Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 0.

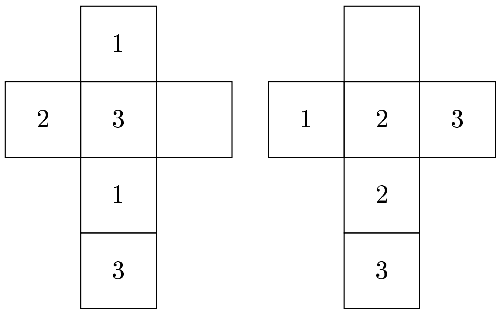
Lien vers le corrigé seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de six exercices indépendants.

Exercice 1.

Un enseignant de moyenne section de maternelle souhaite créer un jeu sur le modèle du jeu de l'oie pour travailler avec ses élèves la construction du nombre et en particulier des décompositions et recompositions de nombres de 1 à 6.

Il fabrique deux dés équilibrés selon les patrons suivants :

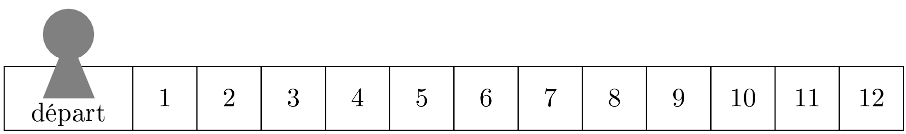


Il crée un parcours sur lequel les élèves déplacent un pion selon le protocole suivant :

— l'élève lance les deux dés ;

— il avance son pion d'autant de cases que la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés ; s'il n'obtient aucun nombre sur les deux dés (deux faces vierges), il passe son tour.

Le plateau de jeu est matérialisé par une bande numérique comme ci-dessous.



1. On lance le dé vert seul. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 ?

Dans la suite de l'exercice, afin de simplifier les réponses, on pourra considérer que les faces vierges correspondent au nombre 0.

2. Un élève lance les deux dés, il calcule la somme des nombres obtenus.
   (a) Quelles sommes peuvent être obtenues ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il doive passer son tour ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il doive avancer de 3 cases ?
   (d) Déterminer la probabilité de chacun des résultats possibles.
   (e) Quelle est la probabilité que le résultat du dé vert soit strictement supérieur à celui du dé bleu ?
3. Après deux tours de jeu, un élève est arrivé sur la case 10. Quelle est la probabilité qu'il se soit arrêté sur la case 4 au premier tour ?

Exercice 2.

Un nombre décimal est souvent défini de la façon suivante : « Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $dfraca10^n$ où a est un nombre entier et n est un nombre entier positif. ».

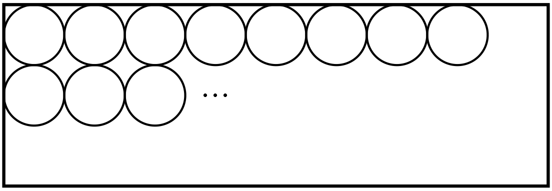
1. On s'appuiera sur la définition précédente pour répondre aux deux questions suivantes.
   (a) Montrer que 0,127 est un nombre décimal.
   (b) Montrer que $\frac{1}{4}$ est un nombre décimal.
2. Dans une classe de CM2 un enseignant demande aux élèves de dire ce qu'est un nombre décimal, voici trois réponses proposées par des élèves :
   — Élève A : « *Un nombre décimal est un nombre avec une virgule.* »
   — Élève B : « *Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une fraction qui a* 10 *ou* 100 *au dénominateur.* »
   — Élève C : « *Un nombre décimal est un nombre qui n'est pas entier.* »
   Expliquer pourquoi chacune des définitions proposées ne convient pas d'un point de vue mathématique. On pourra notamment s'appuyer sur des contre-exemples.
3. Parmi les nombres suivants dire, en justifiant, lesquels sont décimaux et lesquels ne le sont pas : 2,48 ; $\frac{7}{25}$; 12 ; $\frac{7}{9}$; $\frac{49}{14}$.
4. Le produit de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.
5. Le quotient de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

Exercice 3.

