

Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 0.

Lien vers le sujet seul : [pdf](#).

Il est donc supposé y avoir six exercices mais le sujet n'en comportait que cinq.

Exercice 1.

1. Modélisation : notons Ω_1 l'ensemble des 6 faces du dé (en les distinguant toutes). L'univers est muni de la loi d'équiprobabilité, \mathbb{P}_1 , puisque les dés sont équilibrés.

Notons E l'événement « obtenir un 3 ».

Calculons $\mathbb{P}_1(E)$.

Ω_1 est muni de l'équiprobabilité, E est réalisé par 2 issues et Ω_1 contient 6 issues donc :

$$\mathbb{P}_1(E) = \frac{2}{6}$$

$$\mathbb{P}_1(E) = \frac{1}{3}.$$

2. (a) Afin de nous ramener à l'équiprobabilité, et donc à un travail de dénombrement, nous allons modéliser en distinguant toutes les faces des dés. Par exemple les deux faces 3 du dé vert seront distinguées.

Notons Ω_2 l'univers formé des 36 couples de faces des deux dés qu'il est possible d'obtenir et munissons-le de l'équiprobabilité \mathbb{P}_2 .

Schématisons l'expérience aléatoire par un tableau double entrée en indiquant ce qui nous intéresse à savoir les sommes en fonction des différentes faces.

dé bleu \ dé vert	dé vert					
	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Si on note X variable aléatoire qui à chaque lancer des deux dés associe la somme des nombres affichés vérifie donc : $X \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Les sommes possibles sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

- (b) Notons P l'événement « passer son tour ».

Calculons $\mathbb{P}_2(P)$.

Ω_2 est muni de l'équiprobabilité, P est réalisé par 1 issue et l'univers, Ω_2 , contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(P) = \frac{1}{36}$$

- (c) Notons F l'événement « avancer de trois cases ».

Calculons $\mathbb{P}_2(F)$.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Ω_2 est muni de l'équiprobabilité, d'après le tableau F est réalisé par 8 issues et l'univers, Ω_2 , contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{8}{36}$$

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{4}$$

- (d) En procédant comme à la question précédente nous obtenons :

Somme	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$

- (e) Notons G l'événement « le résultat du vert est strictement supérieur à celui du dé bleu ».

Calculons $\mathbb{P}_2(G)$.

Utilisons le tableau pour dénombrer les issues qui nous intéressent même si les sommes ne servent à rien.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Ω_2 est muni de l'équiprobabilité, d'après le tableau G est réalisé par 12 issues et l'univers, Ω_2 , contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{12}{36}$$

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{3}$$

3. Notons H l'événement « obtenir 4 au premier tour » et K l'événement « arriver sur la case 10 au deuxième tour ».

Calculons $\mathbb{P}_K(H)$ la probabilité que l'élève s'arrête sur la case 4 sachant qu'il est arrivé sur la case 10 au deuxième tour.

Avec les probabilités conditionnelles tout ce passe comme si l'univers était modifié.

Puisque l'élève est arrivé sur la case 10 il a forcément obtenu un nombre strictement supérieur à 3.

Donc l'univers n'est plus Ω_2 mais pas l'univers Ω_3 regroupant les issues correspondant aux cases colorées ci-dessous.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Les issues ayant toutes la même chance d'être obtenues nous munissons Ω_3 de l'équiprobabilité \mathbb{P} . Ainsi Ω_3 contient 18 issues.

De plus il y a 8 issues correspondant l'obtention d'un 4 donc

$$\mathbb{P}_K(H) = \frac{8}{18}$$

$$\mathbb{P}_K(H) = \frac{4}{9}.$$

Exercice 2.

1. (a) Montrons que 0,127 est un nombre décimal.

$$0,127 = \frac{127}{1000} = \frac{127}{10^3}.$$

Donc 0,127 peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a = 127$ qui est un entier et $n = 3$ un nombre entier positif.

0,127 est un nombre décimal.

