Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Jacquot pour toutes les corrections apportées ainsi qu'à M.Gendry.

Exercice 1.

1. En utilisant la formule rappelée par l'énoncé (et puisque la base est u cercle de rayon $\frac{8 \text{ cm}}{2}$) nous avons le volume :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \left[\pi\left(\frac{8 \text{ cm}}{2}\right)^2\right] \times (6 \text{ cm}) \\ &= \pi \times \left(\frac{8}{2}\right)^2 \times 6 \text{ cm}^2 \cdot \text{cm} \\ &= 96\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Réponse b.

2. En itérant :
   - le premier juin 3 personnes sont prévenues,
   - le deux juin $3 \times 3 = 3^2 = 9$ personnes sont prévenues,
   - les trois juin $3 \times 9 = 3^3 = 27$ personnes sont prévenues,
   - ...

   On remarque qu'au jour n ce sont 3^n personnes qui sont prévenues.
   Donc le 10 juin : $3^{10} = 59049$ personnes sont prévenues.

   Réponse c.

3. Calculons le taux dévolution global t_g décrivant ces deux évolutions successives.

   Pour modéliser des augmentations ou diminutions successives le plus simple consiste à travailler avec des coefficients multiplicateurs.

   Une hausse de 10 % correspond au coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10}{100} \\ &= 1{,}10 \end{aligned}$$

De même une même une baisse de 10 % correspond au coefficient multiplicateur

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{-10}{100} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Le coefficient multiplicateur global correspondant aux deux évolutions successives est donc :

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 1{,}1 \times 0{,}9 \\ &= 0{,}99 \end{aligned}$$

On peut maintenant traduire ce taux d'évolution en un coefficient multiplicateur :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM - 1) \\ &= 100 \times (0{,}99 - 1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Autrement dit le prix a, globalement baissé de 1 %.

Réponse a.

4. $\frac{4}{25} = 0{,}16$ donc c'est un nombre décimal (il admet une écriture décimale finie) mais ce n'est pas un entier (puisqu'il est strictement compris entre 0 et 1).

Réponse c.

5. Un quart de x est $\frac{1}{4} \times x$. Donc un quart de $\frac{4}{12}$ est

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \times \frac{4}{12} &= \frac{1 \times 4}{4 \times 12} \\ &= \frac{4}{48}\end{aligned}$$

Réponse d.

6. Un calcul à la calculatrice permet de trouver la réponse. pour le justifier remarquons une factorisation :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \times 5 + 5 \times \frac{1}{3} &= 5\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= 5 \times 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

Réponse a.

7. Calculons l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC.

   * Le triangle est rectangle en B donc la façon la plus simple de calculer son aire est de faire $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times AB \times BC$ puisque les hauteurs de l'angle droit se confondent à les hauteurs.
   * Déterminons BC.
     ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}8^2 + BC^2 &= 10^2 \\ 64 + BC^2 &= 100 \\ BC^2 &= 36\end{aligned}$$

BC étant une longueur donc un nombre positif :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{36} \\ BC &= 6 \end{aligned}$$

Ainsi $BC = 6$ cm.

* Nous pouvons maintenant déterminer $\mathscr{A}$.

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times BC \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 24 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Réponse a.

Exercice 2.

1. (a) Calculons la durée moyenne, x_c, de course de Célia.

Puisqu'elle a couru 7 jours :

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{33 \text{ min} + 12 \text{ s} + 32 \text{ min} + 4 \text{ s} + \cdots + 29 \text{ min} + 1 \text{ s}}{7} \\ &= \frac{217 \text{ min} + 91 \text{ s}}{7} \\ &= \frac{217}{7} \text{ min} + \frac{91}{7} \text{ s} \\ &= 31 \text{ min} + 13 \text{ s} \end{aligned}$$

Et puisque la moyenne de la sœur est de 31 min et 13 secondes

les durées moyennes des sœurs sont les mêmes.

(b) Déterminons la médiane des temps de course de Célia.

