Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Exercice 1.

Partie 1.

1. (a) Exprimons la vitesse v_1 de cet élève en m/min.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d}{t} \\ &= \frac{4 \times 250 \text{ m}}{10 \text{ min}} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_1 = 100 \text{ m/min.}}$$

(b) Exprimons la vitesse v_2 de cet élève en km/h.

$$\begin{aligned} v_2 &= 150 \text{ m/s} \\ &= 150 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 150 \ \frac{\frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{60} \text{ h}} \\ &= 150 \times \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{60}} \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= \frac{150 \times 60}{1000} \text{ km/h} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_2 = 9 \text{ km/h.}}$$

2. * Exprimons la vitesse v_3 de l'élève de CM1 en m/min.

$$\begin{aligned} 9 \text{ min} + 30 \text{ s} &= 9 \text{ min} + 30 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\ &= 9{,}5 \text{ min} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{4 \times 400 \text{ m}}{9{,}5 \text{ min}} \\ &= \frac{4 \times 400}{9{,}5} \ \frac{\text{m}}{\text{min}} \\ &\approx 168{,}421 \text{ m/min en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_3 \approx 168 \text{ m/min.}}$$

* Exprimons la vitesse v_4 de l'élève de CM2 en m/min.

$$\begin{aligned} 11 \text{ min} + 8 \text{ s} &= 11 \text{ min} + 8 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\ &= \frac{167}{15} \text{ min} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_4 &= \frac{4 \times 500 \text{ m}}{\frac{167}{15} \text{ min}} \\ &= \frac{2000}{\frac{167}{15}} \ \frac{\text{m}}{\text{min}} \\ &\approx 179{,}6407 \text{ m/min en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_5 \approx 180 \text{ m/min.}}$$

Partie 2.

1. (a) Déterminons le rayon r_p du cercle de pénalité.

   On a donc en exprimant toutes les données en mètre : $2\pi r_p = 20$. Cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \frac{1\pi r_p}{2\pi} &= \frac{20}{2\pi} \\ r_p &= \frac{10}{\pi} \end{aligned}$$

Donc en tronquant :

$$r_p \approx 3{,}183$$

$$\boxed{r_p \approx 3{,}18 \text{ m.}}$$

(b) * Le temps mis pour faire un grand tour est

$$\begin{aligned} t_g &= \frac{250 \text{ m}}{150 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{250}{150} \frac{\text{m}}{\text{m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{5}{3} \text{ min} \end{aligned}$$

* Donc pour faire les quatre grands tours il lui faudra $t_{4g} = 4 \times \frac{5}{3}$ min $= \frac{20}{3}$ min.
* Les trois séries de trois lancers lui prendrons un temps de $t_{3l} = 3 \times 30$ s $= 90$ s $= 90 \times \frac{1}{60}$ min $= 1{,}5$ min.
* Le temps mis pour faire un tour de pénalité est :

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{20 \text{ m}}{150 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{2}{15} \text{ min} \end{aligned}$$

* Le temps mis pour faire tous les tours de pénalité est :

$$\begin{aligned} t_{3p} &= (1+2) \times t_p \\ &= 3 \times \frac{2}{15} \text{ min} \\ &= 0{,}4 \text{ min} \end{aligned}$$

Le temps de parcours total est donc de

$$\begin{aligned} t_{total} &= t_{4g} + t_{3l} + t_{3p} \\ &= \frac{20}{3} \text{ min} + 1{,}5 \text{ min} + 0{,}4 \text{ min} \\ &= \frac{257}{30} \text{ min} \\ &= \frac{514}{60} \text{ min} \end{aligned}$$

Or $514 = 8 \times 60 + 34$ donc :

$$t_{total} = 8 \text{ min} + 34 \text{ s}$$

Le parcours est réalisé en 8 min et 34 s.

2. (a) `C3 + E3 + G3` est le nombre de tours de pénalités donc

   `(C3 + E3 + G3) * 20` est la distance supplémentaire courue du fait des pénalités.

   (b) Il s'agit de calculer la vitesse moyenne sans tenir compte des temps de tirs donc, le résultat étant attendu en m/min :

   `= H3/(I3/60)`

   (c) Nous avons déjà remarqué qu'il faut 90 s pour lancer les neufs balles. La durée totale en minutes est donc donnée par :

   `= (I3 + B3 + D3 + F3)/60.`

   (d) Entre les essais 2 et 3 l'élève a augmenté sa vitesse de lancer des balles.

