Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Elsa R. et Mme Codvelle pour les corrections apportées.

Exercice 1.

1. (a) Indiquons toutes les sommes possibles avec ces deux dés sous forme d'un tableau (en distinguant les deux faces 1 et 2 :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	5
1	2	3	4	5	6	6
1	2	3	4	5	6	6
2	3	4	5	6	7	7
3	4	5	6	7	8	8
4	5	6	7	8	9	9
5	6	7	8	9	10	10

L'ensemble des sommes possibles est
$X(\Omega) = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$.

(b) Notons E : « obtenir une somme de 8 ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

Tous les couples de faces des deux dés (en distinguant les deux faces 1 du premier dé et les deux faces 5 du second).
Il est donc naturel de modéliser avec une équiprobabilité : toutes les cases du précédent tableau ont la même probabilité d'être obtenus.
Ainsi E est réalisé par 4 issues sur un total de 36 donc

$$\mathbb{P}(E) = \frac{4}{36}$$

$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{9}$.

2. (a) Notons F : « obtenir une somme de 6 ».

Calculons $\mathbb{P}(F)$.

Il y a équiprobabilité entre les couples de faces, F est réalisé par 8 issues (couples de faces) sur un total de 36 donc

$$\mathbb{P}(F) = \frac{8}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(F) = \frac{2}{9}.}$$

(b) Notons F_1 : « obtenir une somme de 6 au premier lancer » et F_2 : « obtenir une somme de 6 au second lancer ».

Calculons $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)$.

Il est raisonnable d'estimer que le résultat du second lancer est indépendant de celui du premier donc

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2)$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \frac{16}{81}.}$$

3. (a) En raisonnant comme dans les questions précédentes nous pouvons déterminer les probabilités de toutes les sommes possibles :

Sommes	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilité	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$

Puisque 6 est la somme qui a la plus grande probabilité

Eden a le plus de chance de gagner la partie.

(b) Il est possible que la somme choisir par Axelle soit obtenue 6 fois d'affilée (constitution de la fourmi entière) sans que Eden ne gagne une seule fois.

Eden n'est pas sûr de gagner la partie.

Exercice 2.

1. Déterminons la longueur $\mathscr{L}_P$ du parcours.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_p &= AB + ABC + CD + DA \\ &= 960\text{ m} + 1{,}05\text{ km} + 780\text{ m} + 660\text{ m} \\ &= 960\text{ m} + 1{,}05 \times 1000\text{ m} + 780\text{ m} + 660\text{ m}\end{aligned}$$

$\mathscr{L}_P = 3\,450$ m.

2. (a) Déterminons la distance totale, $\mathscr{D}_L$, parcourue par Léo.

D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_L &= 2 \times \mathscr{L}_P + \frac{1}{3} \times \mathscr{L}_P \\ &= 2 \times 3\,450\text{ m} + \frac{1}{3} \times 3\,450\text{ m}\end{aligned}$$

$\mathscr{D}_L = 8\,050$ m.

(b) Calculons la vitesse moyenne, v_L, de Léo.

$$\begin{aligned}
v_L &= \frac{\mathscr{D}_L}{48\text{ min}} \\
&= \frac{8050\text{ m}}{48\times\frac{1}{60}\text{ h}} \\
&= \frac{8050\times\frac{1}{1000}\text{ km}}{\frac{48}{60}\text{ h}} \\
&= \frac{\frac{8050}{1000}}{\frac{48}{60}}\ \frac{\text{km}}{\text{m}} \\
&= \frac{161}{16}\text{ km/h}
\end{aligned}$$

$$v_L = 10{,}0625\text{ km/h}.$$

(c) Déterminons le temps t_L qu'aurait mis Léo à parcourir 15 km.

$$\begin{aligned}
v_L &= \frac{15\text{ km}}{t_L} \\
v_L\times t_L &= \frac{15\text{ km}}{t_L}\times t_L \\
v_L\times t_L &= 15\text{ km} \\
\frac{v_L\times t_L}{v_L} &= \frac{15\text{ km}}{v_L} \\
t_L &= \frac{15\text{ km}}{10{,}0625\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} \\
t_L &= \frac{15}{10{,}0625}\text{ km}\cdot\text{km}^{-1}\cdot\text{h} \\
t_L &\approx 1{,}49068\text{ h}
\end{aligned}$$

Donc $t_L < 1{,}5$ h.

Léo aurait effectivement parcouru 15 km en moins d'une heure et demie.

3. Déterminons leur vitesse moyenne v_m.

Commençons par déterminer le temps mis pour faire le parcours.

