Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

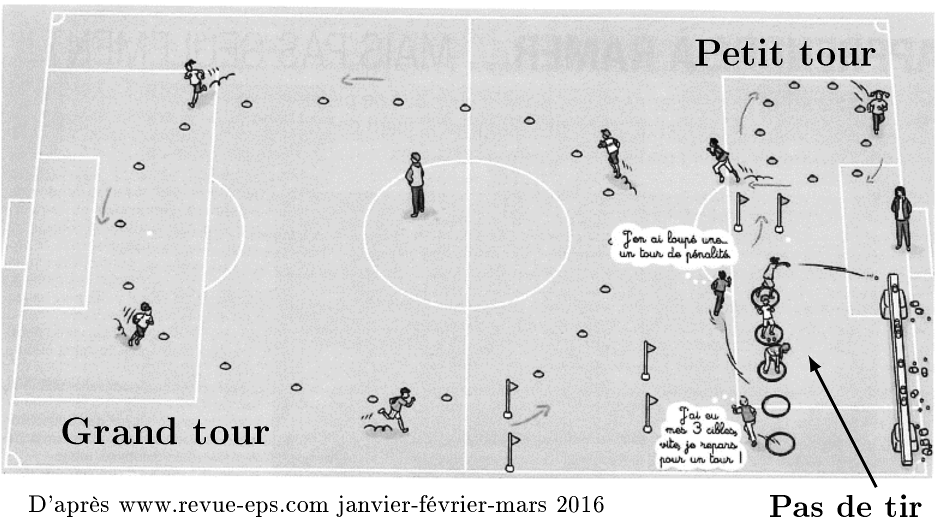
Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

Exercice 1.

Dans cette version adaptée du biathlon, les élèves ont à parcourir, en courant, 4 grands tours tracés avec des plots sur un stade comme dans la figure ci-dessous. À l'issue de chacun des 3 premiers tours, ils se présentent au pas de tir et lancent 3 balles sur des cibles. S'ils atteignent 3 fois leur cible, ils n'ont pas de pénalité et repartent pour le grand tour suivant. En revanche, pour chaque lancer manqué, ils doivent effectuer un petit tour avant de repartir sur le grand tour.

Pour chaque élève on mesure la durée mise pour faire un parcours complet (grands tours + lancers + petits tours de pénalité le cas échéant). L'objectif est de mettre le moins de temps possible pour effectuer le parcours complet.



D'après www.revue-eps.com janvier-février-mars 2016

Partie 1.

Dans cette partie, les élèves s'entraînent à la course sur le grand tour, sans effectuer de lancer de balles.

1. Pour un élève de CE1, la longueur du grand tour est de 250 m.

   (a) On considère un élève, qui effectue les 4 tours en 10 minutes. Quelle est sa vitesse moyenne de course, en mètre par minute ?

   Exprimons la vitesse v_1 de cet élève en m/min.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d}{t} \\ &= \frac{4 \times 250 \text{ m}}{10 \text{ min}} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_1 = 100 \text{ m/min.}}$$

   (b) Un autre élève a couru les 4 tours à la vitesse moyenne de 150 m/min. Déterminer sa vitesse moyenne en kilomètre par heure.

   Exprimons la vitesse v_2 de cet élève en km/h.

$$\begin{aligned} v_2 &= 150 \text{ m/s} \\ &= 150 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 150 \ \frac{\frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{60} \text{ h}} \\ &= 150 \times \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{60}} \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= \frac{150 \times 60}{1000} \text{ km/h} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_2 = 9 \text{ km/h.}}$$

2. Dans le tableau ci-dessous, les longueurs d'un grand tour pour des élèves de CM1 et de CM2 sont données, ainsi que les temps de course pour effectuer 4 grands tours, de deux élèves (un en CM1 et un en CM2).

Élève	**Longueur de 1 grand tour**	**Temps de course pour 4 grands tours**
Élève de CM1	400 m	9 minutes et 30 secondes
Élève de CM2	500 m	11 minutes et 8 secondes

Déterminer la vitesse moyenne (en mètre par minute, arrondie à l'unité) de chacun de ces deux élèves, lorsqu'ils ont réalisé les 4 grands tours.