- (b) Montrons que $\frac{1}{4}$ est décimal.

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = \frac{25}{10^2}.$$

Comme $a = 25 \in \mathbb{Z}$ et $n = 2 \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{4} \in \mathbb{D}.$$

2. * La proposition de l'élève A ne convient pas car $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ est un nombre avec une virgule mais ce n'est pas un nombre décimal.
- * La proposition de l'élève B ne convient pas car 0,127 est un nombre décimal mais il ne peut pas s'écrire comme une fraction avec 10 ou 100 au dénominateur.
- * La proposition de l'élève C ne convient pas car les nombres entiers sont des décimaux, par exemple, $3 = \frac{30}{10^1}$.

3. * $2,48 = \frac{248}{10^2}$. Donc

$$2,48 \in \mathbb{D}.$$

- * $\frac{7}{25} = \frac{28}{10^2}$. Donc

$$\frac{7}{25} \in \mathbb{D}.$$

- * $12 = \frac{12}{10^0}$. Donc

$$12 \in \mathbb{D}.$$

- * $\frac{7}{9} = 0,777\dots$. Donc

$$\frac{7}{9} \in \mathbb{D}.$$

- * $\frac{49}{14} = \frac{7}{2} = \frac{35}{10} = \frac{35}{10^1}$. Donc

$$\frac{49}{14} \in \mathbb{D}.$$

4. Soient $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} &= \frac{a \times b}{10^n \times 10^m} \\ &= \frac{a \times b}{10^{n+m}} \end{aligned}$$

Comme $a \times b \in \mathbb{Z}$ et $n + m \in \mathbb{N}$, on a $\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} \in \mathbb{D}$.

Finalement

Le produit de deux nombres décimaux est encore un nombre décimal.

5. 1 et 3 sont des nombres décimaux mais $\frac{1}{3} = 0,333 \dots \notin \mathbb{D}$.

Le quotient de deux nombres décimaux n'est pas nécessairement décimal.

Exercice 3.

Partie A.

1. Calculons l'aire \mathcal{A}_f de la feuille.

Il s'agit d'un rectangle donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_f &= 120 \text{ cm} \times 80 \text{ cm} \\ &= 120 \times 80 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_f = 9600 \text{ cm}^2.$$

2. (a) Déterminons le nombre n_L de disque qui entre dans une longueur.

Chaque disque ayant un rayon de 14 cm et la feuille ayant une longueur de 120 cm il faut que :

$$n_L \times (2 \times 14 \text{ cm}) \leq 120 \text{ cm}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}n_L \times 28 \text{ cm} &\leq 120 \text{ cm} \\ \frac{n_L \times 28 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} &\leq \frac{120 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} \quad \text{car } 28 > 0 \\ n_L &\leq \frac{30}{7}\end{aligned}$$

Or, en tronquant, $\frac{30}{7} \approx 4,28$ donc

le nombre, entier, de disques entiers qu'il est possible de tracer est au maximum de 4.

- (b) Déterminons le nombre maximum de disque qu'il est possible de placer dans une largeur.

En procédant à une division euclidienne (pour changer un peu de ce qui a été fait à la question précédente) :

$$80 = 2 \times 28 + 24$$

Il est donc loisible de placer 2 disques entiers dans le sens de la largeur.

- (c) Déterminons le nombre de feuilles nécessaires.

Une feuille contient au maximum 4 disques par lignes et 2 lignes donc $2 \times 4 = 8$ disques.