Partie A.

Alice veut réaliser une activité avec ses élèves de petite section de maternelle. Elle a besoin de découper 30 disques de 14 cm de rayon dans des feuilles de dimensions 120 cm × 80 cm, c'est-à-dire de 120 cm de longueur sur 80 cm de largeur.

Elle aimerait les dessiner en occupant l'espace de chaque feuille en commençant en haut à gauche puis en continuant comme dans la figure ci-dessous.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

1. Calculer l'aire de la feuille, en cm^2.
2. (a) Expliquer pourquoi Alice peut tracer au maximum 4 disques dans la longueur de la feuille.

   (b) En déduire le nombre maximum de disques qu'elle pourra tracer dans cette feuille.

   (c) Combien faut-il au minimum de feuilles pour dessiner les 30 disques ?
3. Représenter à l'échelle 1/8 une feuille de dimensions 120 cm × 80 cm avec les disques qu'elle peut contenir.
4. Calculer l'aire exacte d'un disque puis donner la valeur arrondie au centimètre carré près.

Dans la suite du problème, on considérera que l'aire d'un disque est de 616 cm^2.

5. (a) Quelle est l'aire de papier non utilisé si Alice découpe 8 disques dans une feuille ?

   Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale de la feuille cela représente-t-il ?

   (b) Quelle est l'aire de papier non utilisé après avoir découpé 30 disques ?

   Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale des feuilles utilisées cela représente-t-il ?

6. Pour limiter le gaspillage de papier, Alice veut choisir le format qui permettra d'obtenir le moins de chutes (en cm^2) tout en gardant la même disposition que précédemment. Elle a le choix entre plusieurs formats proposés par un fournisseur :

Nom	**Dimensions**
Raisin	65 cm × 50 cm
Jésus	75 cm × 56 cm
Impérial	80 cm × 60 cm
Grand Aigle	105 cm × 75 cm
Grand Monde	120 cm × 80 cm

Pour obtenir les 30 disques, le format Grand Aigle permet-il d'obtenir moins de chutes (en cm^2) que le format Grand Monde ? Justifier la réponse.

Partie B.

D'autres classes veulent réaliser la même activité. La directrice se demande quel format permettra d'obtenir moins de chutes en fonction du nombre de disques à découper.