* Exprimons la vitesse v_3 de l'élève de CM1 en m/min.

$$\begin{aligned} 9 \text{ min} + 30 \text{ s} &= 9 \text{ min} + 30 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\ &= 9{,}5 \text{ min} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{4 \times 400 \text{ m}}{9{,}5 \text{ min}} \\ &= \frac{4 \times 400}{9{,}5} \ \frac{\text{m}}{\text{min}} \\ &\approx 168{,}421 \text{ m/min en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_3 \approx 168 \text{ m/min.}}$$

* Exprimons la vitesse v_4 de l'élève de CM2 en m/min.

$$\begin{aligned} 11 \text{ min} + 8 \text{ s} &= 11 \text{ min} + 8 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\ &= \frac{167}{15} \text{ min} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_4 &= \frac{4 \times 500 \text{ m}}{\frac{167}{15} \text{ min}} \\ &= \frac{2000}{\frac{167}{15}} \frac{\text{m}}{\text{min}} \\ &\approx 179{,}6407 \text{ m/min en tronquant} \end{aligned}$$

$v_5 \approx 180$ m/min.

Partie 2.

Dans cette partie, des élèves de CE1 font l'épreuve de biathlon dans sa totalité :

> Les 4 grands tours + les 3 épreuves de lancers de 3 balles + les éventuels tours de pénalité.

On rappelle que pour un élève de CE1, la longueur du grand tour est de 250 m.

1. La longueur du tour de pénalité est de 20 m.

   (a) Sachant que le tour de pénalité forme un cercle, déterminer son rayon. Arrondir au centimètre.

   Déterminons le rayon r_p du cercle de pénalité.

   On a donc en exprimant toutes les données en mètre : $2\pi r_p = 20$. Cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \frac{1\pi r_p}{2\pi} &= \frac{20}{2\pi} \\ r_p &= \frac{10}{\pi} \end{aligned}$$

   Donc en tronquant :

$$r_p \approx 3{,}183$$

$r_p \approx 3{,}18$ m.

(b) Un élève de CE1, qui court à la vitesse moyenne de 150 m/min, prend le départ de l'épreuve. On suppose que pour effectuer 3 lancers, il passe, à chaque fois, 30 secondes sur le pas de tir.

Quelle sera la durée totale que met cet élève pour réaliser le parcours complet, s'il ne rate aucune cible au premier tour et qu'il rate une cible au 2ᵉ tour puis deux cibles au 3ᵉ tour ? Donner la réponse en minutes et secondes.

* Le temps mis pour faire un grand tour est

$$\begin{aligned} t_g &= \frac{250 \text{ m}}{150 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{250}{150} \frac{\text{m}}{\text{m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{5}{3} \text{ min} \end{aligned}$$

* Donc pour faire les quatre grands tours il lui faudra $t_{4g} = 4 \times \frac{5}{3}$ min $= \frac{20}{3}$ min.
* Les trois séries de trois lancers lui prendrons un temps de $t_{3l} = 3 \times 30$ s $= 90$ s $= 90 \times \frac{1}{60}$ min $= 1{,}5$ min.
* Le temps mis pour faire un tour de pénalité est :

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{20 \text{ m}}{150 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{2}{15} \text{ min} \end{aligned}$$

* Le temps mis pour faire tous les tours de pénalité est :

$$\begin{aligned} t_{3p} &= (1 + 2) \times t_p \\ &= 3 \times \frac{2}{15} \text{ min} \\ &= 0{,}4 \text{ min} \end{aligned}$$

Le temps de parcours total est donc de

$$
\begin{aligned}
t_{total} &= t_{4g} + t_{3l} + t_{3p} \\
&= \frac{20}{3} \text{ min} + 1{,}5 \text{ min} + 0{,}4 \text{ min} \\
&= \frac{257}{30} \text{ min} \\
&= \frac{514}{60} \text{ min}
\end{aligned}
$$

Or $514 = 8 \times 60 + 34$ donc :

$$t_{total} = 8 \text{ min} + 34 \text{ s}$$

Le parcours est réalisé en 8 min et 34 s.

2. Le professeur des écoles souhaite aider ses élèves à développer une stratégie pour améliorer leurs résultats. Il relève les performances d'un même élève de CE1 qui fait 3 fois l'épreuve de biathlon dans sa totalité en modifiant certains paramètres à chaque essai.
Dans le tableau ci-dessous, V_{moy} est la vitesse moyenne de cet élève sur les périodes de course (4 grands tours + éventuels tours de pénalités).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	élève	tirs n°1		tirs n°2		tirs n°3		distance totale parcourue	temps de course (s)	V moy (m/min)	durée totale (min)
2		durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées				
3	essai 1	30	0	30	1	30	2		418		
4	essai 2	30	0	32	0	35	0		300		
5	essai 3	19	3	21	3	21	3		341		

(a) La formule saisie en `H3` puis recopiée vers le bas est

$$= 1000 + (\texttt{C3} + \texttt{E3} + \texttt{G3}) * 20.$$

Expliquer le terme $(\texttt{C3} + \texttt{E3} + \texttt{G3}) * 20$ dans le contexte de l'exercice.