* $AB + BC = 960 \text{ m} + 1050 \text{ m} = 2010 \text{ m} = 2{,}01 \text{ km}$.
Le temps mis par Tara pour parcourir cette distance est :

$$\begin{aligned} t_T &= \frac{2{,}01 \text{ km}}{10 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} \\ &= \frac{2{,}01}{10} \text{ h} \\ &= 0{,}201 \text{ h} \end{aligned}$$

* $CD + DA = 780 \text{ m} + 660 \text{ m} = 1440 \text{ m} = 1{,}44 \text{ km}$
Le temps mis par Kevin pour parcourir cette distance est :

$$\begin{aligned} it_K &= \frac{1{,}44 \text{ km}}{6 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} \\ &= \frac{1{,}44}{6} \text{ h} \\ &= 0{,}24 \text{ h} \end{aligned}$$

* Ainsi le temps de parcours total est $t_P = 0{,}201 \text{ h} + 0{,}24 \text{ h} = 0{,}441 \text{ h}$.

Nous en déduisons la vitesse moyenne

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{3{,}45 \text{ km}}{0{,}441 \text{ h}} \\ &\approx 7{,}823129252 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_m \approx 7{,}823 \text{ km/h}.}$$

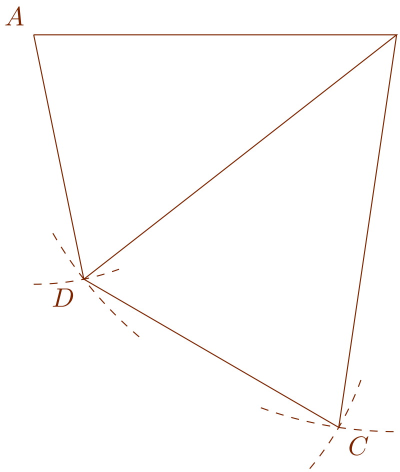
4. (a) La longueur BD sera représentée par une longueur de

$$\begin{aligned} \ell_{BD} &= BD \times \frac{1}{20000} \\ &= 1050 \times \frac{1}{20000} \text{ m} \\ &= 0{,}0525 \text{ m} \\ &= 0{,}0525 \times 100 \text{ cm} \\ &= 5{,}25 \text{ cm} \end{aligned}$$

En procédant de même pour les autres longueurs :

Nom	AB	BC, BD	CD	AD
Distances réelles (en m)	960	1050	780	660
À l'échelle (en cm)	4,8	5,25	3,9	3,3

Il n'y a plus qu'à dessiner $[AB]$, puis D (comme troisième sommet de ABD avec un compas), et enfin C (comme troisième sommet de BCD avec un compas).



(b) Déterminons la distance, d_A, parcourue par Amina.

$$\begin{aligned} d_A &= v \times t \\ &= \left(11{,}5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}\right) \times (25 \text{ min}) \\ &= \left(11500 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}\right) \times \left(\frac{25}{60} \text{ h}\right) \\ &= 11500 \times \frac{25}{60} \text{ m} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{h} \\ &= \frac{14375}{3} \text{ m} \\ &= 4791{,}666\ldots \text{ m} \end{aligned}$$

Nous remarquons que :

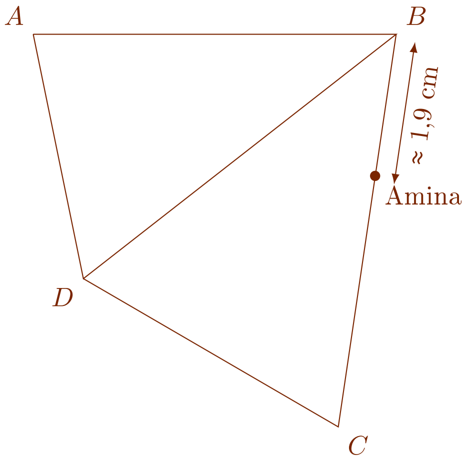
$$d_A = 3450 \text{ m} + 960 \text{ m} + 381{,}666\ldots \text{ m}$$

Ainsi Amina a parcourue un tour complet, la distance AB et sur le trajet de B à C elle a encore parcourue $381{,}666\ldots$ m.

Or

$$381{,}666\ldots\ \text{m} \times \frac{1}{20000} = 0{,}01908333\ldots\ \text{m}$$
$$= 1{,}908333\ldots\ \text{cm}$$

donc



Exercice 3.

Partie A.

