 8 est fausse.}}$$

Affirmation 9 : « le triangle ABC, schématisé ci-dessous, est rectangle. »



Déterminons si ABC est rectangle.

Le plus grand côté de ABC est $[AC]$ donc s'il est rectangle ce ne peut être qu'en B.
Le problème se ramène à déterminer si ABC est rectangle en B.
D'une part $AB^2 + BC^2 = 35^2 + 12^=1329$ et d'autre part $39^2 = 1521$ donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore ABC n'est pas rectangle en B.
Et donc il n'est âs rectangle (tout court).

$$\boxed{\text{L'affirmation 9 est fausse.}}$$

Affirmation 10 : « si on multiplie par 3 les longueurs des côtés d'un rectangle, alors son aire est également multipliée par 3. »

Il s'agit d'un résultat classique : si les dimensions d'une surface sont multipliées par 3 alors son aire est multipliée par $3^2 = 9$. C'est un résultat évident sur un carré un peu moins sur un triangle.
Toujours est-il que l'aire n'est pas multipliée par 3.

$$\boxed{\text{L'affirmation 10 est fausse.}}$$

Épreuve de mathématiques CRPE 2023 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

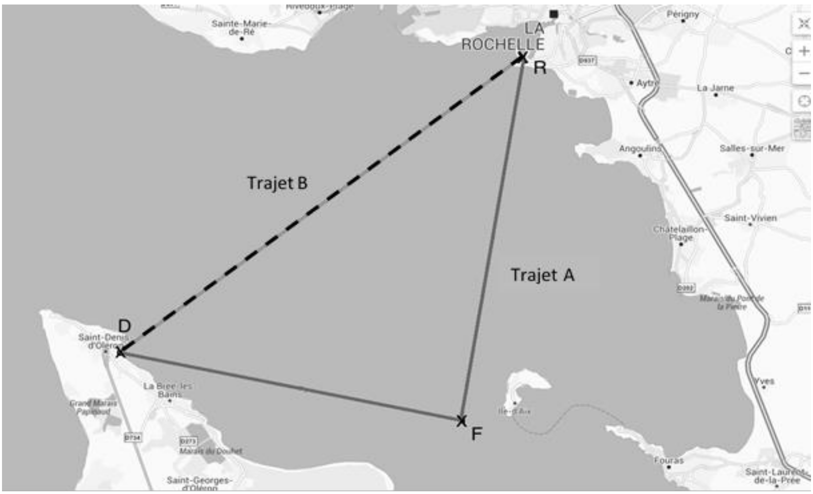
Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Le sujet est composé de sept exercices indépendants.

Exercice 1.

Une enseignante organise une sortie scolaire autour de La Rochelle. Le voyage s'effectue par navette maritime en deux étapes :

- un trajet aller, appelé trajet A, qui part du port de La Rochelle (point R), se rend autour du fort Boyard (point F), fait deux tours du fort puis se rend à St-Denis d'Oléron (point D) ;
- un trajet retour, appelé trajet B, qui part de Saint-Denis d'Oléron (point D) et se rend directement au port de La Rochelle (point R).



Partie A : étude des trajets.

1. On donne $DF = 13{,}80$ km, $DR = 23{,}41$ km et $RF = 18{,}91$ km.
   Démontrer que le triangle RDF est un triangle rectangle en F.

   Démontrons que RDF est rectangle en F.

D'une part

$$\begin{aligned} DF^2 + RF^2 &= 13{,}80^2 + 18{,}91^2 \\ &= 548{,}0281 \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} DR^2 &= 23{,}41^2 \\ &= 548{,}0281 \end{aligned}$$

donc $DF^2 + RF^2 = DR^2$.
Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que

RDF est rectangle en F.

Le nœud est une unité de vitesse utilisée dans le domaine maritime. 1 nœud correspond à 1 852 mètres par heure.

2. Sachant que la vitesse moyenne de la navette sur le trajet B est de 10 nœuds, calculer la durée du trajet B, en minute, arrondie à l'unité.

Déterminons la durée t du trajet.