$\texttt{C3} + \texttt{E3} + \texttt{G3}$ est le nombre de tours de pénalités donc

$(\texttt{C3} + \texttt{E3} + \texttt{G3}) * 20$ est la distance supplémentaire courue du fait des pénalités.

(b) Donner une formule qui pourra être introduite dans la cellule J3, de telle sorte qu'elle puisse être recopiée vers le bas pour effectuer le calcul pour les autres essais.

Il s'agit de calculer la vitesse moyenne sans tenir compte des temps de tirs donc, le résultat étant attendu en m/min :

= H3/(I3/60)

(c) Donner une formule qui pourra être introduite dans la case « durée totale » K3, de telle sorte qu'elle puisse être recopiée vers le bas pour effectuer le calcul pour les autres essais.

Nous avons déjà remarqué qu'il faut 90 s pour lancer les neufs balles.
La durée totale en minutes est donc donnée par :

= (I3 + B3 + D3 + F3)/60.

Après calculs, on obtient le tableau complet ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	élève	tirs n°1		tirs n°2		tirs n°3		distance totale parcourue	temps de course (s)	V moy (m/min)	durée totale (min)
2		durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées				
3	essai 1	30	0	30	1	30	2	1060	482	132	9,53
4	essai 2	30	0	32	0	35	0	1000	469	128	9,43
5	essai 3	19	3	21	3	21	3	1180	566	125	10,45

(d) Interpréter le tableau pour déterminer ce que l'élève a modifié entre l'essai 2 et l'essai 3.

Entre les essais 2 et 3 l'élève a augmenté sa vitesse de lancer des balles.

(e) Si on analyse les performances de l'élève aux essais 2 et 3, quelle hypothèse ce tableau permet-il de faire du point de vue des stratégies à adopter ?

La durée totale a augmentée entre les essais 2 et 3.

Pour effectuer un parcours plus rapidement il vaut mieux prendre le temps de bien viser les cibles et d'éviter les tours de pénalité.

Exercice 2.

On dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces opposées sont identiques : deux faces numérotées 0, deux faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

1. On effectue deux lancers et on lit, à chaque lancer, le chiffre inscrit sur la face supérieure. Les deux lancers permettent d'obtenir un nombre décimal : le résultat du premier lancer donne le chiffre des unités et celui du second lancer le chiffre des dixièmes.

   (a) Donner la liste de tous les nombres que l'on peut obtenir.

   Représentons l'ensemble des issues de cette expérience par un tableau (puisqu'il y a deux épreuves).

0,1 \ 1	0	1	2
0	0,0	1,0	2,0
1	0,1	1,1	2,1
2	0,2	1,2	2,2

   L'ensemble des nombres possibles est $\{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 2;\ 2{,}1;\ 2{,}2\}$.

   (b) Justifier que la probabilité d'obtenir 1,2 est égale à 1/9.

   L'univers est l'ensemble Ω des nombres possibles précédemment indiqué. Il est raisonnable d'après les indications de l'énoncé (dé non truqué) de modéliser cette situation par une équiprobabilité.

   Par conséquent toutes les issues, y compris 1,2 , ont la même probabilité d'être obtenues.

   D'après la question précédente l'univers comporte 9 issues donc

   $$\mathbb{P}(1{,}2) = \frac{1}{9}.$$

   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ?

   Notons C « obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ».

   Calculons $\mathbb{P}(C)$.

   $C = \{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2\}$.

Il y a équiprobabilité, C est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 9 donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \tfrac{1}{3}.}$$

(d) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entier ?

Notons D « obtenir un nombre entier ».

Calculons $\mathbb{P}(D)$.

$D = \{0;\ 1;\ 2\}$.
Il y a équiprobabilité, D est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 9 donc

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = \tfrac{1}{3}.}$$

(e) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal ?

Notons E « obtenir un nombre décimal ».

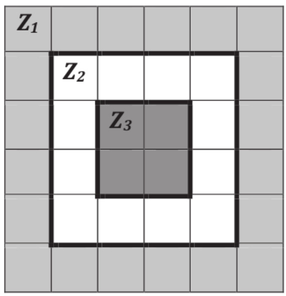
Calculons $\mathbb{P}(E)$.