   (e) La durée totale a augmentée entre les essais 2 et 3.

Pour effectuer un parcours plus rapidement il vaut mieux prendre le temps de bien viser les cibles et d'éviter les tours de pénalité.

Exercice 2.

1. (a) Représentons l'ensemble des issues de cette expérience par un tableau (puisqu'il y a deux épreuves).

1 0,1	0	1	2
0	0,0	1,0	2,0
1	0,1	1,1	2,1
2	0,2	1,2	2,2

L'ensemble des nombres possibles est
$\{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 2;\ 2{,}1;\ 2{,}2\}$.

(b) L'univers est l'ensemble Ω des nombres possibles précédemment indiqué. Il est raisonnable d'après les indications de l'énoncé (dé non truqué) de modéliser cette situation par une équiprobabilité.

Par conséquent toutes les issues, y compris 1,2 , ont la même probabilité d'être obtenues.

D'après la question précédente l'univers comporte 9 issues donc

$\mathbb{P}(1{,}2) = \frac{1}{9}$.

(c) Notons C « obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

$C = \{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2\}$.

Il y a équiprobabilité, C est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 9 donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}.}$$

(d) Notons D « obtenir un nombre entier ».

Calculons $\mathbb{P}(D)$.

$D = \{0;\ 1;\ 2\}$.
Il y a équiprobabilité, D est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 9 donc

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = \frac{1}{3}.}$$

(e) Notons E « obtenir un nombre décimal ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

Tous les nombres obtenus sont décimaux donc E est l'événement certain :

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = 1.}$$

2.

(a) Puisque $\mathbb{P}(Z_2)$ est proportionnelle à l'aire de Z_2 qui est constituée de 12 carrés sur un total de 36 :

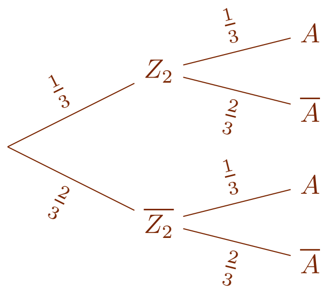
$$\mathbb{P}(Z_2) = \frac{12}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_2) = \frac{1}{3}.}$$

(b) Notons A : « obtenir le nombre 1 ».
Il y a équiprobabilité entre les faces du dé, 2 d'ente elles réalisent A et il y a 6 faces au total donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Calculons $\mathbb{P}(A \cap Z_2)$.

Nous pouvons nous représenter les choses sous forme d'un arbre :



Le principe multiplicatif permet alors de conclure : $\mathbb{P}(A \cap Z_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Plus formellement : il est raisonnable dans ce contexte de considérer que le nombre affiché et la zone du tapis obtenue sont des événements indépendants.
Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap Z_2) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(Z_2)\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap Z_2) = \frac{1}{9}.}$$

(c) Notons B : « obtenir un nombre pair ».
Il y a équiprobabilité entre les faces du dé, 4 d'ente elles réalisent B et il y a 6 faces au total donc : $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

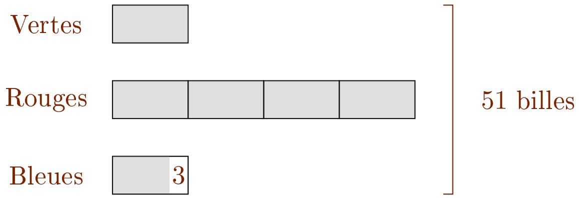
Calculons $\mathbb{P}(B \cap Z_2)$.

B et Z_2 sont indépendants donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cap Z_2) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(Z_2)\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B \cap Z_2) = \frac{2}{9}.}$$

Exercice 3.

1. 