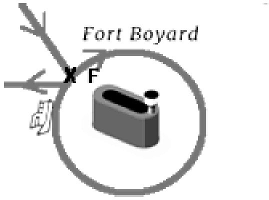
$$v = \frac{d}{t}$$

donc

$$\begin{aligned} t &= \frac{d}{v} \\ &= \frac{23{,}41 \text{ km}}{10 \text{ nœuds}} \\ &= \frac{23\,410 \text{ m}}{10 \times 1\,852 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &= \frac{23\,410}{10 \times 1\,852} \; \frac{\text{m} \cdot \text{h}}{\text{m}} \\ &= \frac{23\,410}{10 \times 1\,852} \times 60 \text{ min} \\ &\approx 75{,}84 \text{ min} \end{aligned}$$

Le trajet dure 76 minutes.

3. Le trajet A prévoit un détour vers le Fort Boyard. La navette effectue deux fois le tour du fort avant de repartir.
   On modélise le tour du fort par un trajet circulaire, de rayon 500 m.



   (a) Montrer que la longueur d'un tour du fort, ainsi modélisée, est d'environ 3142 m.

   Calculons la longueur L d'un tour du fort.

   Le tour étant circulaire de rayon 500 m :

$$\begin{aligned} L &= 2\pi \times 500 \text{ m} \\ &\approx 3141{,}59 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\boxed{L \approx 3\,142 \text{ m.}}$$

   (b) Calculer la distance totale du trajet A. Donner le résultat en kilomètre, arrondi à l'unité.

   Calculons la distance L_A du trajet A.

$$\begin{aligned} L_A &= RF + 2L + FD \\ &= 18{,}91 \text{ km} + 2 \times 3142 \text{ m} + 13{,}8 \text{ km} \\ &= 18{,}91 \text{ km} + 2 \times 3{,}142 \text{ km} + 13{,}8 \text{ km} \\ &= 38{,}994 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\boxed{L_A \approx 39 \text{ km.}}$$

4. Le trajet A dure au total 2 h. Calculer la vitesse moyenne de la navette, exprimée en nœuds et arrondie à l'unité.

   Calculons la vitesse moyenne v_A sur le trajet A.

$$\begin{aligned}
v_A &= \frac{L_A}{2 \text{ h}} \\
&= \frac{29 \text{ km}}{2 \text{ h}} \\
&= \frac{29}{2} \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
&= 19{,}5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\
&= 19{,}5 \times \frac{1}{1{,}852} \text{ nœud} \\
&\approx 10{,}529 \text{ nœud}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v_A \approx 11 \text{ nœud.}}$$

Partie B : étude de tarifs.

L'entreprise qui réalise ce trajet étudie le prix à fixer pour le voyage.
Une étude de marché montre qu'en fixant le prix d'une place sur la navette à 30 €, l'entreprise vendrait 450 places en moyenne par jour.
La même étude montre que :

- à chaque augmentation de 10 centimes, l'entreprise vendra 3 places de moins ;
- à chaque diminution de 10 centimes, l'entreprise vendra 3 places de plus.

On appelle recette journalière moyenne de l'entreprise le montant récolté lors de la vente des places.

1. Calculer la recette journalière moyenne si l'entreprise fixe le prix d'une place à 30 €.

   Calculons la recette $R(30)$ si le prix est fixé à 30 euro.

$$R(30) = 450 \times 30 \text{ euro}$$

$$\boxed{R(30) = 13\,500 \text{ €}.}$$

2. (a) Montrer que si l'entreprise décide de fixer la place à 40 €, alors la recette journalière moyenne est de 6 000 €.

   Si le prix de la place est de 40 € alors le nombre d'augmentations de 10 centimes = 0,1 € est

   $$\frac{40-30}{0{,}10} = 100$$

   Donc le nombre de places vendues est

   $$450 - 100 \times 3 = 150$$

   La recette est alors de

   $$R(40) = 150 \times 40 \text{ €}$$

   $$\boxed{R(40) = 6\,000 \text{ €}.}$$

   (b) Calculer la recette journalière moyenne si l'entreprise décide de fixer la place à 10 €.