Tous les nombres obtenus sont décimaux donc E est l'événement certain :

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = 1.}$$

2.

Le tapis représenté ci-contre est constitué de 36 carrés de côté 10 cm. Ces carrés définissent trois zones Z_1, Z_2 et Z_3 repérées par des couleurs différentes.
Avec le même dé que précédemment, on effectue un lancer sur ce tapis et on regarde la face supérieure. Si le dé tombe à cheval sur deux zones, on le relance. On admet que la probabilité que le dé tombe dans une zone est proportionnelle à l'aire de la zone.



(a) Quelle est la probabilité que le dé tombe dans la zone Z_2 ?

Puisque $\mathbb{P}(Z_2)$ est proportionnelle à l'aire de Z_2 qui est constituée de 12 carrés sur un total de 36 :

$$\mathbb{P}(Z_2) = \frac{12}{36}$$

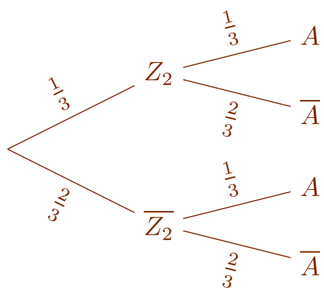
$$\boxed{\mathbb{P}(Z_2) = \frac{1}{3}.}$$

(b) Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 et donne le nombre 1 ?

Notons A : « obtenir le nombre 1 ».
Il y a équiprobabilité entre les faces du dé, 2 d'ente elles réalisent A et il y a 6 faces au total donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Calculons $\mathbb{P}(A \cap Z_2)$.

Nous pouvons nous représenter les choses sous forme d'un arbre :



Le principe multiplicatif permet alors de conclure : $\mathbb{P}(A \cap Z_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Plus formellement : il est raisonnable dans ce contexte de considérer que le nombre affiché et la zone du tapis obtenue sont des événements indépendants.
Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap Z_2) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(Z_2)\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A \cap Z_2) = \frac{1}{9}.$$

(c) Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 et donne un nombre pair ?

Notons B : « obtenir un nombre pair ».
Il y a équiprobabilité entre les faces du dé, 4 d'ente elles réalisent B et il y a 6 faces au total donc : $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Calculons $\mathbb{P}(B \cap Z_2)$.

B et Z_2 sont indépendants donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cap Z_2) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(Z_2)\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(B \cap Z_2) = \frac{2}{9}.$$

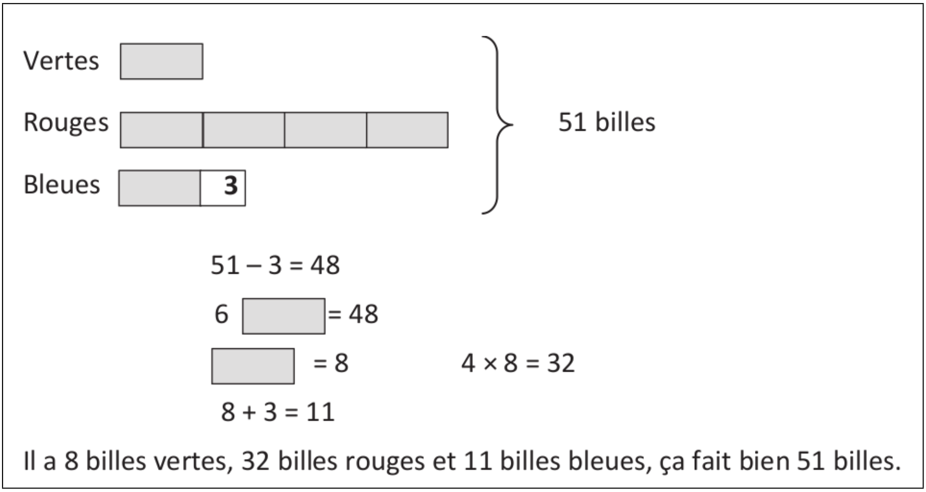
Exercice 3.

Un enseignant d'une classe de CM2 a proposé ce problème à ses élèves.

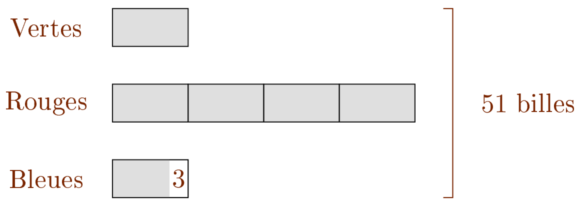
> Dans un bocal, un enfant a des billes vertes, des billes rouges et des billes bleues. Il a 4 fois plus de billes rouges que de billes vertes et il a 3 billes vertes de plus que de billes bleues.
> En tout il a 51 billes.
> Combien a-t-il de billes de chaque couleur ?