Puisqu'il faut 30 disques le nombre de feuilles nécessaire s'obtient par division euclidienne :

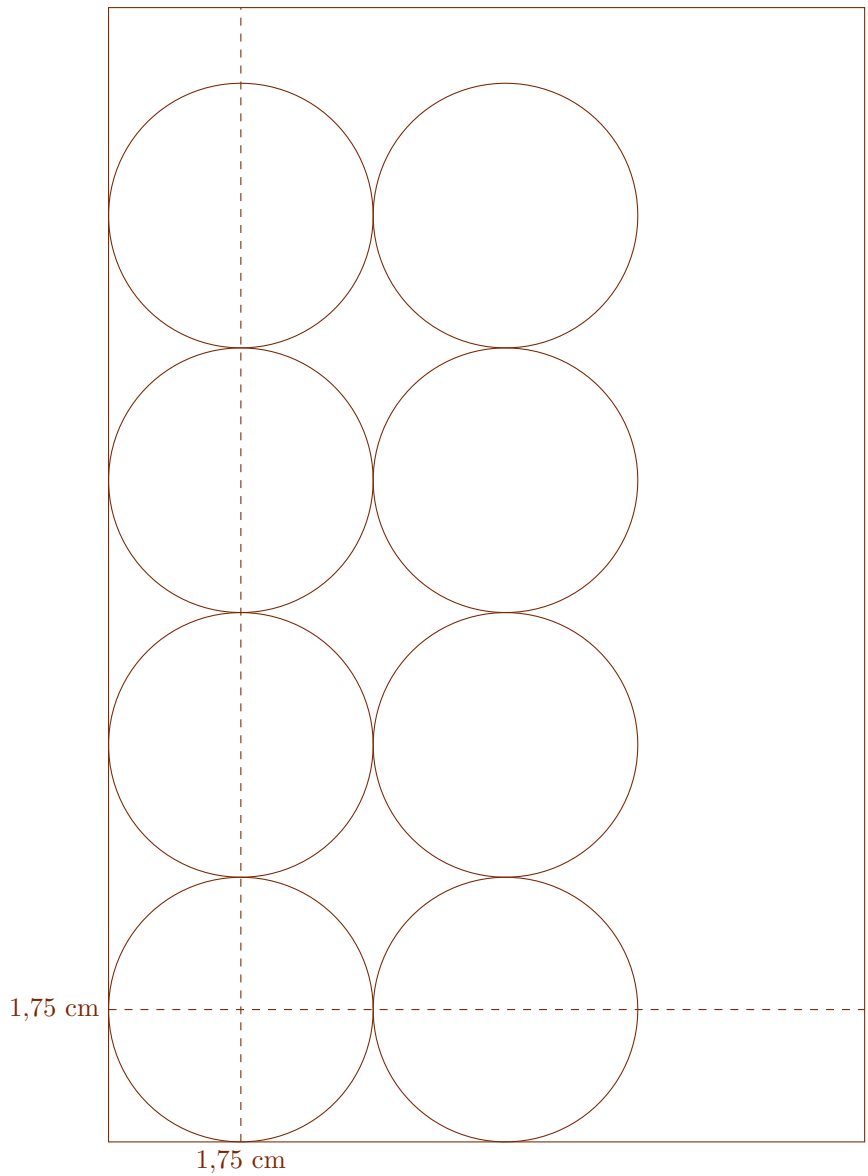
$$30 = 3 \times 8 + 6$$

En utilisant 3 feuilles il manquera encore 6 disques donc :

il faudra 4 feuilles.

3. Puisque l'échelle est $1/8$:

Réel	14 cm	120 cm	80 cm
Échelle	1,75 cm	15 cm	10 cm



4. Calculons l'aire \mathcal{A}_d d'un disque.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_d &= \pi R^2 \\
 &= \pi \times (14 \text{ cm})^2 \\
 &= \pi \times 14^2 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{A}_d = 196\pi \text{ cm}^2.$$

En arrondissant au centimètre carré :

$$\mathcal{A}_d \approx 616 \text{ cm}^2.$$

5. (a) * D'après les questions A.1 et A.4 l'aire de la feuille en ôtant les huit disques est :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_c &\approx 9600 \text{ cm}^2 - 8 \times 616 \text{ cm}^2 \\
 &\approx (9600 - 8 \times 616) \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

L'aire des chutes sur une feuille est $\mathcal{A}_c \approx 4672 \text{ cm}^2$.

- * Déterminons la proportion p des chutes pour une feuille.