   Si le prix de la place est de 10 € alors le nombre de diminutions est de 10 centimes = 0,1 € est

   $$\frac{30-10}{0{,}10} = 200$$

   Donc le nombre de places vendues est

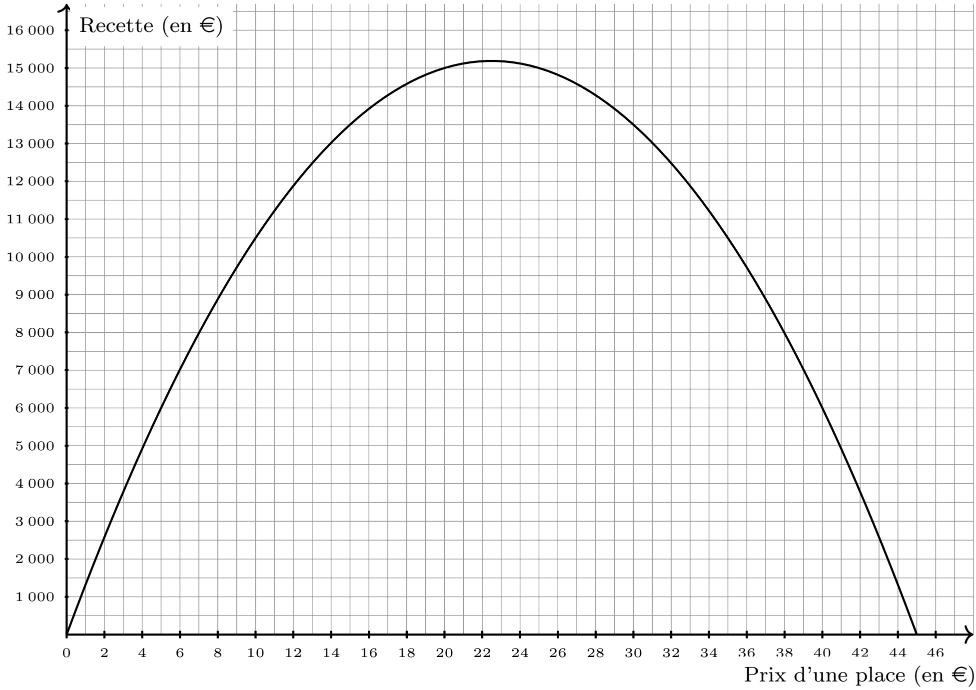
   $$450 + 200 \times 3 = 1050$$

   La recette est alors de

$$R(10) = 1050 \times 10 \text{ €}$$

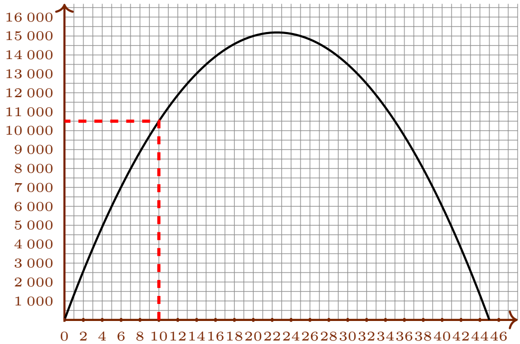
$$\boxed{R(10) = 10\,500 \text{ €}.}$$

3. Le graphique suivant donne la recette journalière prévue par l'étude de marché en fonction du prix d'une place.



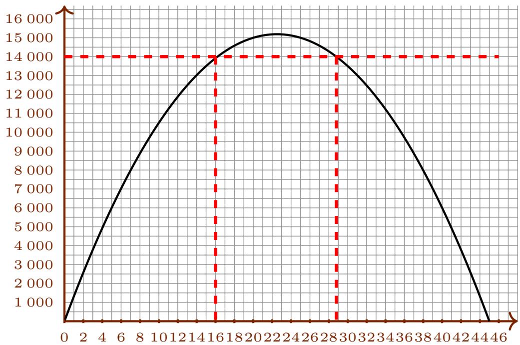
Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique

(a) Donner la recette journalière pour un prix unitaire de 10 €.



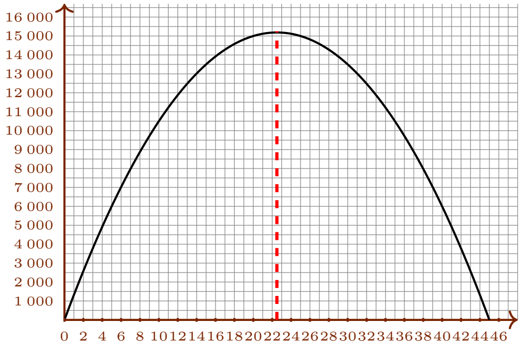
$R(10) = 10\,500$ €.