* Ordonnons les temps de course.
  — Samedi : 26 min et 38 secondes.
  — Jeudi : 27 min et 11 secondes.
  — Dimanche : 29 min et 1 secondes.
  — Vendredi : 30 min.
  — Mardi : 32 min et 4 secondes.
  — Lundi : 33 min et 12 secondes.
  — Mercredi : 40 min et 25 secondes.
* $\frac{7}{2} = 3{,}5$ donc la médiane est la quatrième valeur de la série ordonnée.
* Le temps médian de Célia est 30 min.

Puisque la médiane de sa sœur est 30 min :

les deux sœurs ont le même temps médian.

(c) Un raisonnement par l'absurde.

Si le minimum de la série de la sœur était de 28 min alors, l'étendue étant de 3 min le maximum serait de 31 min.
La moyenne étant inférieure ou égale au maximum ceci serait contradictoire. Nécessairement le minimum est strictement supérieur à 28 min.

L'affirmation est vraie.

(d) Pour juger de la régularité il faut regarder si les valeurs sont très éloignées les unes des autres. Il faut donc utiliser un indicateur de dispersion. le seul dont nous disposions est l'étendue.

L'étendue de la série des durées de Célia est :

$$\begin{aligned} e &= 40 \text{ min} + 25 \text{ s} - (26 \text{ min} + 38 \text{ s}) \\ &= (40 - 26) \text{ min} + (25 - 38) \text{ s} \\ &= 14 \text{ min} - 13 \text{ s} \\ &= 13 \text{ min} + (60 - 13) \text{ s} \\ &= 13 \text{ min} + 47 \text{ s} \end{aligned}$$

L'étendue de Célia est (beaucoup) plus importante donc

la sœur a été plus régulière.

2. (a) La mise à l'échelle consiste à appliquer de la proportionnalité sur les longueurs. Il faut trouver le bon coefficient (multiplicateur ou de proportionnalité).

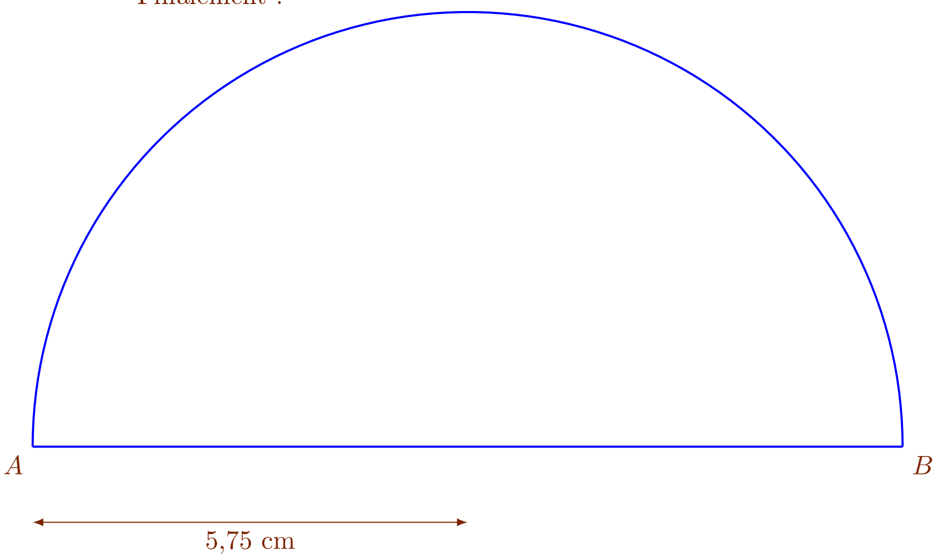
Déterminons la longueur $A'B'$ correspondant à AB après la mise à l'échelle.

$$\begin{aligned} A'B' &= \frac{1}{20\,000} \times AB \\ &= \frac{1}{20\,000} \times 2\,300 \text{ m} \\ &= \frac{2\,300}{20\,000} \times 100 \text{ cm} \\ &= 11{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ainsi le rayon du cercle que nous devons dessine est :

$$\begin{aligned} \frac{A'B'}{2} &= \frac{11{,}5 \text{ cm}}{2} \\ &= 5{,}75 \text{ cm} \end{aligned}$$

Finalement :



(b) Calculons la distance d_p du parcours.