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{4672 \text{ cm}^2}{9600 \text{ cm}^2} \\
 &= \frac{4672}{9600} \\
 &= \frac{73}{150} \\
 &\approx 0,48666 \quad \text{en tronquant}
 \end{aligned}$$

49 % de chaque feuille utilisée pour faire 8 disques est constituée de chutes.

- (b) Calculons l'aire \mathcal{A}_{30} de papier non utilisé pour faire 30 disques.

Sur trois des quatre feuilles l'aire de la chute est \mathcal{A}_c mais sur la quatrième il n'y a que 6 disques donc la chute est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_r &= \approx 9600 \text{ cm}^2 - 6 \times 616 \text{ cm}^2 \\ &\approx (9600 - 6 \times 616) \text{ cm}^2 \\ &\approx 5904 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Ainsi les chutes représentent :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{30} &\approx 3 \times \mathcal{A}_c + \\ &\approx 3 \times 4672 \text{ cm}^2 + 5904 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{30} \approx 19920 \text{ cm}^2.$$

6. Le format Grand Aigle peut accueillir exactement le même nombre de disque et avec la même disposition que le format Grand Monde. Cependant ce dernier est d'une superficie plus réduite ce qui minimise les déchets :

le format Grand Aigle permet d'obtenir moins de chutes.

Partie B.

1.

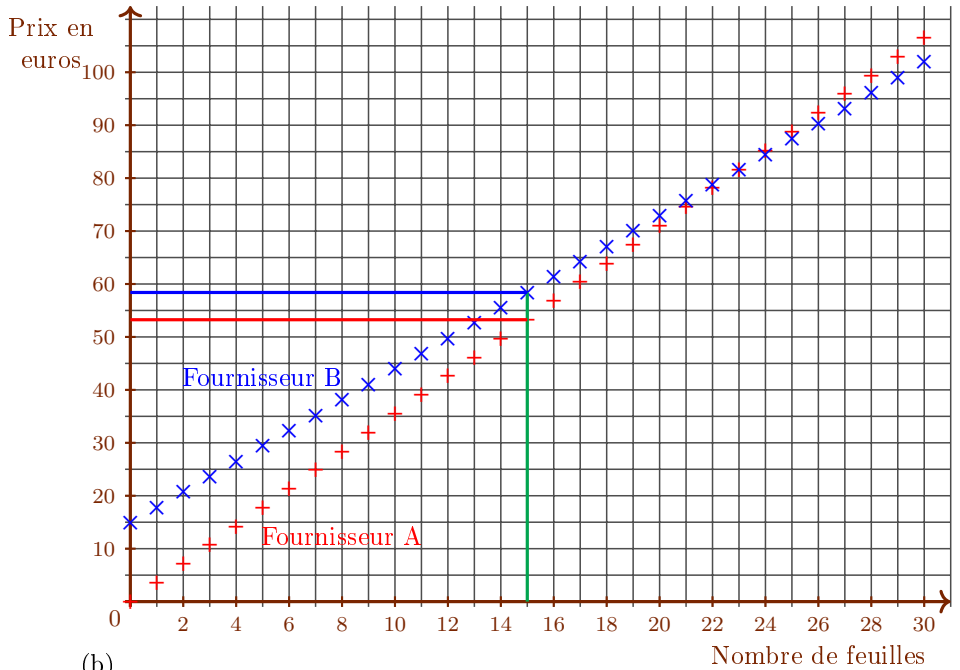
$$= 616 * A1.$$

2.