D'après un problème du Guide pour enseigner la résolution de problèmes au cours moyen, Ministère de l'éducation nationale, 2021.

1. Voici la réponse proposée par Samira, une élève de la classe de CM2 :



Proposer une version corrigée du schéma utilisé par Samira pour résoudre le problème.



2. (a) En notant v le nombre de billes vertes, déterminer, en fonction de v, le nombre de billes rouges et le nombre de billes bleues.

Si r est le nombre de billes rouges alors :

$$r = 4v.$$

Si b est le nombre de billes bleues alors

$$b = v - 3.$$

(b) Mettre le problème en équation et la résoudre pour répondre algébriquement à la question posée dans l'énoncé.

On doit avoir

$$v + b + r = 51.$$

Ce qui revient, d'après la question précédente, à

$$v + v - 3 + 4v = 51.$$

Cette dernière équation du premier degré équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 6v - 3 &= 51 \\ 6v - 3 + 3 &= 51 + 3 \\ 6v &= 54 \\ \frac{6v}{6} &= \frac{54}{6} \\ v &= 9 \end{aligned}$$

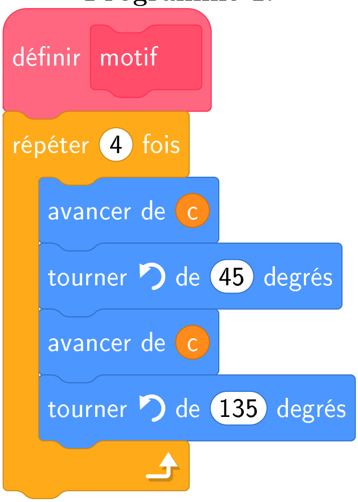
Donc : $r = 4 \times 9 = 36$,
et : $b = 9 - 3 = 6$.

Il y a 9 billes vertes, 36 rouges et 6 bleues.

Exercice 4.

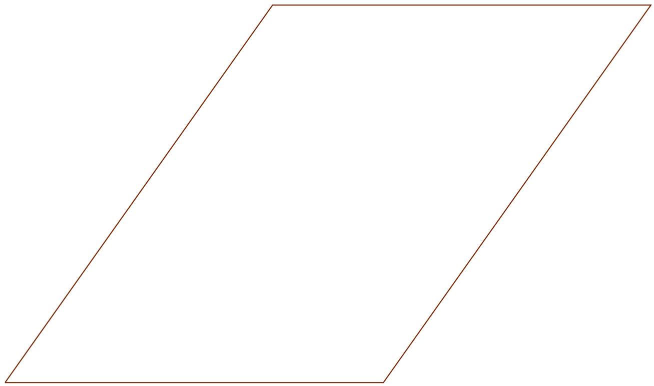
Le programme ci-dessous (programme 1) a été écrit avec le logiciel Scratch.

Programme 1.



Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

1. En prenant C = 50 et 1 cm pour 10 pixels, tracer la figure construite en utilisant le Programme 1.



2. Quelle est la nature de la figure tracée ? Justifier la réponse.

Il s'agit de tracer continûment quatre segments : le tracé est une ligne polygonale formée de quatre segments de même longueur.

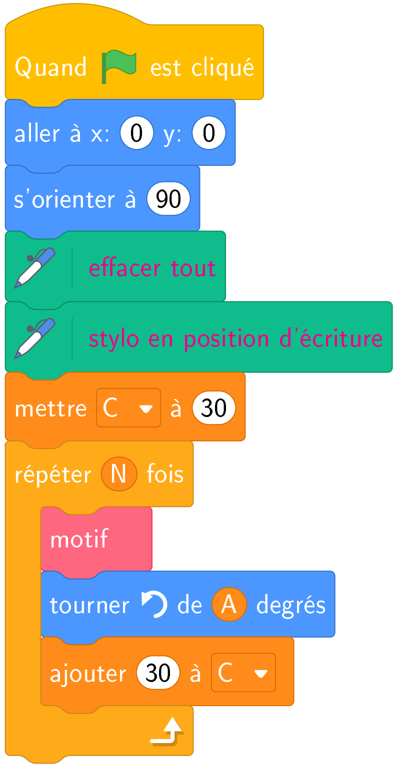
La somme des angles des segments les uns par rapport aux autres étant de $45° + 135° + 45° + 135° = 360°$ la ligne polygonale qu'ils forment est fermée.