(b) Déterminer le(s) prix unitaire(s) correspondant à une recette journalière de 14 000 €.



Pour une recette de 14 000 € il faut un prix unitaire de 16 ou 28,8 euro.

(c) Quel prix unitaire permet d'obtenir une recette journalière maximale ? Indiquer le montant de cette recette maximale.



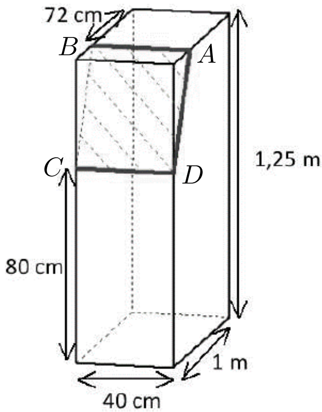
Pour une recette maximale il faut un prix unitaire de 22,5 euro. La recette maximal est alors de 15 250 €.

Exercice 2.

Une mairie souhaite végétaliser la cour de son école.

Sur un sol de copeaux de bois, la mairie souhaite installer des appuis conçus à partir de parallélépipèdes rectangles.

Les appuis sont obtenus à partir de blocs de bois écoresponsables, qui sont ensuite tronçonnés en partie de façon à obtenir une assise rectangulaire $ABCD$ sur laquelle les élèves peuvent s'appuyer.



La mairie décide d'installer dans la cour de l'école trente de ces appuis.

1. Calculer, en mètre cube, le volume de bois nécessaire avant tronçonnage, à la fabrication des trente appuis.

   Calculons le volume total de bois nécessaire V_t.

   Le volume d'un parallélépipède rectangle est

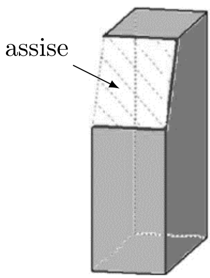
$$\begin{aligned} V_p &= (40 \text{ cm}) \times (1 \text{ m}) \times (1{,}25 \text{ m}) \\ &= (0{,}40 \text{ m}) \times (1 \text{ m}) \times (1{,}25 \text{ m}) \\ &= 0{,}40 \times 1 \times 1{,}25 \text{ m}^3 \\ &= 0{,}5 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

   Donc pour les trente appuis le volume est de

$$\begin{aligned} V_t &= 30 \times V_p \\ &= 30 \times 0{,}5 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{V_t = 15 \text{ m}^3.}$$

2. Une fois tronçonnés, les blocs prennent donc la forme ci-dessous.



   Les assises des appuis sont alors peintes en blanc.

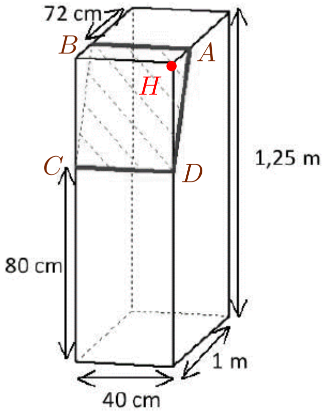
   (a) Montrer que l'aire d'un rectangle à peindre en blanc est égale à 2120 cm^2.

   Calculons l'aire $\mathscr{S}(ABCD)$ de la surface d'une assise.

   $ABCD$ est un rectangle pour calculer son aire il faut les longueurs de deux côtés consécutifs.

* $CD = 40$ cm.

* Notons H l'un des sommets du prisme découpé :



AHD est un triangle rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore, $AH^2 + HD^2 = AD^2$.
Or $AH = 1\text{ m} - 72\text{ cm} = 100\text{ cm} - 72\text{ cm} = 28\text{ cm}$ et $HD = 1{,}25\text{ m} - 80\text{ cm} = 125\text{ cm} - 80\text{ cm} = 45\text{ cm}$ donc, si AD est exprimé en centimètre,

$$\begin{aligned} AD^2 &= 28^2 + 45^2 \\ &= 2809 \end{aligned}$$

AD étant une longueur c'est un nombre postif et donc :

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{2809} \\ &= 53 \end{aligned}$$

Ainsi $AD = 53$ cm.