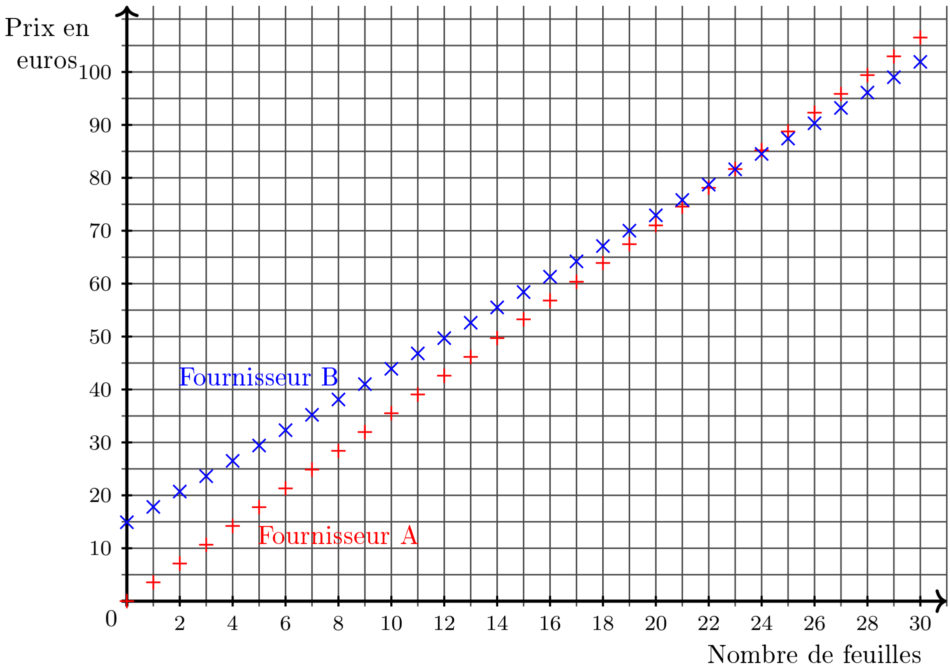
Pour cela, elle utilise un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre de disques	Surface des disques (en cm²)	Raisin : surface des chutes (en cm²)	Jésus : surface des chutes (en cm²)	Impérial : surface des chutes (en cm²)	Grand aigle : surface des chutes (en cm²)	Grand monde : surface des chutes (en cm²)
2	1	616	2634	3584	4184	7259	8984
3	2	1232	2018	2968	3568	6643	8368
4	3	1848	4652	2352	2952	6027	7752
5	4	2464	4036	1736	2336	5411	7136
6	5	3080	6670	5320	6520	4795	6520
7	...	...	...	...	...	...	...
8	26	16016	26234	13384	17584	23359	22384
9	27	16632	28868	12768	16968	22743	21768
10	28	17248	28252	12152	16352	22127	21152
11	29	17864	30886	15736	20536	21511	20536
12	30	18480	30270	15120	19920	20895	19920
13	...	...	...	...	...	...	...
14	320	197120	322880	138880	186880	228130	186880
15	321	197736	325514	142464	191064	227514	195864
16	322	198352	324898	141848	190448	226898	195248
17	323	198968	327532	141232	189832	226282	194632
18	324	199584	326916	140616	189216	225666	194016
19	325	200200	329550	144200	193400	232925	193400

1. Sans justifier, donner la formule qui a été saisie dans la cellule `B2` et étirée vers le bas.

2. Sans justifier, donner le format permettant d'éviter au mieux le gaspillage de papier si l'on veut réaliser 325 disques.

3. Les deux seuls fournisseurs disponibles ne disposent plus que de feuilles au format « Grand Monde ». La directrice veut choisir le fournisseur qui propose le tarif le plus avantageux pour acheter les feuilles nécessaires à la réalisation des disques. On a représenté graphiquement ci-dessous le prix en fonction du nombre de feuilles commandées chez chaque fournisseur :



(a) Chez un des deux fournisseurs le coût des feuilles est proportionnel au nombre de feuilles achetées. Lequel ? On justifiera la réponse.

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique, sans justifier.

(b) Quel est le prix que va coûter l'achat de 15 feuilles chez chaque fournisseur ?

(c) Déterminer le nombre maximal de feuilles que l'on peut acheter chez chaque fournisseur si l'on dispose d'un budget de 45 €.

(d) À partir de combien de feuilles est-il plus avantageux de commander chez le fournisseur B ?

4. On a maintenant représenté sous forme de tableau les tarifs proposés par chaque fournisseur :

	Coût d'une feuille (en €)	Frais de port (en €)
Fournisseur A	3,55	Gratuit
Fournisseur B	2,90	14,90

   (a) Quel est le prix que va coûter l'achat de 15 feuilles chez chaque fournisseur ?

   (b) Déterminer le nombre de feuilles que l'on peut acheter chez chaque fournisseur si l'on dispose d'un budget de 312 €.

   (c) À partir de combien de feuilles est-il plus avantageux de commander chez le fournisseur B ? Justifier la réponse.

   (d) Sachant qu'il y a 325 disques à dessiner et que l'on peut en mettre 8 par feuille, quelle entreprise la directrice va-t-elle choisir ? Quel sera le prix de cette commande ?

Partie C.

1. Après avoir découpé les 30 disques, Alice veut les border d'un fil de laine. Quelle longueur de laine devra-t-elle utiliser pour border tous les disques ? On donnera le résultat en mètre, arrondi au décimètre.