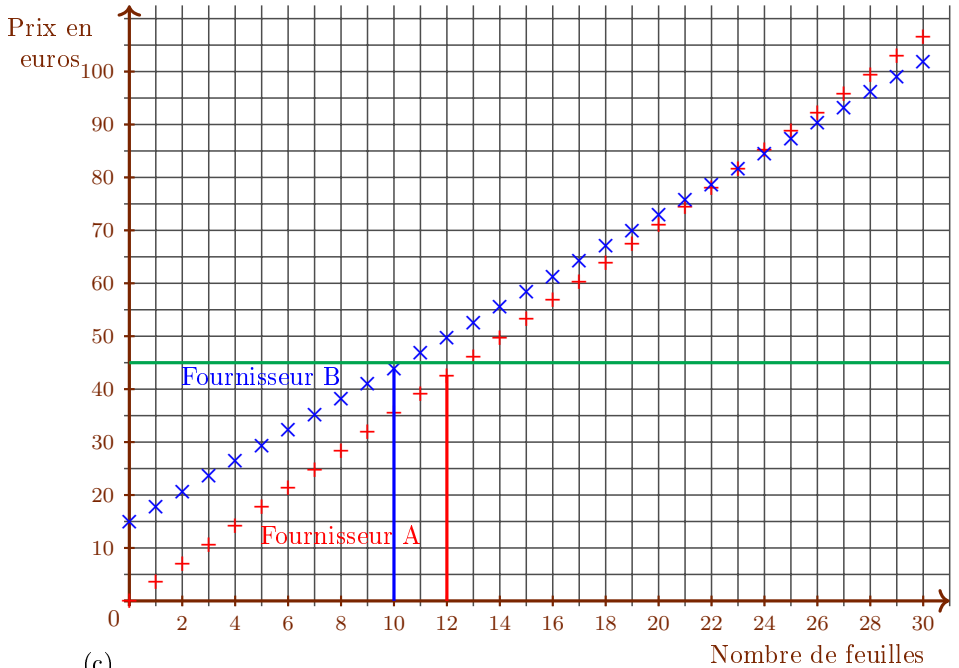
Pour 325 disques il faut choisir le format Jésus.

3. (a) Les deux séries de points sont alignés. Les deux droites correspondant sont les courbes représentatives de deux fonction affines. Or une fonction affine représente une situation de proportionnalité si elle est linéaire et elle est linéaire si sa courbe représentative passe par l'origine du repère.

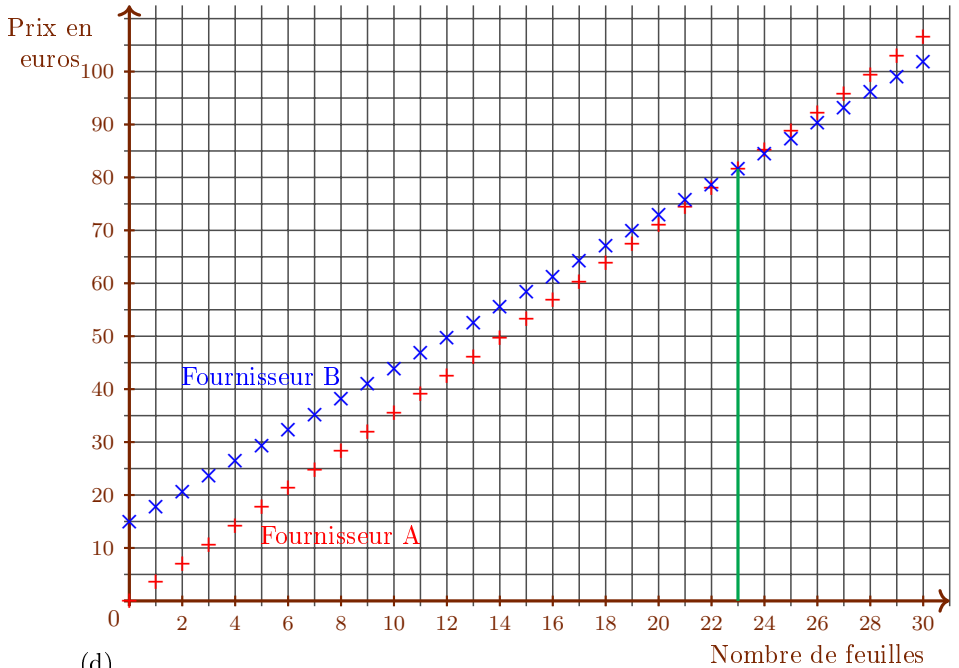
Le coût est proportionnel chez le fournisseur A.



