Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 0.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

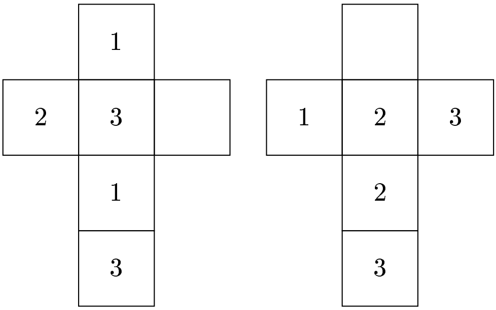
Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20*.*
Le sujet est composé de six exercices indépendants.

Il est donc supposé y avoir six exercices mais le sujet n'en comportait que cinq.

Exercice 1.

Un enseignant de moyenne section de maternelle souhaite créer un jeu sur le modèle du jeu de l'oie pour travailler avec ses élèves la construction du nombre et en particulier des décompositions et recompositions de nombres de 1 à 6.

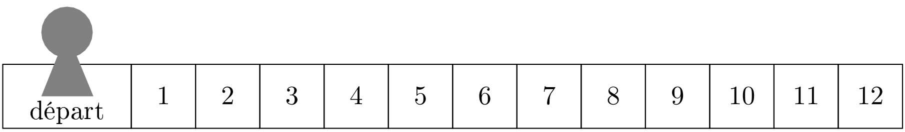
Il fabrique deux dés équilibrés selon les patrons suivants :



Il crée un parcours sur lequel les élèves déplacent un pion selon le protocole suivant :

— l'élève lance les deux dés ;
— il avance son pion d'autant de cases que la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés ; s'il n'obtient aucun nombre sur les deux dés (deux faces vierges), il passe son tour.

Le plateau de jeu est matérialisé par une bande numérique comme ci-dessous.



1. On lance le dé vert seul. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 ?

   Modélisation : notons Ω_1 l'ensemble des 6 faces du dé (en les distinguant toutes). L'univers est muni de la loi d'équiprobabilité, $\mathbb{P}_1$, puisque les dés sont équilibrés.
   Notons E l'événement « obtenir un 3 ».

   Calculons $\mathbb{P}_1(E)$.

   Ω_1 est muni de l'équiprobabilité, E est réalisé par 2 issues et Ω_1 contient 6 issues donc :

   $$\mathbb{P}_1(E) = \frac{2}{6}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}_1(E) = \tfrac{1}{3}.}$$

Dans la suite de l'exercice, afin de simplifier les réponses, on pourra considérer que les faces vierges correspondent au nombre 0.

2. Un élève lance les deux dés, il calcule la somme des nombres obtenus.

   (a) Quelles sommes peuvent être obtenues ?

   Afin de nous ramener à l'équiprobabilité, et donc à un travail de dénombrement, nous allons modéliser en distinguant toutes les faces des dés. Par exemple les deux faces 3 du dé vert seront distinguées.

   Notons Ω_2 l'univers formé des 36 couples de faces des deux dés qu'il est possible d'obtenir et munissons-le de l'équiprobabilité $\mathbb{P}_2$.

   Schématisons l'expérience aléatoire par un tableau double entrée en indiquant ce qui nous intéresse à savoir les sommes en fonction des différentes faces.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Si on note X variable aléatoire qui à chaque lancer des deux dés associe la somme des nombres affichés vérifie donc : $X \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Les sommes possibles sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

(b) Quelle est la probabilité qu'il doive passer son tour ?

Notons P l'événement « passer son tour ».

Calculons $\mathbb{P}_2(P)$.

Ω_2 est muni de l'équiprobabilité, P est réalisé par 1 issue et l'univers, Ω_2, contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(P) = \frac{1}{36}$$

(c) Quelle est la probabilité qu'il doive avancer de 3 cases ?

Notons F l'événement « avancer de trois cases ».