1. Déterminons AL.

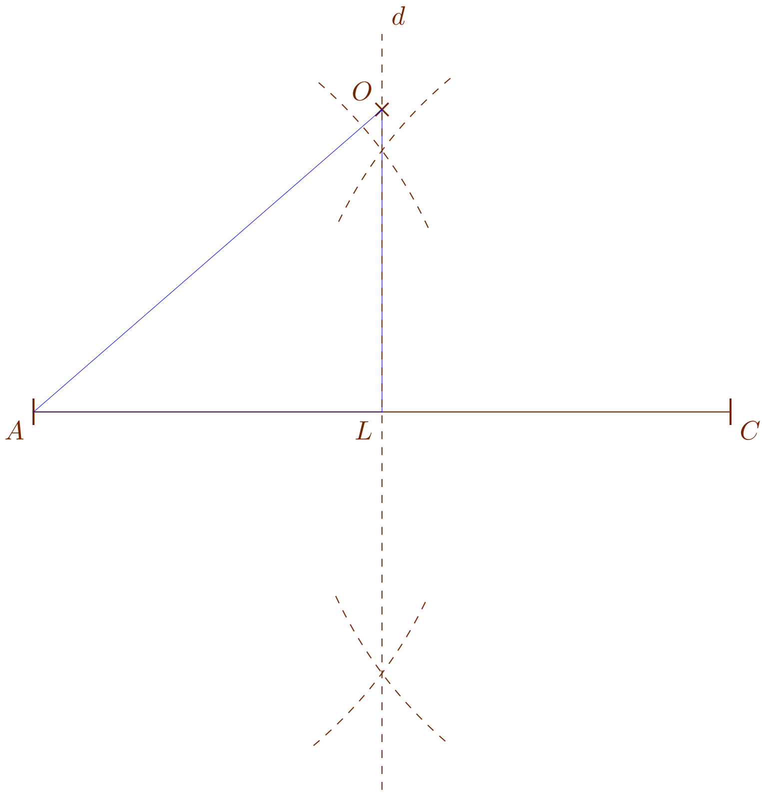
   * Déterminons d'abord AC.
     Puisque le solide est un pavé droit, ADC est rectangle en D. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore :
     $$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$
     Nous en déduisons (toutes les longueurs étant exprimées en centimètre) :
     $$AC^2 = 7^2 + 6^2$$
     $$= 85$$
     Puisque AC est une longueur, c'est un nombre positif et donc
     $$AC = \sqrt{85}$$

* Puisque le solide est un pavé droit $ABCD$ est un parallélogramme. Donc ses diagonales se coupent en leu milieu. Autrement dit L est le milieu de $[AC]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} AL &= \frac{1}{2}AC \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{85} \text{ cm} \\ &\approx 4{,}60977 \text{ cm} \end{aligned}$$

$AL \approx 4{,}6$ cm. i

2. Traçons le segment $[AC]$ tel que $AC \approx 9{,}2$ cm, puis sa médiatrice d (passant par L) avec le compas, enfin plaçons sur cette médiatrice O tel que $OL = 4$ cm.



3. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_p$ de la pyramide $OABCD$.

Puisque OL est la hauteur de cette pyramide :

$$\mathscr{V}_p = \frac{1}{3} \times OL \times \mathscr{A}(ABCD),$$

où $\mathscr{A}(ABCD)$ désigne l'aire délimitée par le quadrilatère $ABCD$.
Or $ABCD$ est un rectangle donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= DA \times DC \\ &= (7 \text{ cm}) \times (6 \text{ cm}) \\ &= 7 \times 6 \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 42 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_p &= \frac{1}{3} \times 4 \text{ cm} \times 42 \text{ cm}^2 \\ &= \frac{1}{3} \times 4 \times 42 \text{ cm} \cdot \text{cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_p = 56 \text{ cm}^3.}$$

(b) Calculons le volume $\mathscr{V}_{pc}$ du pavé creusé.

En notant $\mathscr{V}_{\text{pavé}}$ le volume du pavé droit nous avons

$$\mathscr{V}_{pc} = \mathscr{V}_{\text{pavé}} - \mathscr{V}_p$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{\text{pavé}} &= DD' \times DC \times DA \\ &= 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} \\ &= 5 \times 6 \times 7 \text{ cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} \\ &= 210 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

donc

$$\mathscr{V}_{pc} = 210\ \text{cm}^3 - 56\ \text{cm}^3$$

$$\boxed{\mathscr{V}_{pc} = 154\ \text{cm}^3.}$$

Partie B.

1. En reprenant le raisonnement de A.3.(a), avec $OL = x$, nous obtenons que

   le volume, exprimé en cm^3, est $\mathscr{V}_p = 14x$.