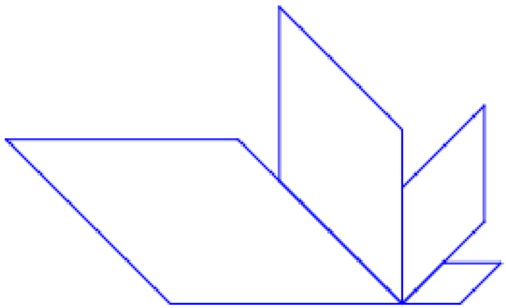
Ainsi la figure est un quadrilatère, non croisé (du fait des angles), dont les côtés ont tous la même longueur. Autrement dit :

$\boxed{\text{la figure tracée est un losange.}}$

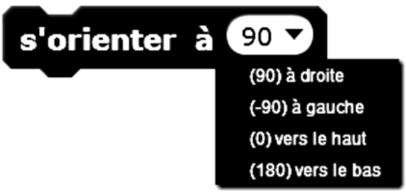
3. On écrit le programme 2 en utilisant le bloc précédent, afin d'obtenir la figure représentée ci-après.

Programme 2.





Rappel :



(a) Quelles valeurs attribuer aux lettres A et N dans le programme 2 pour obtenir la figure correspondante ?

La figure est formée de 4 losanges donc

$$N = 4.$$

Les 4 losanges, en plus de l'agrandissement (avec C qui augment de 30), se déduisent les uns des autres par une rotation de 45°.

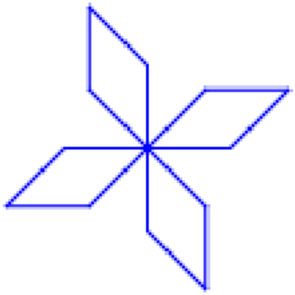
$$A = 45.$$

(b) Quelle est la valeur de la variable C une fois le programme exécuté ?

Dans la boucle qui est répétée $n+4$ fois du programme 2 C est augmenté de 30. Donc à la fin du programme : $C = 30 + 4 \times 30$.

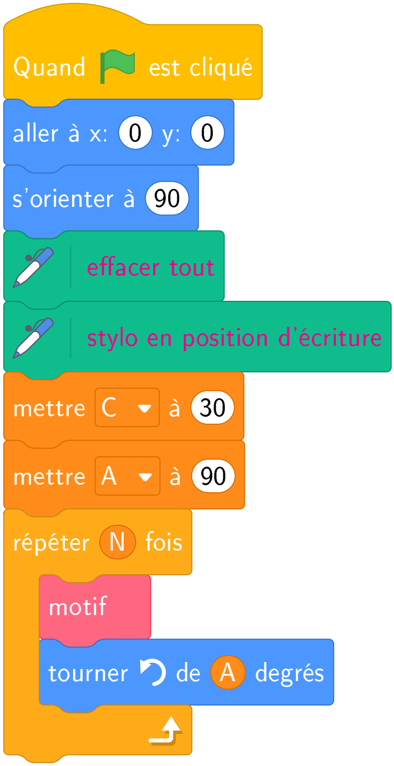
En fin de programme $C = 150$.

4. Comment peut-on modifier le programme 2 pour obtenir la figure ci-dessous pour laquelle chaque segment mesure 30 pixels ?



Voici une modification du programme 2 : lien pour télécharger.

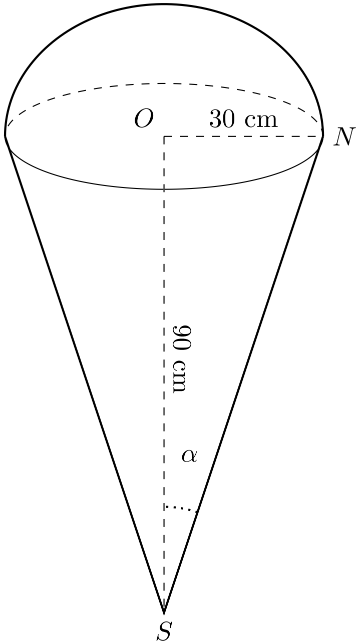
Il faut choisir $A = 90$ car les losanges se déduisent par des rotations successives d'angle 90°.
De plus il faut retirer la ligne de code qui agrandi la longueur C du côté du losange.