Calculons $\mathbb{P}_2(F)$.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Ω_2 est muni de l'équiprobabilité, d'après le tableau F est réalisé par 8 issues et l'univers, Ω_2, contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{9}{36}$$

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{4}$$

(d) Déterminer la probabilité de chacun des résultats possibles.

En procédant comme à la question précédente nous obtenons :

Somme	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$

(e) Quelle est la probabilité que le résultat du dé vert soit strictement supérieur à celui du dé bleu ?

Notons G l'événement « le résultat du vert est strictement supérieur à celui du dé bleu ».

Calculons $\mathbb{P}_2(G)$.

Utilisons le tableau pour dénombrer les issues qui nous intéressent même si les sommes ne servent à rien.

dé vert / dé bleu	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Ω_2 est muni de l'équiprobabilité, d'après le tableau G est réalisé par 12 issues et l'univers, Ω_2, contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{12}{36}$$

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{3}$$

3. Après deux tours de jeu, un élève est arrivé sur la case 10. Quelle est la probabilité qu'il se soit arrêté sur la case 4 au premier tour ?

Notons H l'événement « obtenir 4 au premier tour » et K l'événement « arriver sur la case 10 au deuxième tour ».

Calculons $\mathbb{P}_K(H)$ la probabilité que l'élève s'arrête sur la case 4 sachant qu'il est arrivé sur la case 10 au deuxième tour.

Avec les probabilités conditionnelles tout ce passe comme si l'univers était modifié.

Puisque l'élève est arrivé sur la case 10 il a forcément obtenu un nombre strictement supérieur à 3.

Donc l'univers n'est plus Ω_2 mais pas l'univers Ω_3 regroupant les issues correspondant aux cases colorées ci-dessous.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Les issues ayant toutes la même chance d'être obtenues nous munissons Ω_3 de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$. Ainsi Ω_3 contient 18 issues.

De plus il y a 8 issues correspondant l'obtention d'un 4 donc

$$\mathbb{P}_K(H) = \frac{8}{18}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_K(H) = \tfrac{4}{9}.}$$

Exercice 2.

Un nombre décimal est souvent défini de la façon suivante : « Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $dfraca10^n$ où a est un nombre entier et n est un nombre entier positif. ».

1. On s'appuiera sur la définition précédente pour répondre aux deux questions suivantes.

   (a) Montrer que 0,127 est un nombre décimal.

   Montrons que 0,127 est un nombre décimal.

$$0{,}127 = \frac{127}{1000} = \frac{127}{10^3}.$$

Donc 0,127 peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a = 127$ qui est un entier et $n = 3$ un nombre entier positif.

$$\boxed{\text{0,127 est un nombre décimal.}}$$

(b) Montrer que $\frac{1}{4}$ est un nombre décimal.

Montrons que $\frac{1}{4}$ est décimal.

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = \frac{25}{10^2}.$$

Comme $a = 25 \in \mathbb{Z}$ et $n = 2 \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\tfrac{1}{4} \in \mathbb{D}.}$$

2. Dans une classe de CM2 un enseignant demande aux élèves de dire ce qu'est un nombre décimal, voici trois réponses proposées par des élèves :
   - Élève A : « *Un nombre décimal est un nombre avec une virgule.* »
   - Élève B : « *Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une fraction qui a* 10 *ou* 100 *au dénominateur.* »
   - Élève C : « *Un nombre décimal est un nombre qui n'est pas entier.* »

   Expliquer pourquoi chacune des définitions proposées ne convient pas d'un point de vue mathématique. On pourra notamment s'appuyer sur des contre-exemples.

   * La proposition de l'élève A ne convient pas car $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ est un nombre avec une virgule mais ce n'est pas un nombre décimal.
   * La proposition de l'élève B ne convient pas car 0,127 est un nombre décimal mais il ne peut pas s'écrire comme une fraction avec 10 ou 100 au dénominateur.
   * La proposition de l'élève C ne convient pas car les nombres entiers sont des décimaux, par exemple, $3 = \frac{30}{10^1}$.