2. En reprenant le raisonnement de A.3.(b) nous obtenons que :

   le volume, exprimé en cm^3, est $\mathscr{V}_{pc} = 210 - 14x$.

3. Puisque $OEFGH$ est un agrandissement de $OABCD$ de rapport 2, le volume, $\mathscr{V}_P$, de $OEFGH$ est, en centimètre cube :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_P &= 2^3 \times \mathscr{V}_p \\ &= 2^3 \times 14x\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_P = 112x.}$$

4. On souhaite x tel que : $\mathscr{V}_P = 2\mathscr{V}_{pc}$.
   Cette égalité équivaut successivement à

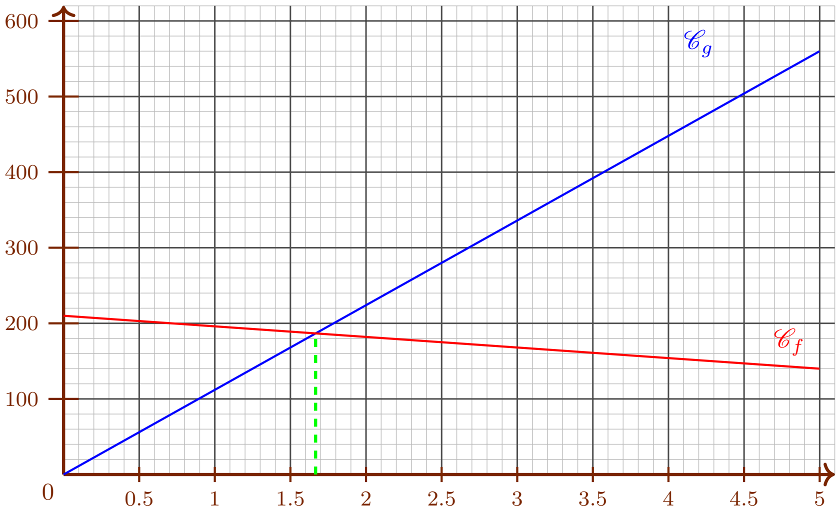
$$\begin{aligned}
112x &= 2 \times (210 - 14x)\\
112x &= 2 \times 210 - 2 \times 14x\\
112x &= 420 - 28x\\
112x + 28x &= 420 - 28x + 28x\\
140x &= 420\\
\frac{140x}{140} &= \frac{420}{140}\\
x &= 3
\end{aligned}$$

Il faut choisir $x = 3$.

5. (a) f et g sont des fonctions affines. Cependant g est linéaire donc sa courbe représentative passe par l'origine du repère. Nécessairement

D_2 est la courbe représentative de g et donc D_1 est celle de f.

(b)



Le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre pour $x \geqslant 1{,}65$.

(c)

$$g(x) \geqslant f(x)$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 112x &\geqslant 210 - 14x \\ 112x + 14x &\geqslant 210 - 14x + 14x \\ 126x &\geqslant 210 \\ \frac{126x}{126} &\geqslant \frac{210}{126} \\ x &\geqslant \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{x \in \left[\frac{5}{3}; 5\right].}$$

Exercice 4.

1. *Cliquez sur ce lien pour télécharger le programme.*

   (a) Considérons un tableau d'état des variables du programme.

Lignes de codes.	demander Choisis un nombre et attendre	mettre nombre départ à réponse	mettre valeur 1 à 2 * nombre départ	mettre valeur 2 à valeur 1 + 3	mettre valeur 3 à nombre départ - 2	mettre résultat à valeur 2 * valeur 3
réponse	3	3	3	3	3	3
nombre départ		3	3	3	3	3
valeur 1			$2 \times 3 = 6$	6	6	6
valeur 2				$6 + 3 = 9$	9	9
valeur 3					$3 - 2 = 1$	1
résultat						$9 \times 1 = 9$

Si le nombre de départ est 3 alors le résultat est 9.

(b)

Lignes de codes.	demander Choisis un nombre et attendre	mettre nombre départ à réponse	mettre valeur 1 à 2 * nombre départ	mettre valeur 2 à valeur 1 + 3	mettre valeur 3 à nombre départ - 2	mettre résultat à valeur 2 * valeur 3
réponse	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4
nombre départ			2,4	2,4	2,4	2,4
valeur 1			$2 \times 2{,}4 = 4{,}8$	4,8	4,8	4,8
valeur 2				$4{,}8 + 3 = 7{,}8$	7,8	7,8
valeur 3					$2{,}4 - 2 = 0{,}4$	0,4
résultat						$7{,}8 \times 0{,}4 = 3{,}12$

Si le nombre de départ est 2,4 alors le résultat est 3,12.