Des points précédents nous déduisons :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(ABCD) &= CD \times AD \\ &= 40\text{ cm} \times 53\text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}(ABCD) = 2\,120\text{ cm}^2.}$$

(b) Calculer l'aire totale des rectangles à peindre en blanc pour les 30 appuis en mètre carré.

Calculons l'aire totale $\mathscr{S}_t$ à peindre.

$\mathscr{S}_t = 30 \times \mathscr{S}(ABCD) = 30 \times 2\,120\ \text{cm}^2 = 63600 \times \frac{1}{10000}\ \text{m}^2$ donc

$$\mathscr{S}_t = 6{,}36\ \text{m}^2.$$

(c) D'après la fiche technique suivante, combien de pots de couleur blanche seront nécessaires ?

Fiche technique
- Peinture laque glycero aspect satiné.
- Usage : intérieur, extérieur, monocouche.
- Rendement : 10 m^2/L.
- Protège des UV et intempéries.
- Conditionnement : 0,5 L.

Si 1 litre permet de peindre 10 m^2, un pot de 0,5 ℓ permet de peindre 5 m^2.
Donc

pour peindre 6,36 m^2 il faudra deux pots.

Exercice 3.

Une enseignante propose à ses élèves un jeu de 52 cartes. Le jeu contient 13 cartes (As, 2,3, ..., 10, Valet, Dame, Roi) de chacune des familles suivantes : carreau, cœur, pique, trèfle.

Cœur et carreau sont des familles de couleur rouge. Pique et trèfle sont de couleur noire.

1. L'enseignante donne une carte, choisie au hasard, à Ana.

   (a) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit rouge ?

   Modélisons la situation. Sans indication spécifique on peut estimer que toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées : il y a équiprobabilité. Ainsi l'univers formé des 52 cartes est muni de la loi uniforme.

La moitié des cartes étant rouges :

> la probabilité d'obtenir une carte rouge est $\frac{1}{2}$.

(b) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un pique ?

Un quart des cartes étant des piques :

> la probabilité d'obtenir un pique est $\frac{1}{4}$.

(c) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un valet ?

Il y a quatre valets parmi les 52 cartes donc

> la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

(d) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une dame de couleur rouge ?

Il y a deux dames de couleur rouge parmi les 52 cartes donc

> la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

(e) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une carte de couleur rouge ou une dame ?

Il y a 26 cartes rouges et deux dames noires parmi les 52 cartes donc

> la probabilité d'obtenir une carte de couleur rouge ou une dame est $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$.

2. L'enseignante décide d'ajouter des cartes Joker à son jeu. Combien doit-elle ajouter de carte joker pour que la probabilité qu'Ana reçoive une carte Joker soit de $\dfrac{1}{14}$.

   Déterminons le nombre N de cartes joker rajoutées.

   La probabilité d'obtenir une des N cartes joker parmi les $52 + N$ cartes est (en supposant toujours l'équiprobabilité) :

$$\frac{N}{52+N} = \frac{1}{14}$$

On en déduit par un produit en croix :

$$14N = 52 + N$$

équation du premier degré qui équivaut successivement à :

$$14N - N = 52 + N - N$$
$$13N = 52$$
$$\frac{13N}{N} = \frac{52}{13}$$

$$\boxed{N = 4.}$$

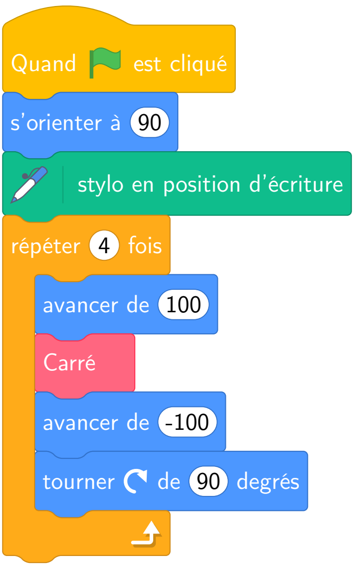
Exercice 4.

On considère les deux scripts ci-dessous.

Script principal.

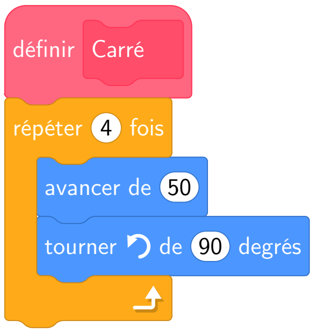
Ligne A

Ligne B



Bloc Carré.