Le parcours ayant une forme de demi-cercle fermé :

$$\begin{aligned} d_p &= 2\,300 \text{ m} + \frac{1}{2} \times \left(2\pi \frac{2\,300 \text{ m}}{2}\right) \\ &\approx 5912{,}83 \text{ m, en tronquant.} \end{aligned}$$

$$\boxed{d_p \approx 5913 \text{ m.}}$$

(c) Calculons la vitesse moyenne v_p.

$$v_p = \frac{d_p}{t_p}$$

où t_p désigne le temps mis pour faire le parcours.
Or

$$\begin{aligned} t_p &= 33 \text{ min} + 36 \text{ s} \\ &= 33 \times \frac{1}{60} \text{ h} + 36 \times \frac{1}{3600} \text{ h} \\ &= \left(\frac{33}{60} + \frac{36}{3600}\right) \text{ h} \\ &= \frac{14}{25} \text{ h} \\ &= 0{,}56 \text{ h} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_p &\approx 5913 \text{ m} \\ &\approx 5913 \times \frac{1}{1000} \text{ km} \\ &\approx 5{,}913 \text{ km} \end{aligned}$$

donc

$$v_p \approx \frac{5{,}913 \text{ km}}{0{,}56 \text{ h}}$$
$$= 10{,}5589 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}, \text{ en tronquant.}$$

$$\boxed{v_p \approx 10{,}6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.}$$

(d) Plutôt que de travailler avec les longueurs réelles pour ensuite les convertir en longueur nous travaillerons avec les longueurs de la figure mise à l'échelle.

* La longueur P de la représentation du parcours est en centimètre, d'après la question 2.(a) :

$$\begin{aligned} P &= 2 \times 5{,}75 + \frac{1}{2} \times 2\pi 5{,}75 \\ &= (2+\pi)5{,}75 \\ &\approx 29{,}6 \end{aligned}$$

* $\frac{1}{4} \times 29{,}6 = 7{,}4$.
* Ainsi on doit avoir l'arc de cercle $\widehat{AL} \approx 7{,}4$ cm.
Par rapport au demi-cercle d'extrémités A et B cela représente une proportion de

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{7{,}4}{\frac{1}{2} \times 2\pi 5{,}75} \\ &\approx 0{,}41 \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'angle correspondant :

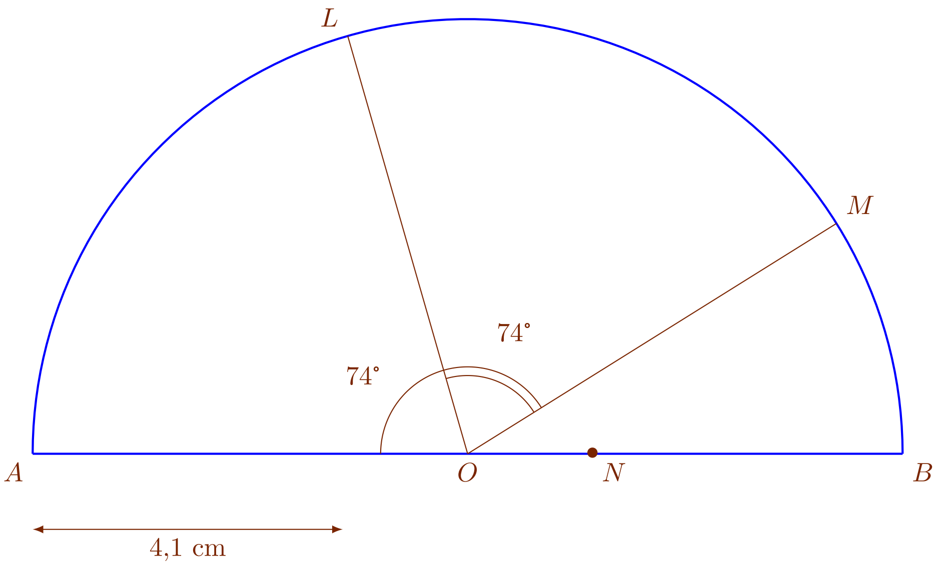
$$\begin{aligned} \theta &\approx \alpha \times 180 \\ &\approx 73{,}74 \end{aligned}$$