15 feuilles coûtent 53 € chez le fournisseur A et 58 € chez le fournisseur B.



Avec 45 euro il est possible d'acheter 12 feuilles chez le fournisseur A et 10 chez le fournisseur B.



(d)

Le fournisseur B devient avantageux à partir de 23 feuilles commandées.

4. (a) Déterminons le coût de 15 feuilles, $u_A(15)$ et $u_B(15)$ chez les deux fournisseurs.

*

$$u_A(15) = 15 \times 3,55$$

$$u_A(15) = 53,25 \text{ €}.$$

*

$$u_B(15) = 2,90 \times 15 + 14,90$$

$$u_B(15) = 58,40 \text{ €}.$$

(b) * Résolvons $u_A(x) = 312$.

$$\begin{aligned} u_A(x) &= 312 \\ 3,55x &= 312 \\ \frac{3,55x}{3,55} &= \frac{312}{3,55} \end{aligned}$$

Donc :

$$x \approx 87,88$$

Avec 312 € il est possible d'acheter 87 feuilles chez le fournisseur A.

* Résolvons $u_B(x) = 312$.

$$\begin{aligned} u_B(x) &= 312 \\ 2,90x + 14,90 &= 312 \\ 2,90x + 14,90 - 14,90 &= 312 - 14,90 \\ 2,90x &= 297,1 \\ \frac{2,90x}{2,90} &= \frac{297,1}{2,90} \end{aligned}$$

Donc :

$$x \approx 102,44$$

Avec 312 € il est possible d'acheter 102 feuilles chez le fournisseur B.

(c) Dire que le fournisseur B est plus avantageux c'est dire que : $u_A(x) \geq u_B(x)$.

Résolvons l'inéquation $u_A(x) \geq u_B(x)$.

$$\begin{aligned}
 3,55x &\geq 2,9x + 14,9 \\
 3,55x - 2,9x &\geq 2,9x + 14,9 - 2,9x \\
 0,65x &\geq 14,9 \\
 \frac{0,65x}{0,65} &\geq \frac{14,9}{0,65}, \text{ car } 0,65 > 0
 \end{aligned}$$

Or $\frac{14,9}{0,65} \approx 22,92$ donc

le fournisseur B est plus avantageux à partir de 23 feuilles commandées.

(d) $325 = 8 \times 40 + 5$, il faut donc acheter 41 feuilles.

D'après la question précédente

il faut choisir le fournisseur B.

$$2,9 \times 41 + 14,9 = 133,8 \text{ donc}$$

la commande coûtera 133,80 €.

Partie C.

1. Calculons la longueur ℓ de fil.

Le périmètre d'un disque est :

$$\begin{aligned}
 p_d &= 2\pi R \\
 &= 2\pi \times 14 \text{ cm} \\
 &= 28\pi \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Donc, pour les 30 disques :

$$\begin{aligned}
 \ell &= 30 \times p_d \\
 &= 30 \times 28\pi \text{ cm} \\
 &= 840\pi \text{ cm} \\
 &= 840\pi \times \frac{1}{100} \text{ m} \\
 &= 8,4\pi \text{ m} \\
 &\approx 26,389 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$\ell \approx 26,4 \text{ m.}$$

2. (a) Déterminons le temps moyen t_A mis par Alice.

$$\begin{aligned}
 t_A &= \frac{48 \text{ min}}{30} \\
 &= \frac{30 + 18}{30} \text{ min} \\
 &= 1 \text{ min} + \frac{18 \times 2}{30 \times 2} \text{ min} \\
 &= 1 \text{ min} + 18 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\
 &= 1 \text{ min} + 18 \text{ s}
 \end{aligned}$$

$$t_A = 1 \text{ min} + 18 \text{ s.}$$

- (b) Notons n le nombre de disque découpé par Alice s'ils se partagent le travail.