3. Parmi les nombres suivants dire, en justifiant, lesquels sont décimaux et lesquels ne le sont pas : 2,48 ; $\dfrac{7}{25}$; 12 ; $\dfrac{7}{9}$; $\dfrac{49}{14}$.

   * $2{,}48 = \frac{248}{10^2}$. Donc

     $2{,}48 \in \mathbb{D}$.

   * $\frac{7}{25} = \frac{28}{10^2}$. Donc

     $\frac{7}{25} \in \mathbb{D}$.

   * $12 = \frac{12}{10^0}$. Donc

     $12 \in \mathbb{D}$.

   * $\frac{7}{9} = 0{,}777\ldots$. Donc

     $\frac{7}{9} \in \mathbb{D}$.

   * $\frac{49}{14} = \frac{7}{2} = \frac{35}{10} = \frac{35}{10^1}$. Donc

     $\frac{49}{14} \in \mathbb{D}$.

4. Le produit de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

   Soient $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} &= \frac{a \times b}{10^n \times 10^m} \\ &= \frac{a \times b}{10^{n+m}}\end{aligned}$$

   Comme $a \times b \in \mathbb{Z}$ et $n + m \in \mathbb{N}$, on a $\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} \in \mathbb{D}$.
   Finalement

   Le produit de deux nombres décimaux est encore un nombre décimal.

5. Le quotient de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

   1 et 3 sont des nombres décimaux mais $\frac{1}{3} = 0{,}333\cdots \notin \mathbb{D}$.

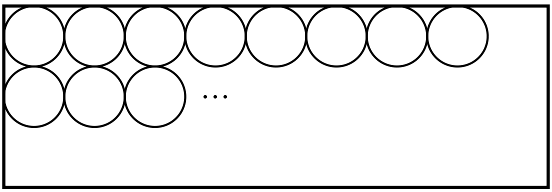
   Le quotient de deux nombres décimaux n'est pas nécessairement décimal.

Exercice 3.

Partie A.

Alice veut réaliser une activité avec ses élèves de petite section de maternelle. Elle a besoin de découper 30 disques de 14 cm de rayon dans des feuilles de dimensions 120 cm × 80 cm, c'est-à-dire de 120 cm de longueur sur 80 cm de largeur.

Elle aimerait les dessiner en occupant l'espace de chaque feuille en commençant en haut à gauche puis en continuant comme dans la figure ci-dessous.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

1. Calculer l'aire de la feuille, en cm^2.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}_f$ de la feuille.

   Il s'agit d'un rectangle donc

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_f &= 120 \text{ cm} \times 80 \text{ cm} \\ &= 120 \times 80 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_f = 9600 \text{ cm}^2.$$

2. (a) Expliquer pourquoi Alice peut tracer au maximum 4 disques dans la longueur de la feuille.

Déterminons le nombre n_L de disque qui entre dans une longueur.

Chaque disque ayant un rayon de 14 cm et la feuille ayant une longueur de 120 cm il faut que :

$$n_L \times (2 \times 14 \text{ cm}) \leqslant 120 \text{ cm}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} n_L \times 28 \text{ cm} &\leqslant 120 \text{ cm} \\ \frac{n_L \times 28 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} &\leqslant \frac{120 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} \quad \text{car } 28 > 0 \\ n_L &\leqslant \frac{30}{7} \end{aligned}$$

Or, en tronquant, $\frac{30}{7} \approx 4{,}28$ donc

$$\boxed{\text{le nombre, entier, de disques entiers qu'il est possible de tracer est au maximum de 4.}}$$

(b) En déduire le nombre maximum de disques qu'elle pourra tracer dans cette feuille.

Déterminons le nombre maximum de disque qu'il est possible de placer dans une largeur.