En notant O le centre du demi-cercle, nous avons obtenu que $\widehat{AOL} \approx 74°$.

* Donc : $\widehat{AOM} \approx 148°$.
* Le point N n'est a priori pas sur le demi-cercle.

$$AN \approx 7{,}4$$

Enfin :



Morale : pensez à apporter un rapporteur.

Exercice 3.

Partie A : installation du potager.

1. Nous connaissons les longueurs des trois côtés de ce triangle donc, pour vérifier qu'il est rectangle, il suffit d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

   Démontrons que ABC est rectangle en A.

   D'une part (toutes les grandeurs étant exprimées en mètres) :

$$CA^2 + AB^2 = 10^2 + 24^2$$
$$CA^2 = 676 \quad (1)$$

et d'autre part :

$$CB^2 = 26^2$$
$$CB^2 = 676 \quad (2)$$

donc, de (1) et (2), on déduit l'égalité qui nous permet d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore) :

$$CA^2 + AB^2 = CB^2.$$

Donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\boxed{ABC \text{ est rectangle en } A.}$$

2. (a) Pour calculer cette longueur et au su des angles droits nous pouvons penser à de la trigonométrie, au théorème de Thalès, au théorème de Pythagore.
   Nous n'avons pas d'information sur les angles non droits donc pas de trigonométrie.
   Nous ne connaissons pas BE donc pas de Pythagore.

   Déterminons DE en utilisant le théorème de Thalès.

   * Configuration de Thalès.
     Les points B, D, A d'une part et B, C, E d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Parallélisme. Puisque, par construction , $ADEF$ est un rectangle, $(AF) \parallel (DE)$. Autrement dit $(AC) \parallel (DE)$.

   Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

   $$\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{CA}.$$

   En ne conservant que ce qui nous intéresse :

   $$\frac{BD}{AB} = \frac{ED}{CA}$$
   $$\frac{AB - AD}{24} = \frac{ED}{10}$$
   $$\frac{24 - 4{,}8}{24} \times 10 = \frac{ED}{10} \times 10$$
   $$8 = ED$$

$$ED = 8 \text{ m.}$$

(b) Calculons l'aire $\mathscr{A}(4{,}8)$ de $ADEF$.

Puisque $ADEF$ est un rectangle :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(4{,}8) &= AD \times DE \\ &= 4{,}8 \text{ m} \times 8 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}(4{,}8) = 38{,}4 \text{ m.}$$

3. (a) En procédant comme à la question 2.(a) :

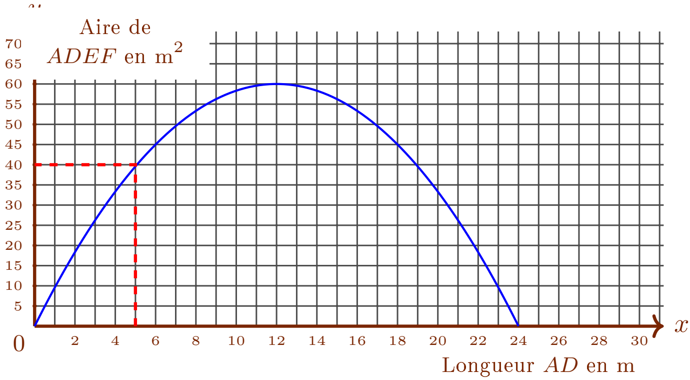
$$\begin{aligned}DE &= 10 \times \frac{24 - x}{24} \\ &= 10\left(\frac{24}{24} - \frac{x}{24}\right) \\ &= 10\left(1 - \frac{1}{24}x\right) \\ &= 10 \times 1 - 10 \times \frac{1}{24}x \\ &= 10 - \frac{10}{24}x\end{aligned}$$

$$DE = 10 - \tfrac{5}{12}x.$$

(b) En procédant comme dans la question 2.(b) :