Exercice 5.

Un ballon-sonde est un ballon à gaz utilisé pour faire des mesures locales dans l'atmosphère.

Dans le cadre du projet scientifique qu'elle anime pour sa classe de CM2, une professeure des écoles a reçu un petit ballon-sonde, représenté ci-dessous.

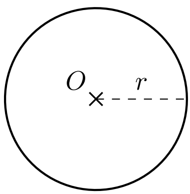


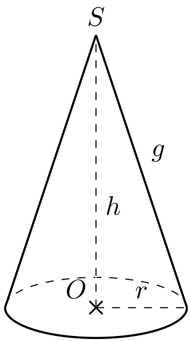
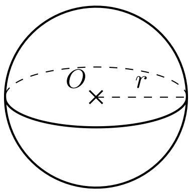
Son enveloppe, composée de matières plastiques et de latex, a la forme, une fois gonflée, d'un cône de révolution surmonté d'une demi-sphère.

Les dimensions données sur la figure ci-dessus sont celles du ballon-sonde au sol, sur le lieu du lâcher situé au niveau de la mer.

La pression atmosphérique diminuant avec l'altitude, le ballon se dilate en prenant de la hauteur et ses dimensions augmentent jusqu'à l'éclatement après une ascension de plus de vingt kilomètres.

On pourra, si nécessaire, utiliser le formulaire ci-dessous.

	Périmètre du disque $2\pi r$	Aire du disque πr^2.

 g est la longueur d'une génératrice du cône.	Volume du cône de révolution $\frac{1}{3}\pi r^2 h.$	Aire de la surface latérale $\pi r g.$
	Volume de la boule $\frac{4}{3}\pi r^3.$	Aire de la sphère $4\pi r^2.$

1. (a) Montrer, en indiquant les étapes du calcul, que le volume exact du ballon-sonde au niveau de la mer, est égal à $45\,000\pi$ cm^3.

Calculons le volume $\mathscr{V}_b$ du ballon.

* Le haut du ballon est formé d'une demi-boule dont le volume est

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_1 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi\,(30 \text{ cm})^3 \\
&= \frac{2}{3}\pi \times 30^3 \text{ cm}^3 \\
&= 18\,000\pi \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

* Le bas du ballon est formé d'un cône de révolution dont le volume est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_2 &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\
&= \frac{1}{3}\pi\,(30\text{ cm})^2 \times (90\text{ cm}) \\
&= \frac{1}{3}\pi 30^2 \times 90\text{ cm}^2 \cdot \text{cm} \\
&= 27\,000\pi\text{ cm}^3
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_b &= \mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2 \\
&= 18\,000\pi\text{ cm}^3 + 27\,000\pi\text{ cm}^3 \\
&= (18\,000 + 27\,000)\pi\text{ cm}^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_b = 45\,000\pi\text{ cm}^3.}$$

(b) Donner le volume du ballon sonde en litre, arrondi à l'entier.

Exprimons $\mathscr{V}_b$ en litre.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_b &= 45\,000\pi\text{ cm}^3 \\
&= 45\,000\pi \times \frac{1}{1000}\text{ L} \\
&= 45\pi\text{ L}
\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\approx 141{,}371\text{ L}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_b \approx 141\text{ L.}}$$

2. Montrer qu'une génératrice du cône mesure $\sqrt{9\,000}$ cm.

Calculons la longueur SN d'une génératrice du cône.

Le cône étant de révolution hauteur, rayon, et génératrice dessinent un triangle SNO rectangle en O, donc, d'après le théorème de Pythagore (toutes les longueurs étant exprimées en centimètre) :

$$SN^2 = ON^2 + OS^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} SN^2 &= 30^2 + 90^2 \\ &= 9\,000 \end{aligned}$$

Puisque SN une longueur donc positive :

$$SN = \sqrt{9\,000}$$

Nous avons bien $SN = \sqrt{9\,000}$ cm^3.

3. En déduire que l'enveloppe totale du ballon-sonde, au niveau de la mer, a une aire d'environ 1,5 m^2 au dixième près.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_b$ de l'enveloppe du ballon.