En procédant à une division euclidienne (pour changer un peu de ce qui a été fait à la question précédente) :

$$80 = 2 \times 28 + 24$$

$$\boxed{\text{Il est donc loisible de placer 2 disques entiers dans le sens de la largeur.}}$$

(c) Combien faut-il au minimum de feuilles pour dessiner les 30 disques ?

Déterminons le nombre de feuilles nécessaires.

Une feuille contient au maximum 4 disques par lignes et 2 lignes donc $2 \times 4 = 8$ disques.

Puisqu'il faut 30 disques le nombre de feuilles nécessaire s'obtient par division euclidienne :

$$30 = 3 \times 8 + 6$$

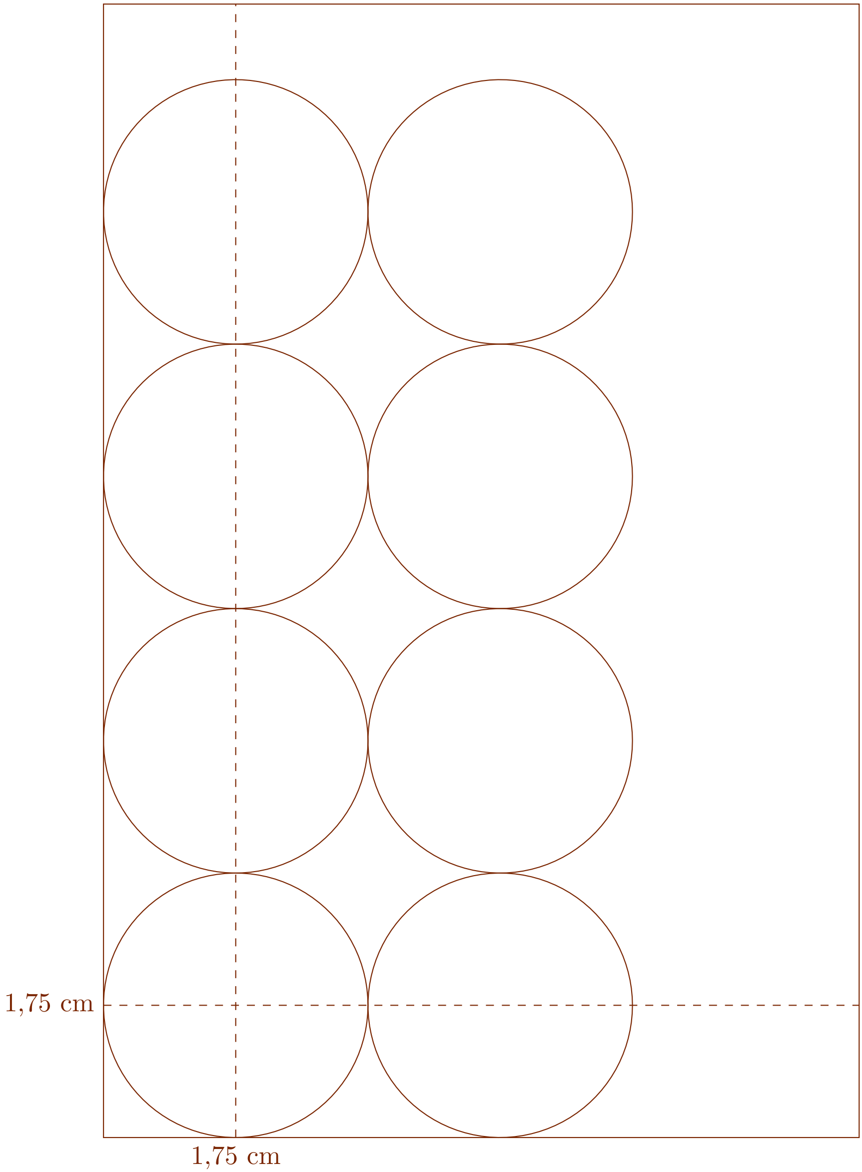
En utilisant 3 feuilles il manquera encore 6 disques donc :

il faudra 4 feuilles.