2. Alice met 48 minutes à dessiner et découper les 30 disques alors que son collègue Bertrand met 1 heure et 12 minutes à effectuer cette tâche.

   (a) Donner le temps moyen que met Alice pour découper un disque (en minutes et secondes).

   (b) Combien de temps mettront-ils pour découper les 30 disques ensemble ? Donner le résultat en minute et seconde.

Exercice 4.

Soit M un nombre entier naturel inférieur à 100. On note u le chiffre des unités du nombre M et d son chiffre des dizaines.

Soit N un nombre entier naturel inférieur à 100, ayant le même chiffre d des dizaines que M et tel que son chiffre v des unités vérifie $u + v = 10$.

Par exemple, pour $M = 34$, alors $N = 36$ vérifie ces conditions.

Pour M et N vérifiant les conditions ci-dessus, on propose d'utiliser l'algorithme ci-dessous pour calculer le produit $M \times N$.

Algorithme de calcul.

— On calcule le produit de d et de l'entier suivant $d+1$.
— On calcule le produit de u et de v.
— On ajoute au produit de u et de v, 100 fois le produit de d et de l'entier suivant $d+1$.
— La somme obtenue est le produit $M \times N$.

1. Vérifier en détaillant les calculs que cet algorithme fonctionne pour 34×36.

2. Démontrer que cet algorithme de calcul donne effectivement le résultat escompté pour tous les couples de nombres M et N vérifiant les conditions mentionnées en début d'exercice. On pourra utiliser les égalités $M = 10d + u$ et $N = 10d + v$.

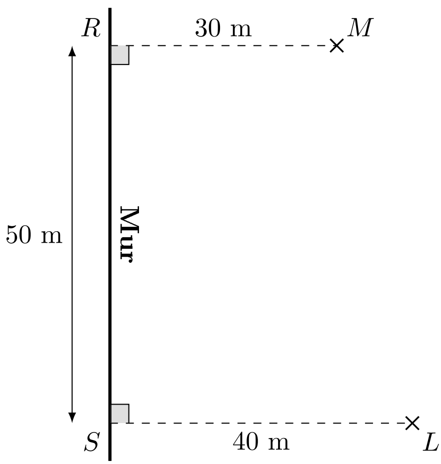
3. Montrer comment on peut utiliser cet algorithme de calcul, en détaillant les calculs, pour calculer mentalement $4{,}2 \times 4{,}8$.

Exercice 5.

On propose un jeu dans une cour de récréation.

Pour cela on s'appuie sur des croix peintes au sol comme indiquée sur le schéma ci-dessous :

— la croix M est située à 30 m du mur d'enceinte de l'école ($MR = 30$ m) ;
— la croix L est située à 40 m du mur d'enceinte de l'école ($LS = 40$ m) ;
— les points R et S sont distants de 50 m ($RS = 50$ m).



Mila, une élève, se trouve sur la croix M et Lucien, un autre élève, se trouve sur la croix L. L'enseignante souhaite que Mila et Lucien courent tous les deux vers un même point de contact au mur ; le gagnant sera le premier à toucher ce point sur le mur. Pour que l'épreuve soit équitable, l'enseignante souhaite que le point de contact soit à égale distance des positions initiales des deux élèves, c'est-à-dire des croix L et M.

1. Construire à l'échelle le plan de la cour avec les points M, L, R et S en choisissant comme échelle 1 cm pour 5 m.

2. (a) Sur la figure, construire le point T, milieu du segment $[ML]$. Tracer la droite perpendiculaire à (ML) et passant par T. On note C le point d'intersection de cette droite avec le mur.

   (b) Justifier que le point C est le point de contact cherché.

   (c) Mesurer la longueur RC sur le plan et en déduire une estimation de la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.

3. On note x la distance, exprimée en mètre, entre les points R et C dans la cour de récréation.

   (a) Déterminer les longueurs MC et CL en fonction de x.

   (b) En déduire la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.