(c)

Lignes de codes.	demander Choisis un nombre et attendre	mettre nombre départ à réponse	mettre valeur 1 à 2 * nombre départ	mettre valeur 2 à valeur 1 + 3	mettre valeur 3 à nombre départ - 2	mettre résultat à valeur 2 * valeur 3
réponse	x	x	x	x	x	x
nombre départ			x	x	x	x
valeur 1			$2 \times x = 2x$	$2x$	$2x$	$2x$
valeur 2				$2x + 3$	$2x + 3$	$2x + 3$
valeur 3					$x - 2$	$x - 2$
résultat						$(2x + 3)(x - 2)$

Or en développant, simplifiant puis réduisant :

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x - 2) &= 2x \times x + 2x \times (-2) + 3 \times x + 3 \times (-2)\\ &= 2x^2 - 4x + 3x - 6\\ &= 2x^2 - x - 6\end{aligned}$$

donc

si le nombre de départ est x alors le résultat est $2x^2 - x - 6$.

2. (a) Appliquons le programme en prenant 3 pour nombre de départ.

Choisis un nombre.	3
Élève-le au carré	$3^2 = 9$
Soustrais 3.	$9 - 3 = 6$
Multiplie par 2.	$6 \times 2 = 12.$
Soustrais le nombre de départ.	$12 - 3 = 9.$

Si le nombre de départ est 3 alors le résultat est 9.

(b) Appliquons le programme en prenant $\frac{7}{3}$ pour nombre de départ.

Choisis un nombre.	$\frac{7}{3}$
Élève-le au carré	$\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$
Soustrais 3.	$\frac{49}{9} - 3 = \frac{22}{9}$
Multiplie par 2.	$\frac{22}{9} \times 2 = \frac{44}{9}$.
Soustrais le nombre de départ.	$\frac{44}{9} - \frac{7}{3} = \frac{23}{9}$.

Si le nombre de départ est $\frac{7}{3}$ alors le résultat est $\frac{23}{9}$.

3. Appliquons le programme en prenant x pour nombre de départ.

Choisis un nombre.	x
Élève-le au carré	x^2
Soustrais 3.	$x^2 - 3$
Multiplie par 2.	$(x^2 - 3) \times 2$.
Soustrais le nombre de départ.	$2(x^2 - 3) - x$

Or en développant, simplifiant puis réduisant :

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 3) - x &= 2 \times x^2 - 2 \times 3 - x \\ &= 2x^2 - 6 - x \\ &= 2x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

donc on obtient bien le même résultat que pour le programme de la question 1.

Les deux programmes donnent le même résultat.

4. Au cours des questions précédentes nous avons obtenu diverses expressions littérales du résultat des programmes : $(2x+3)(x-2)$, $2x^2-x-6$, $2(x^2-3)-x$. Nous préférons l'expression qui fait apparaître une équation produit nul.

Résolvons l'équation : $(2x + 3)(x - 2) = 0$.

$$(2x+3)(x-2)=0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 0 & \text{et} \quad & x-2=0 \\ 2x+3-3 &= 0-3 & \text{et} \quad & x-2+2=0+2 \\ 2x &= -3 & \text{et} \quad & x=2 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{-3}{2} & \text{et} \quad & x=2 \\ x &= -\frac{3}{2} & \text{et} \quad & x=2 \end{aligned}$$

Le résultat sera zéro si et seulement si le nombre de départ est choisi dans l'ensemble $\left\{-\frac{3}{2};\ 2\right\}$.

5. Utilisons la formule donnée dans l'énoncé :

$$= 2 * \mathtt{A2} \wedge 2 - \mathtt{A2} - 6.$$

Exercice 5.

1. Le point signifie 1 et le trait signifie 5.
2. $21 = 1 \times 20 + 1 \times 1$ donc :

3. $37 = 1 \times 20 + 3 \times 5 + 2 \times 1$ donc

4.

a) $3 \times 20 + 2 \times 5 + 4 \times 1 = 74$.

b) $1 \times 400 + 3 \times 100 + 2 \times 20 + 1 \times 5 = 745$.

5. (a) $25 = 1 \times 20 + 1 \times 5$.

(b) $101 = 1 \times 100 + 1 \times 1$.

(c) Suivant l'endroit où sont placés les points ou les traits (haut ou bas) ils représentent des unités ou des vingtaines. On retrouve également l'utilisation d'un zéro de position sous la forme du coquillage.