3. Représenter à l'échelle 1/8 une feuille de dimensions 120 cm × 80 cm avec les disques qu'elle peut contenir.

Puisque l'échelle est 1/8 :

Réel	14 cm	120 cm	80 cm
Échelle	1,75 cm	15 cm	10 cm



4. Calculer l'aire exacte d'un disque puis donner la valeur arrondie au centimètre carré près.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}_d$ d'un disque.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_d &= \pi R^2\\ &= \pi \times (14 \text{ cm})^2\\ &= \pi \times 14^2 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathscr{A}_d = 196\pi \text{ cm}^2.}$$

En arrondissant au centimètre carré :

$$\boxed{\mathscr{A}_d \approx 616 \text{ cm}^2.}$$

Dans la suite du problème, on considérera que l'aire d'un disque est de 616 cm^2.

5. (a) Quelle est l'aire de papier non utilisé si Alice découpe 8 disques dans une feuille ?
Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale de la feuille cela représente-t-il ?

* D'après les questions A.1 et A.4 l'aire de la feuille en ôtant les huit disques est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_c &\approx 9600 \text{ cm}^2 - 8 \times 616 \text{ cm}^3\\ &\approx (9600 - 8 \times 616) \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire des chutes sur une feuille est } \mathscr{A}_c \approx 4672 \text{ cm}^2.}$$

* Déterminons la proportion p des chutes pour une feuille.

$$\begin{aligned}p &= \frac{4672 \text{ cm}^2}{9600 \text{ cm}^2}\\ &= \frac{4672}{9600}\\ &= \frac{73}{150}\\ &\approx 0{,}48666 \quad \text{en tronquant}\end{aligned}$$

49 % de chaque feuille utilisée pour faire 8 disques est constituée de chutes.

(b) Quelle est l'aire de papier non utilisé après avoir découpé 30 disques ? Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale des feuilles utilisées cela représente-t-il ?

Calculons l'aire $\mathscr{A}_{30}$ de papier non utilisé pour faire 30 disques.

Sur trois des quatre feuilles l'aire de la chute est $\mathscr{A}_c$ mais sur la quatrième il n'y a que 6 disques donc la chute est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_r &= \approx 9600 \text{ cm}^2 - 6 \times 616 \text{ cm}^3 \\ &\approx (9600 - 6 \times 616) \text{ cm}^2 \\ &\approx 5904 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Ainsi les chutes représentent :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{30} &\approx 3 \times \mathscr{A}_c + \\ &\approx 3 \times 4672 \text{ cm}^2 + 5904 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$\mathscr{A}_{30} \approx 19920 \text{ cm}^3$.

6. Pour limiter le gaspillage de papier, Alice veut choisir le format qui permettra d'obtenir le moins de chutes (en cm^2) tout en gardant la même disposition que précédemment. Elle a le choix entre plusieurs formats proposés par un fournisseur :

Nom	**Dimensions**
Raisin	65 cm × 50 cm
Jésus	75 cm × 56 cm
Impérial	80 cm × 60 cm
Grand Aigle	105 cm × 75 cm
Grand Monde	120 cm × 80 cm

Pour obtenir les 30 disques, le format Grand Aigle permet-il d'obtenir moins de chutes (en cm^2) que le format Grand Monde ? Justifier la réponse.

Le format Grand Aigle peut accueillir exactement le même nombre de disque et avec la même disposition que le format Grand Monde. Cependant ce dernier est d'une superficie plus réduite ce qui minimise les déchets :

le format Grand Aigle permet d'obtenir moins de chutes.

Partie B.

D'autres classes veulent réaliser la même activité. La directrice se demande quel format permettra d'obtenir moins de chutes en fonction du nombre de disques à découper.