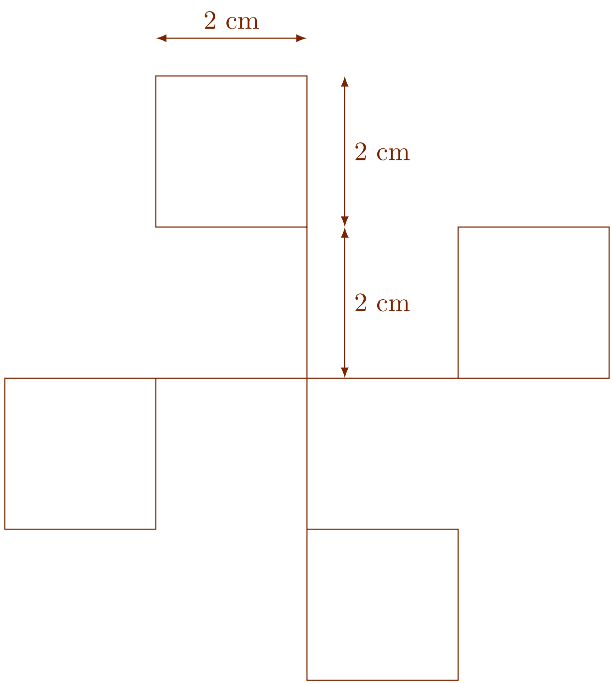
Ligne C



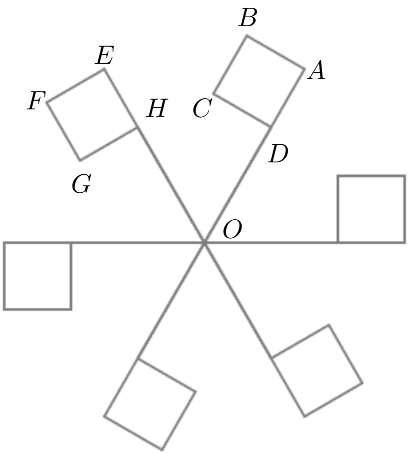
On rappelle que l'instruction s'orienter à (90) signifie que l'on se dirige vers la droite.

Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

1. Représenter sur la copie la figure réalisée par le script principal. Le lutin se déplace selon le nombre de pixels défini. On représentera 25 pixels par 1 cm.



2. On souhaite réaliser la figure ci-dessous en modifiant les scripts ci-dessus.



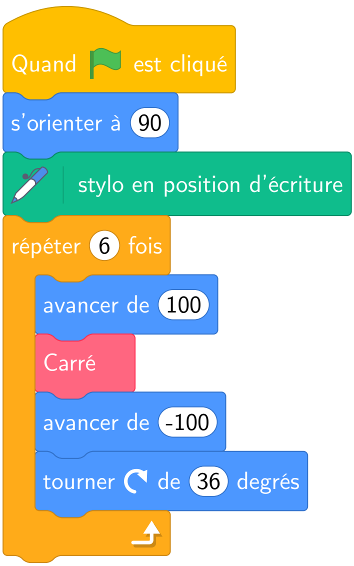
(a) Quelles modifications doit-on apporter aux lignes A, B et C pour obtenir cette figure ?

On modifie le programme de la façon suivante :

Script principal.

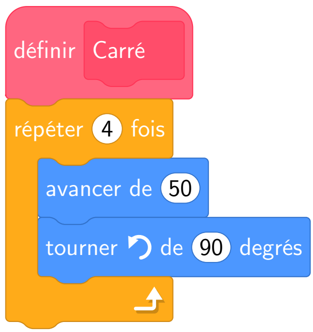
Ligne A

Ligne B



Bloc Carré.

Ligne C



(b) Proposer une transformation géométrique, dont on donnera les caractéristiques, permettant de passer du carré $ABCD$ au carré $EFGH$.

La transformation permettant de passer de $ABCD$ à $EFGH$ est la rotation de centre O et d'angle 60° (ou $\frac{\pi}{3}$).

Exercice 5.