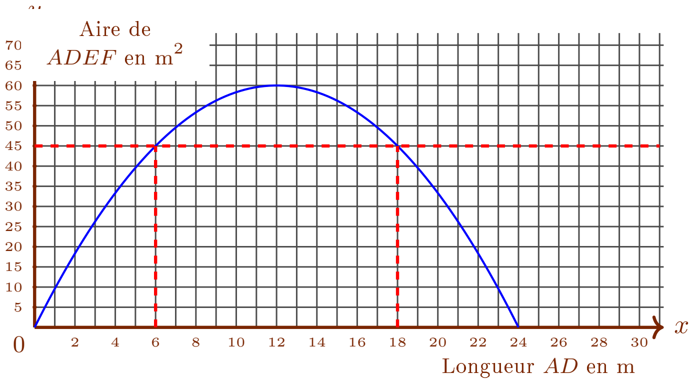
$$\mathscr{A}(x) = AD \times DE$$

$$\mathscr{A}(x) = x \times \left(10 - \tfrac{5}{12}x\right).$$



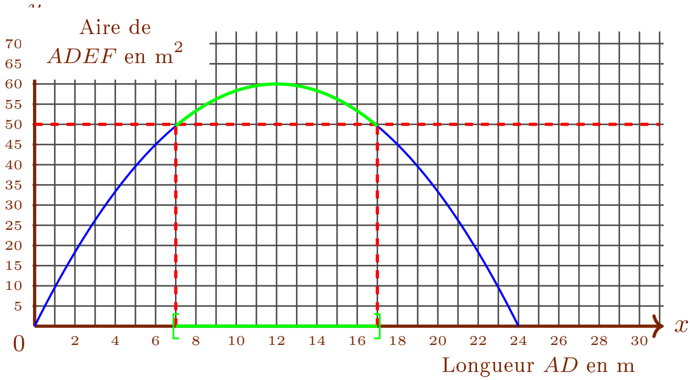
4. (a)

Si $AD = 5$ m le potager a une aire de 40 m^2.



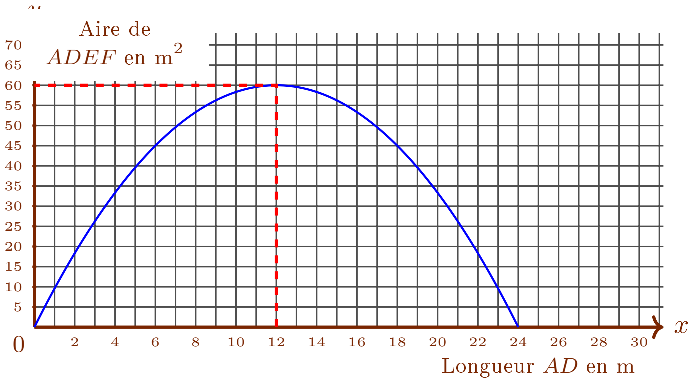
(b)

L'aire égalera 45 m^2 si l'on choisi $AD = 6$ m ou $AD = 18$ m.



(c)

L'aire sera supérieure ou égale à 50 m^2 si $7 \leqslant AD \leqslant 17$.



(d)

L'aire maximale est de 60 m^2 et cela advient lorsque $AD = 12$ m.

Partie B : choix du terreau.