Pour cela, elle utilise un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre de disques	Surface des disques (en cm²)	Raisin : surface des chutes (en cm²)	Jésus : surface des chutes (en cm²)	Impérial : surface des chutes (en cm²)	Grand aigle : surface des chutes (en cm²)	Grand monde : surface des chutes (en cm²)
2	1	616	2634	3584	4184	7259	8984
3	2	1232	2018	2968	3568	6643	8368
4	3	1848	4652	2352	2952	6027	7752
5	4	2464	4036	1736	2336	5411	7136
6	5	3080	6670	5320	6520	4795	6520
7	...	...	...	...	...	...	...
8	26	16016	26234	13384	17584	23359	22384
9	27	16632	28868	12768	16968	22743	21768
10	28	17248	28252	12152	16352	22127	21152
11	29	17864	30886	15736	20536	21511	20536
12	30	18480	30270	15120	19920	20895	19920
13	...	...	...	...	...	...	...
14	320	197120	322880	138880	186880	228130	186880
15	321	197736	325514	142464	191064	227514	195864
16	322	198352	324898	141848	190448	226898	195248
17	323	198968	327532	141232	189832	226282	194632
18	324	199584	326916	140616	189216	225666	194016
19	325	200200	329550	144200	193400	232925	193400

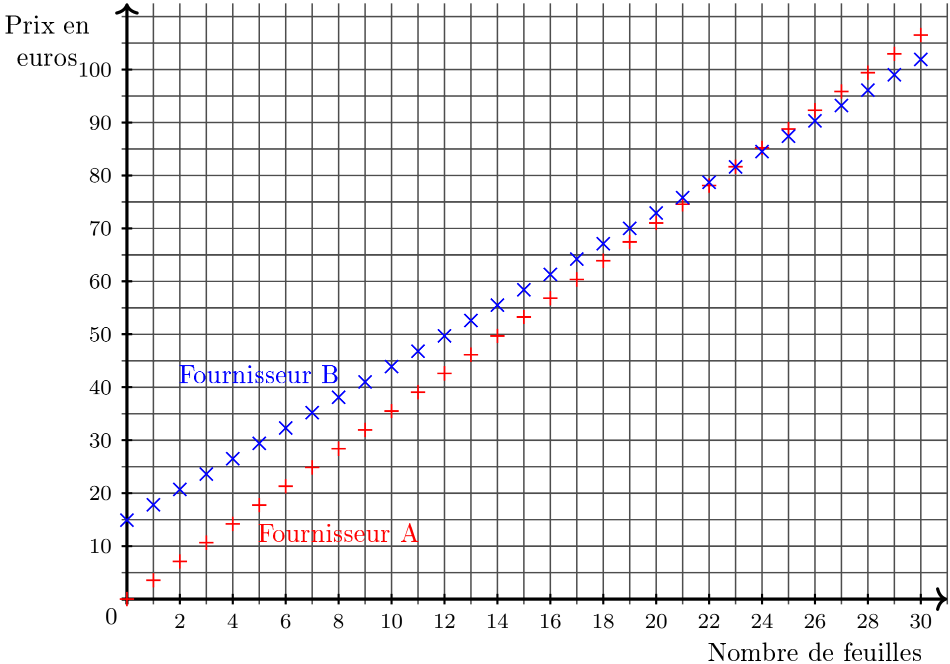
1. Sans justifier, donner la formule qui a été saisie dans la cellule `B2` et étirée vers le bas.

   $= 616 * \texttt{A1}.$

2. Sans justifier, donner le format permettant d'éviter au mieux le gaspillage de papier si l'on veut réaliser 325 disques.

   Pour 325 disques il faut choisir le format Jésus.