Les effectifs et les salaires mensuels des différents employés d'une entreprise sont inscrits dans la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	F
1	Fonction dans l'entreprise	Ouvrier	Technicien	Secrétaire	Cadre	Directrice
2	Effectif	4	5	2	3	1
3	Salaire brut (€)	1923	2307	2693	4200	5500
4	Charges (22%)					
5	Salaire net (€)					
6						

Dans la suite de l'exercice, on considère que les charges s'élèvent à 22 % du salaire brut. Le salaire brut moins les charges est appelé salaire net.

1. Quelle est l'étendue des salaires mensuels bruts dans cette entreprise ?

   Calculons l'étendue des salaires.

$$\begin{aligned} e &= \max - \min \\ &= 5500 - 1923 \end{aligned}$$

$$e = 3577 \text{ €}.$$

2. Montrer que le salaire mensuel net de la directrice est de 4 290 €.

   Calculons le salaire net S_{dn} de la directrice.

   Le montant des charges sur le salaire de la directrice est de

$$\frac{22}{100} \times 5500 \text{ €} = 1210 \text{ €}$$

donc le salaire net est

$$S_{dn} = 5500 \text{ €} - 1210 \text{ €}$$

$$S_{dn} = 4290 \text{ €}.$$

3. Le comptable souhaite calculer le salaire mensuel net des autres employés. Quelle formule doit-il écrire dans la cellule B4 pour calculer les charges sociales d'un ouvrier ? Cette formule doit pouvoir être étendue pour calculer les charges dans toutes les colonnes.

   En `B4` on entre : `= B3 * 22/100`.

4. Quelle formule entrer dans la cellule `B5` pour calculer le salaire net de l'ouvrier ? Cette formule doit pouvoir être étendue pour calculer les salaires nets dans toutes les colonnes.

   En `B5` on entre : `= B3 - B4`.

5. Calculer le salaire mensuel brut moyen dans cette entreprise. Arrondir à l'euro.

   Calculons le salaire moyen brut $\overline{x}$.

   On utilise la formule de la moyenne pondérée :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{4 \times 1923 + 5 \times 2307 + 2 \times 2693 + 3 \times 4200 + 1 \times 5500}{4 + 5 + 2 + 3 + 1} \\ &\approx 2847{,}53\end{aligned}$$

$$\overline{x} \approx 2848 \text{ €}.$$

6. Déterminer la médiane des salaires mensuels bruts de cette entreprise.

   Déterminons la médiane Me des salaires bruts.

   * La série des salaires bruts est rangée dans l'ordre croissant dans l'énoncé.
   * Il y a $4 + 5 + 2 + 3 + 1 = 15$ employés. $\frac{15}{2} = 7{,}5$ donc la médiane est la huitième valeur (série impaire).
   * En cumulant les effectifs : $4 + 5 = 9$ don la huitième valeur de la série ordonnée est 2307.

   $$\boxed{Me = 2307 \text{ €.}}$$

7. L'entreprise envisage l'embauche d'un nouvel ingénieur. Celui-ci souhaite un salaire net de 3 200 €. À combien doit s'élever son salaire brut ? Arrondir à l'euro.

   Notons x le salaire brut de l'ingénieur.

   Déterminons x.

   On doit avoir :

   $$x - \frac{22}{100} \times x = 3200$$

   ce qui équivaut successivement à :

   $$\begin{aligned} \left(1 - \frac{22}{100}\right)x &= 3200 \\ 0{,}78x &= 3200 \\ \frac{0{,}78x}{0{,}78} &= \frac{3200}{0{,}78} \\ x &= \frac{3200}{0{,}78} \end{aligned}$$

   Donc

   $$x \approx 4102{,}564$$

   $$\boxed{x \approx 4103 \text{ €.}}$$

Exercice 6.

On considère un nombre entier à deux chiffres et l'on appelle son « retourné » le nombre obtenu en permutant le chiffre des dizaines et celui des unités.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre choisi	43	57	52	60	16
Nombre retourné	34	75			
Différence entre le nombre choisi et son « retourné »					

Nombre choisi	43	57	52	60	16
Nombre retourné	34	75	25	6	61
Différence entre le nombre choisi et son « retourné »	9	−18	27	54	−45

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la différence entre un nombre et son retourné ?

Il semble que la différence entre un nombre et son retourné soit un multiple de 9.