Déterminons n .

On a $t_A = 1,6 \text{ min}$.

Le temps moyen de fabrication pour Bertrand est : $t_B = \frac{1 \text{ h} + 12 \text{ min}}{30} = 2,4 \text{ min}$

Donc on doit avoir dans l'idéal un temps de travail égal pour les deux :

$$\begin{aligned}
 n \times t_A &= (30 - n) \times t_B \\
 n \times 1,6 &= (30 - n) \times 2,4 \\
 1,6n + 2,4n &= 30 \times 2,4 \\
 4n &= 7,2 \\
 n &= \frac{72}{4} \\
 n &= 18
 \end{aligned}$$

Donc le temps mis est :

$$\begin{aligned}
 18t_A &= 18 \times 1,6 \text{ min} \\
 &= 28,8 \text{ min} \\
 &= 28 \text{ min} + 0,8 \times 60 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Il faudra 28 min et 48 s.

Exercice 4.

1. Effectuons les trois étapes de l'algorithme.

1	$d \times (d + 1) = 3 \times (3 + 1) = 12.$
2	$u \times v = 4 \times 6 = 24.$
3	$u \times v + 100 \times d(d + 1) = 24 + 100 \times 12 = 1224.$

Or effectivement $34 \times 36 = 1224$ donc

l'algorithme fonctionne pour 34×36 .

2. Démontrons que $M \times N = u \times v + 100 \times d(d + 1)$.

$$\begin{aligned}
 M \times N &= (10d + u) \times (10d + v) \\
 &= 10d \times 10d + 10d \times v + u \times 10d + u \times v \\
 &= 100d^2 + 10d(v + u) + u \times v \\
 &= 100d^2 + 10d \times 10 + u \times v \\
 &= 100d \times d + 100d \times 1 + u \times v \\
 &= 100d \times (d + 1) + u \times v
 \end{aligned}$$

L'algorithme fonctionne bien.

3. Effectuons les trois étapes de l'algorithme.

1	$d \times (d + 1) = 4 \times (4 + 1) = 20.$
2	$u \times v = 2 \times 8 = 16.$
3	$0,01 \times u \times v + d(d + 1) = 0,01 \times 16 + 20 = 20,16.$

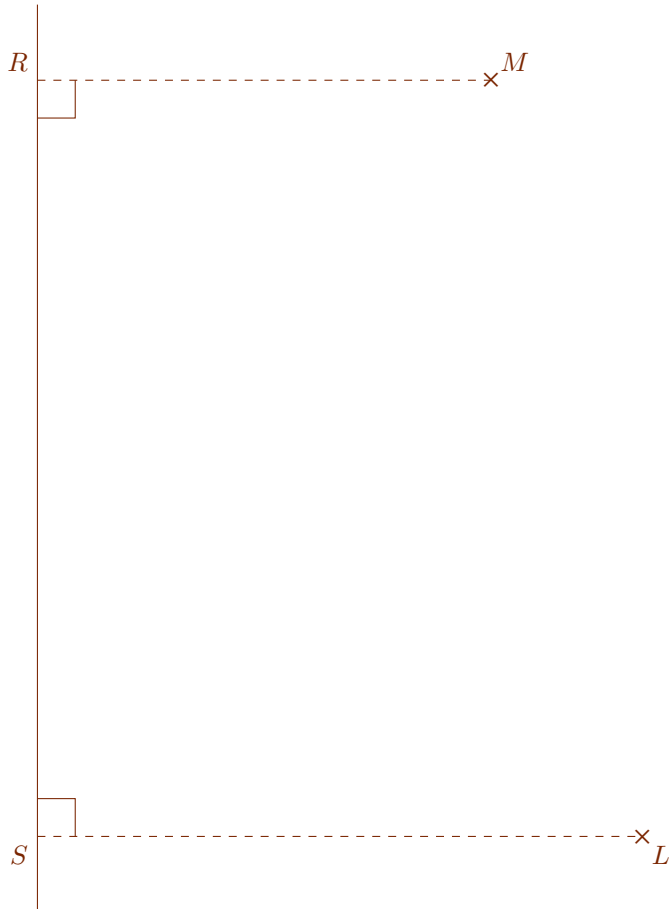
Or effectivement $34 \times 36 = 1224$ donc

l'algorithme fonctionne pour 34×36 .