3. Les deux seuls fournisseurs disponibles ne disposent plus que de feuilles au format « Grand Monde ». La directrice veut choisir le fournisseur qui propose le tarif le plus avantageux pour acheter les feuilles nécessaires à la réalisation des disques. On a représenté graphiquement ci-dessous le prix en fonction du nombre de feuilles commandées chez chaque fournisseur :



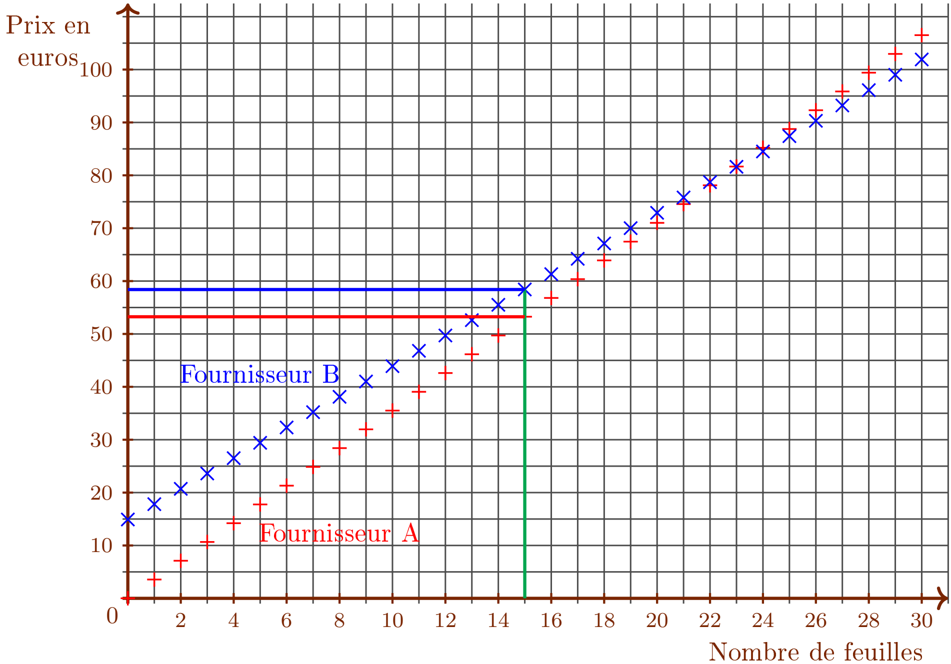
(a) Chez un des deux fournisseurs le coût des feuilles est proportionnel au nombre de feuilles achetées. Lequel ? On justifiera la réponse.

Les deux séries de points sont alignés. Les deux droites correspondant sont les courbes représentatives de deux fonction affines. Or une fonction affine représente une situation de proportionnalité si elle est linéaire et elle est linéaire si sa courbe représentative passe par l'origine du repère.

Le coût est proportionnel chez le fournisseur A.

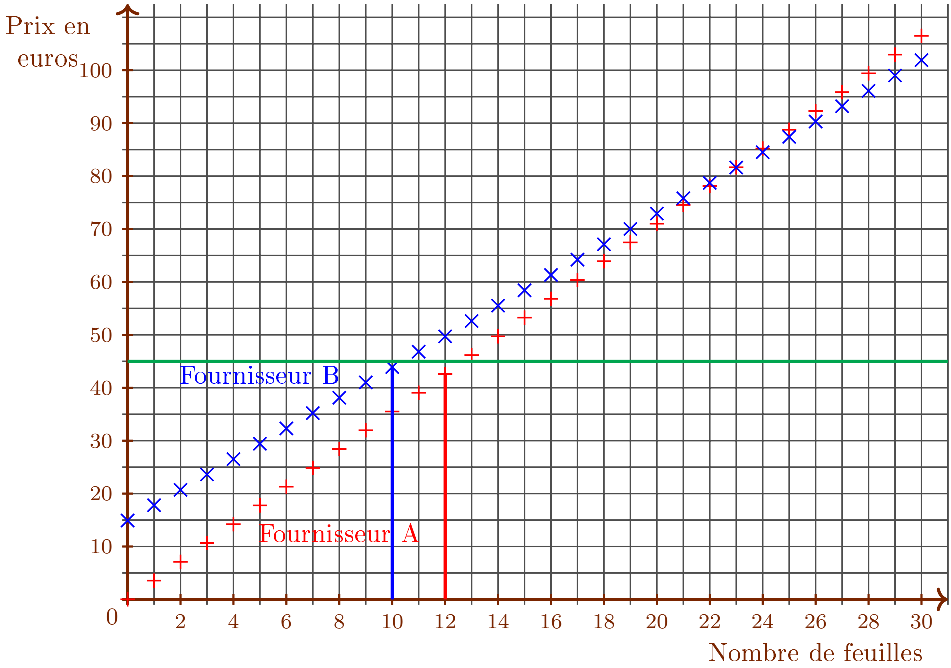
Répondre aux questions suivantes par lecture graphique, sans justifier.