3. On note N le nombre choisi, u son chiffre des unités et d son chiffre des dizaines.

(a) Exprimer N en fonction de d et u.

$$N = 10d + u.$$

(b) Exprimer le « retourné » R du nombre choisi en fonction de d et u.

$$R = 10u + d.$$

(c) Montrer que la différence $N - R$ est égale à $9(d - u)$.

$$\begin{aligned} N - R &= 10d + u - (10u + d) \\ &= 10d + 10u - 10u - d \\ &= 9d - 9u \end{aligned}$$

donc, en factorisant par 9

$$N - R = 9(d - u).$$

(d) En déduire que la différence entre un nombre et son retourné est un multiple de 9.

D'après la question précédente : $N - R = 9(d - u)$. Or $d - u$ est un nombre entier donc

$N - R$ est un multiple de 9.

(e) Pour obtenir une différence $N - R$ égale à 63 quels nombres est-il possible de choisir au départ ? Donner l'ensemble des solutions.

Si $N - R = 63$ alors

$$\begin{aligned} 9(d-u) &= 63 \\ \frac{9(d-u)}{9} &= \frac{63}{9} \\ d - u &= 7 \\ d &= 7 + u \end{aligned}$$

Or $0 \leqslant u \leqslant 9$ et $0 \leqslant d \leqslant 9$ donc les couples possibles pour (u,d) (dans cet ordre) sont $(0,7)$, $(1,8)$, $(2,9)$.

Pour que $N - R = 63$ il faut choisir 70, 81 ou 92.

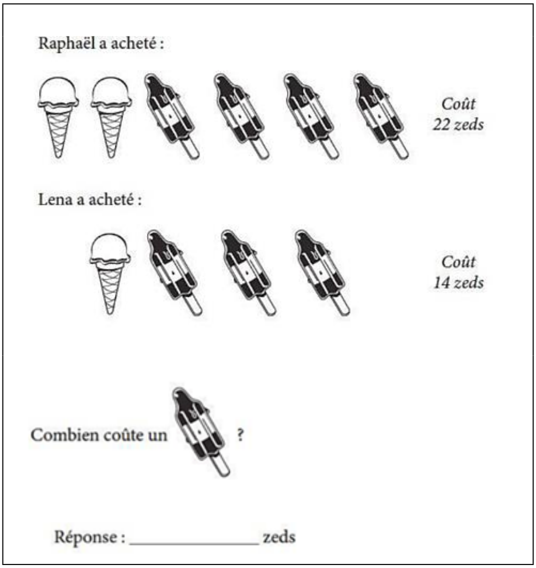
(f) Pour obtenir une différence $N - R$ égale à 56 quels nombres est-il possible de choisir au départ ? Donner l'ensemble des solutions.

Si $N - R = 56$ comme $56 = 2^3 \times 7$ n'est pas divisible par 9 donc il n'existe pas de nombre qui convienne.

L'ensemble des nombres possibles est l'ensemble vide.

Exercice 7.

Cet exercice est inspiré d'un problème proposé à des élèves de fin CM1 en 2015 aux évaluations internationales TIMSS.



1. Un élève propose la réponse suivante :

$$\boxed{\begin{array}{c} 2 \times 14 - 22 = 6 \\ \textit{Une glace fusée vaut } 6 \textit{ zeds.} \end{array}}$$

   Identifier l'erreur de l'élève.

   Il a obtenu le prix de deux glaces.

2. On note x le prix en zed d'un cône et y le prix en zed d'une glace fusée. Écrire les équations correspondantes au problème et en déduire le prix d'un cône et d'une glace fusée.

   Déterminons x et y.

   La ligne concernant Raphaël se traduit par

$$2x + 4y = 22.$$

   La ligne concernant Lena se traduit par

$$x + 3y = 14.$$

On a donc le système

$$\begin{cases} 2x & + & 4y & = & 22 \\ x & + & 3y & = & 14 \end{cases}$$

De la seconde équation nous déduisons $x = 14 - 3y$.
En substituant dans la première : $2(14 - 3y) + 4y = 22$, ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 2 \times 14 - 2 \times 3y + 4y &= 22 \\ 28 - 6y + 4y &= 22 \\ -2y22 - 28 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Puis de $x = 14 - 3y$ nous déduisons, sachant que $y = 3$, $x = 14 - 3 \times 3 = 5$.

Un cône coûte 5 zeds et une glace fusée coûte 3 zeds.