* L'aire de la partie demi-sphérique est

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4\pi(30 \text{ cm})^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 30^2 \text{ cm}^2 \\ &= 1\,800\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

* L'aire latérale de la partie conique est

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_2 &= \pi r g \\ &= \pi(30 \text{ cm}) \times (\sqrt{9\,000} \text{ cm}) \\ &= \pi \times 30 \times \sqrt{9\,000} \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 900\sqrt{10}\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_b &= {}_1 + \mathscr{A}_2\\ &= 1\,800\pi \text{ cm}^2 + 900\sqrt{10}\pi \text{ cm}^2\\ &= (1\,800 + 900\sqrt{10})\pi \text{ cm}^2\\ &= 900(2+\sqrt{10})\pi \times \frac{1}{10000}\text{m}^2\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{A}_b \approx 1{,}459 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}_b \approx 1{,}5 \text{ m}^2.}$$

4. Entre 0 mètre d'altitude et 4 500 mètres d'altitude, les longueurs du ballon-sonde augmentent de 25 %.

   (a) Par quel nombre les longueurs initiales sont-elles multipliées ?

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 25 % est

$$\begin{aligned}CM &= 1 + \frac{t}{100}\\ &= 1 + \frac{25}{100}\\ &= 1{,}25\end{aligned}$$

   Les longueurs sont multipliées par 1,25.

   (b) Montrer que, à 4 500 mètres d'altitude, l'enveloppe totale du ballon-sonde a une aire d'environ 2,3 m^2 arrondie au dixième près.

   Si les longueurs sont multipliées par 1,25 alors les aires sont multipliées par 1,25^2. la nouvelle aire de l'enveloppe du ballon est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_B &= 1{,}25^2 \times \mathscr{A}_b\\ &= 1{,}25^2 \times 0{,}09(2+\sqrt{10})\pi\text{m}^2\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{A}_B \approx 2{,}280 \text{ m}^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}_B \approx 2{,}3 \text{ m}^2.}$$

(c) Donner un arrondi, au litre près, du volume du ballon-sonde à 4 500 mètres d'altitude.

Si les longueurs sont multipliées par 1,25 alors les volumes sont multipliés par $1{,}25^3$. le volume du ballon est :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_B &= 1{,}25^3 \times \mathscr{V}_b \\ &= 1{,}25^3 \times 45\pi\text{L} \end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{V}_B \approx 276{,}11 \text{ L}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_B \approx 276 \text{ L}.}$$

5. On lâche le ballon à 0 mètre d'altitude. On relève alors une température de 15°C. À 4 500 mètres d'altitude, la température transmise est de $-12°C$. Entre 0 et 12 000 m d'altitude, la température, en degré Celsius, en fonction de l'altitude x, en mètre, peut être modélisée par une fonction affine notée t. Montrer que pour tout x entre 0 et 12 000, on a $t(x) = -0{,}006x + 15$.

Puisque la température est une fonction affine de l'altitude x, c'est qu'il existe des nombres a et b tels que : $t(x) = ax + b$.

* Puisque $t(0) = 15$:

$$\begin{aligned} a \times 0 + b &= 15 \\ b &= 15 \end{aligned}$$

* Puisque $t(4500) = -12$:

$$\begin{aligned} a \times 4500 + 15 &= -12 \\ 4500a + 15 - 15 &= -12 - 15 \\ 4500a &= -27 \\ \frac{4500a}{4500} &= \frac{-27}{4500} \\ a &= -0{,}006 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{t : x \mapsto -0{,}006x + 15.}$$

6. À partir de quelle altitude la température devient-elle négative ? Justifier le résultat en résolvant une inéquation.

   Nous cherchons pour quelles valeurs de x :

   $$t(x) \leqslant 0.$$

   Cette inéquation équivaut successivement à

   $$\begin{aligned} -0{,}006x + 15 &\leqslant 0 \\ -0{,}006x + 15 - 15 &\leqslant 0 - 15 \\ -0{,}006x &\leqslant -15 \\ \frac{-0{,}006x}{-0{,}006} &\geqslant \frac{-15}{-0{,}006} \quad \text{car } -0{,}006 < 0 \\ x &\geqslant 2500 \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{La température devient négative à partir de } 2\,500 \text{ m.}}$$

7. La professeure des écoles a réalisé, à l'aide d'un tableur, le calcul des températures en fonction de l'altitude du ballon-sonde.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	
1	altitude en mètre	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500	11000	11500	1
2	température en degrés	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	-18	-21	-24	-27	-30	-33	-36	-39	-42	-45	-48	-51	-54	

En observant les données du tableau, sachant que le ballon part de 0 mètre d'altitude, à quelle altitude se trouve-t-il lorsque la température a baissé de $30°C$?

Lorsque la température baisse de 30° elle est de $15° - 30° = -15°$.
D'après le tableur

la température aura baissé de 30° à 5 000 m.