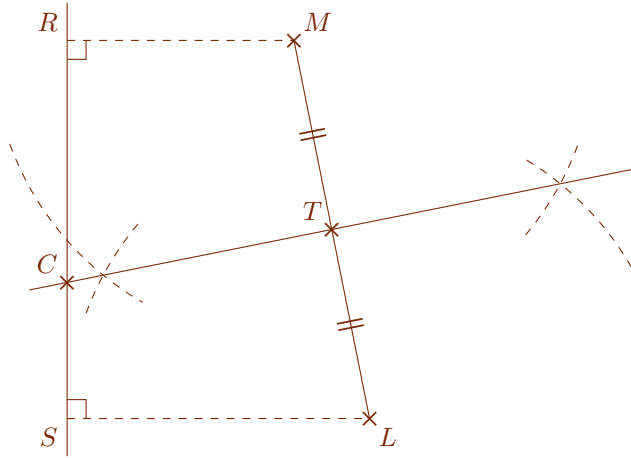
Exercice 5.

1.

Longueur réelle	30 m	40 m	50 m
Longueur à l'échelle	6 cm	8 cm	10 cm



2. (a) La droite à tracer est la médiatrice de $[ML]$. Tracé à la règle et au compas. La figure suivante est à l'échelle $1/2$ par rapport à celle demandée.



- (b) La droite (CT) est la médiatrice de $[ML]$ puisqu'elle passe par le milieu du segment et est perpendiculaire à ce segment.
 Or les points de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment. En particulier C est équidistant de M et de L .
 Comme de plus c'est un point de $[RS]$:

C est le point de contact recherché.

- (c) Sur la figure à l'échelle

la distance entre R et C mesure 3,2 cm.

Par proportionnalité :

1 cm	5 m
6,4 cm	$6,4 \times 5 \text{ m} = 32 \text{ m}$

La distance entre les points R et C dans la cours de récréation est approximativement de 16 m.

3. (a) * Exprimons MC en fonction de x .

RMC est rectangle en R donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$CR^2 + RM^2 = MC^2.$$

Nous en déduisons successivement :

$$MC^2 = x^2 + 30^2$$

$$MC^2 = x^2 + 900$$

Puisque MC est une longueur c'est un nombre positif et donc :

$$MC = \sqrt{x^2 + 900}.$$

* Exprimons CL en fonction de x .

CSL est rectangle en S donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$CS^2 + SL^2 = CL^2.$$

Nous en déduisons successivement :

$$CL^2 = (50 - x)^2 + 40^2$$

$$CL^2 = (50 - x)^2 + 1600$$

Puisque CL est une longueur c'est un nombre positif et donc :

$$CL = \sqrt{(50 - x)^2 + 1600}.$$

(b) * Analyse.

Supposons que nous ayons trouvé C .

On a donc :

$$MC = CL$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + 900} &= \sqrt{(50 - x)^2 + 1600} \\
 x^2 + 900 &= (50 - x)^2 + 1600 \\
 x^2 + 900 &= (50^2 - 2 \times 50 \times x + x^2) + 1600 \\
 x^2 + 900 &= x^2 - 100x + 2500 + 1600 \\
 x^2 + 900 - x^2 &= x^2 - 100x + 4100 - x^2 \\
 900 &= -100x + 4100 \\
 900 - 4100 &= 100x + 4100 - 4100 \\
 -3200 &= -100x \\
 \frac{-3200}{-100} &= \frac{-100x}{-100} \\
 32 &= x
 \end{aligned}$$

* Synthèse.

$0 \leq 32 \leq 50$ et si $x = 32$ alors on a bien $LC = LM$.