2. (a) Si r est le nombre de billes rouges alors :

$$r = 4v.$$

Si b est le nombre de billes bleues alors

$$b = v - 3.$$

(b) On doit avoir

$$v + b + r = 51.$$

Ce qui revient, d'après la question précédente, à

$$v + v - 3 + 4v = 51.$$

Cette dernière équation du premier degré équivaut successivement à :

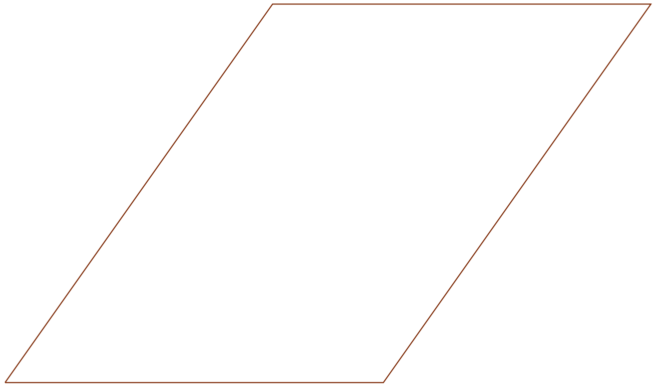
$$\begin{aligned}
6v - 3 &= 51 \\
6v - 3 + 3 &= 51 + 3 \\
6v &= 54 \\
\frac{6v}{6} &= \frac{54}{6} \\
v &= 9
\end{aligned}$$

Donc : $r = 4 \times 9 = 36$,
et : $b = 9 - 3 = 6$.

Il y a 9 billes vertes, 36 rouges et 6 bleues.

Exercice 4.

Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

1. 

2. Il s'agit de tracer continûment quatre segments : le tracé est une ligne polygonale formée de quatre segments de même longueur.
   La somme des angles des segments les uns par rapport aux autres étant de $45° + 135° + 45° + 135° = 360°$ la ligne polygonale qu'ils forment est fermée.
   Ainsi la figure est un quadrilatère, non croisé (du fait des angles), dont les côtés ont tous la même longueur. Autrement dit :

   la figure tracée est un losange.

3. (a) La figure est formée de 4 losanges donc

   $N = 4$.

   Les 4 losanges, en plus de l'agrandissement (avec C qui augment de 30), se déduisent les uns des autres par une rotation de 45°.

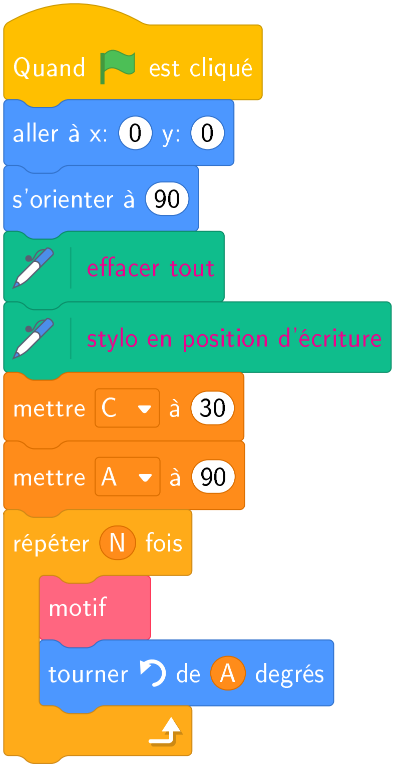
   $A = 45$.

   (b) Dans la boucle qui est répétée $n+4$ fois du programme 2 C est augmenté de 30. Donc à la fin du programme : $C = 30 + 4 \times 30$.

   En fin de programme $C = 150$.

4. Voici une modification du programme 2 : lien pour télécharger.

   Il faut choisir $A = 90$ car les losanges se déduisent par des rotations successives d'angle 90°.
   De plus il faut retirer la ligne de code qui agrandi la longueur C du côté du losange.



Exercice 5.

1. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_b$ du ballon.

   * Le haut du ballon est formé d'une demi-boule dont le volume est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi\,(30\text{ cm})^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi \times 30^3\text{ cm}^3 \\ &= 18\,000\pi\text{ cm}^3\end{aligned}$$

* Le bas du ballon est formé d'un cône de révolution dont le volume est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi\,(30\text{ cm})^2 \times (90\text{ cm}) \\ &= \frac{1}{3}\pi 30^2 \times 90\text{ cm}^2 \cdot \text{cm} \\ &= 27\,000\pi\text{ cm}^3\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_b &= \mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2 \\ &= 18\,000\pi\text{ cm}^3 + 27\,000\pi\text{ cm}^3 \\ &= (18\,000 + 27\,000)\pi\text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_b = 45\,000\pi\text{ cm}^3.}$$