1. Calculons le volume $\mathscr{V}$ de terreau.

   Puisqu'il s'agit d'un pavé droit le volume à remplir est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_r &= \left(12\ \mathrm{m}^2\right) \times (5\ \mathrm{m}) \times (30\ \mathrm{cm})\\ &= 12 \times 5 \times 30 \times \frac{1}{100}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{m}\\ &= 18\ \mathrm{m}^3\end{aligned}$$

Seul un tiers est à remplir donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \frac{1}{3}\mathscr{V}_r\\ &= \frac{1}{3} \times 18\ \mathrm{m}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V} = 6\ \mathrm{m}^3.}$$

2. Comparons les trois offres.

Convertissons le volume de terreau en ℓ.

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= 6\ \mathrm{m}^3\\ &= 6 \times 1000\ \mathrm{dm}^3\\ &= 6000\ \ell\end{aligned}$$

* Pour le magasin 1 le coût est de

$$\begin{aligned}C_1 &= 20 + 6000 \times 0{,}10\\ &= 620\end{aligned}$$

* Magasin 2.
  Une remise de 20 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned}CM &= 1 + \frac{t}{100}\\ &= i1 + \frac{-20}{100}\\ &= 0{,}8\end{aligned}$$

$6000 = 300 \times 20$ il faudra donc 300 sacs de 20 ℓ.
Nous en déduisons le coût :

$$\begin{aligned} C_3 &= 10 + 0{,}8 \times (300 \times 2{,}35) \\ &= 574 \end{aligned}$$

* Pour le magasin 3 : $6000 = 120 \times 50$. Il faudra donc 120 sacs. Nous en déduisons le coût :

$$\begin{aligned} C_2 &= 120 \times 5{,}37 \\ &= 644{,}4 \end{aligned}$$

Le magasin 2 est le plus économique pour 6 m^3.

Partie C : plantation des fleurs.

1. Chaque élève reçoit 20 graines et le taux de germination est de 90 % donc le nombre de graines que l'on peut espérer voir pousser est

$$n_g = \frac{90}{100} \times 20$$

$n_g = 18$.

2. (a) Chacun des 26 élèves recevra 20 graines il faut donc un total de $26 \times 20 = 520$ graines.
   (b) Il y a 50 graines par paquet et $520 = 10 \times 50 + 20$ donc il faudra acheter 11 paquet.
   (c) Chaque paquet valant 4,53 € il faudra payer : $11 \times 4{,}53$ €.

Il faut prévoir un budget de 49,83 €.

3. (a) $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$ représentent donc $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{14}{48}=\frac{7}{24}$.
Comparons cette fraction à $\frac{25}{100}$:

$$\frac{25}{100}-\frac{7}{24}=-\frac{1}{24}$$

Puisque $\frac{25}{100}-\frac{7}{24}<0$ il y a plus de 25 % du potager.

L'élève a raison.

(b) Notons x le nombre de bulbes dans le panier. Puisque $\frac{1}{6}$ des bulbes sont des tulipes.
Nous avons

$$30+\frac{1}{6}x=x.$$

Cette équation (du premier degré) équivaut successivement à

$$\begin{aligned}30+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}x &= x\frac{1}{6}x\\ 30 &= \frac{5}{6}x\\ \frac{6}{5}\times 30 &= \frac{6}{5}\times\frac{1}{6}x\\ 36 &= x\end{aligned}$$

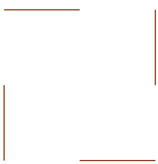
Enfin $36-30=6$.

Il y a 6 bulbes de tulipes.

Exercice 4.

Cliquez sur ce lien pour télécharger le programme.

1.



2.

```
Quand [drapeau vert] est cliqué
effacer tout
aller à x: (0) y: (0)
s'orienter à (90)
répéter (8) fois
    stylo en position d'écriture
    avancer de (10)
    relever le stylo
    avancer de (10)
```

Cliquez sur le programme pour le télécharger.

3. (a)

```
1  Quand [drapeau vert] est cliqué
2  effacer tout
3  aller à x: 0 y: 0
4  s'orienter à 90
5  répéter 8 fois
6      stylo en position d'écriture
7      avancer de 10
8      relever le stylo
9      avancer de 10
10     tourner de ↻ de 45 degrés
```

(b) Il s'agit d'une rotation de 45 °.