(b) Exprimons $\mathscr{V}_b$ en litre.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_b &= 45\,000\pi\text{ cm}^3 \\ &= 45\,000\pi \times \frac{1}{1000}\text{ L} \\ &= 45\pi\text{ L}\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\approx 141{,}371\text{ L}$$

$$\mathscr{V}_b \approx 141 \text{ L}.$$

2. Calculons la longueur SN d'une génératrice du cône.

   Le cône étant de révolution hauteur, rayon, et génératrice dessinent un triangle SNO rectangle en O, donc, d'après le théorème de Pythagore (toutes les longueurs étant exprimées en centimètre) :

$$SN^2 = ON^2 + OS^2$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned} SN^2 &= 30^2 + 90^2 \\ &= 9\,000 \end{aligned}$$

   Puisque SN une longueur donc positive :

$$SN = \sqrt{9\,000}$$

$$\text{Nous avons bien } SN = \sqrt{9\,000} \text{ cm}^3.$$

3. Calculons l'aire $\mathscr{A}_b$ de l'enveloppe du ballon.

   * L'aire de la partie demi-sphérique est

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4\pi(30 \text{ cm})^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 30^2 \text{ cm}^2 \\ &= 1\,800\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

   * L'aire latérale de la partie conique est

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_2 &= \pi r g \\ &= \pi(30 \text{ cm}) \times (\sqrt{9\,000} \text{ cm}) \\ &= \pi \times 30 \times \sqrt{9\,000} \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 900\sqrt{10}\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_b &= {}_1 + \mathscr{A}_2\\ &= 1\,800\pi \text{ cm}^2 + 900\sqrt{10}\pi \text{ cm}^2\\ &= (1\,800 + 900\sqrt{10})\pi \text{ cm}^2\\ &= 900(2+\sqrt{10})\pi \times \frac{1}{10000}\text{m}^2\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{A}_b \approx 1{,}459 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}_b \approx 1{,}5 \text{ m}^2.}$$

4. (a) Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 25 % est

$$\begin{aligned}CM &= 1 + \frac{t}{100}\\ &= 1 + \frac{25}{100}\\ &= 1{,}25\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les longueurs sont multipliées par } 1{,}25.}$$

(b) Si les longueurs sont multipliées par 1,25 alors les aires sont multipliées par $1{,}25^2$. la nouvelle aire de l'enveloppe du ballon est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_B &= 1{,}25^2 \times \mathscr{A}_b\\ &= 1{,}25^2 \times 0{,}09(2+\sqrt{10})\pi\text{m}^2\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{A}_B \approx 2{,}280 \text{ m}^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}_B \approx 2{,}3 \text{ m}^2.}$$

(c) Si les longueurs sont multipliées par 1,25 alors les volumes sont multipliés par $1{,}25^3$. le volume du ballon est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_B &= 1{,}25^3 \times \mathscr{V}_b \\ &= 1{,}25^3 \times 45\pi\text{L}\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{V}_B \approx 276{,}11 \text{ L}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_B \approx 276 \text{ L.}}$$

5. Puisque la température est une fonction affine de l'altitude x, c'est qu'il existe des nombres a et b tels que : $t(x) = ax + b$.

   * Puisque $t(0) = 15$:

$$\begin{aligned}a \times 0 + b &= 15 \\ b &= 15\end{aligned}$$

   * Puisque $t(4500) = -12$:

$$\begin{aligned}a \times 4500 + 15 &= -12 \\ 4500a + 15 - 15 &= -12 - 15 \\ 4500a &= -27 \\ \frac{4500a}{4500} &= \frac{-27}{4500} \\ a &= -0{,}006\end{aligned}$$

   Finalement :

$$\boxed{t : x \mapsto -0{,}006x + 15.}$$

6. Nous cherchons pour quelles valeurs de x :

$$t(x) \leqslant 0.$$

Cette inéquation équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
-0{,}006x + 15 &\leqslant 0 \\
-0{,}006x + 15 - 15 &\leqslant 0 - 15 \\
-0{,}006x &\leqslant -15 \\
\frac{-0{,}006x}{-0{,}006} &\geqslant \frac{-15}{-0{,}006} \quad \text{car } -0{,}006 < 0 \\
x &\geqslant 2500
\end{aligned}$$

La température devient négative à partir de 2 500 m.

7. Lorsque la température baisse de 30° elle est de 15° − 30° = −15°.
   D'après le tableur

   la température aura baissé de 30° à 5 000 m.