(b) Quel est le prix que va coûter l'achat de 15 feuilles chez chaque fournisseur ?



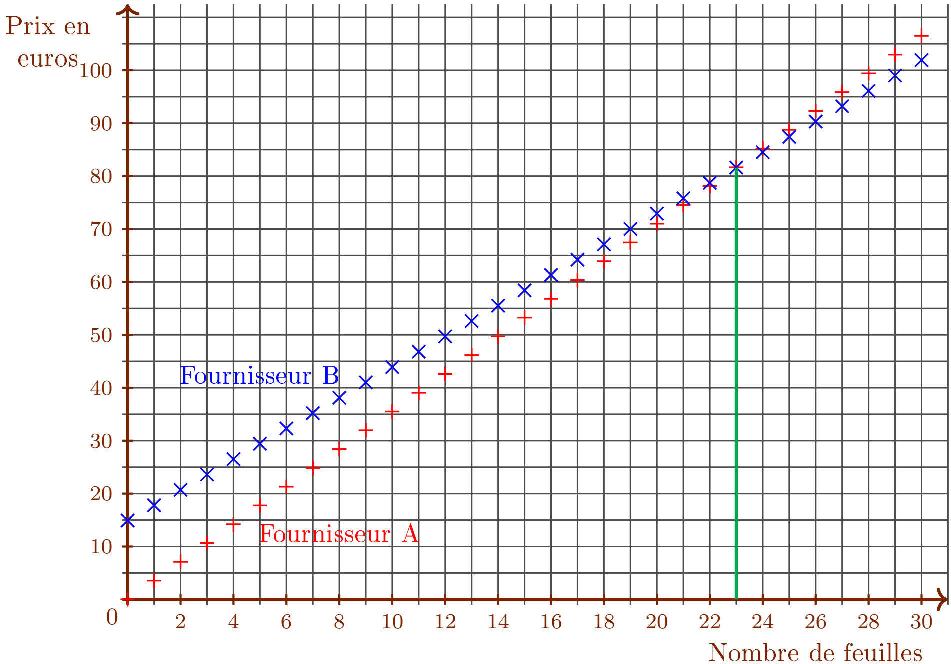
15 feuilles coûtent 53 € chez le fournisseur A et 58 € chez le fournisseur B.

(c) Déterminer le nombre maximal de feuilles que l'on peut acheter chez chaque fournisseur si l'on dispose d'un budget de 45 €.



Avec 45 euro il est possible d'acheter 12 feuilles chez le fournisseur A et 10 chez le fournisseur B.

(d) À partir de combien de feuilles est-il plus avantageux de commander chez le fournisseur B ?



Le fournisseur B devient avantageux à partir de 23 feuilles commandées.

4. On a maintenant représenté sous forme de tableau les tarifs proposés par chaque fournisseur :

	Coût d'une feuille (en €)	Frais de port (en €)
Fournisseur A	3,55	Gratuit
Fournisseur B	2,90	14,90

(a) Quel est le prix que va coûter l'achat de 15 feuilles chez chaque fournisseur ?

Déterminons le coût de 15 feuilles, $u_A(15)$ et $u_B(15)$ chez les deux fournisseurs.

*

$$u_A(15) = 15 \times 3{,}55$$

$$u_A(15) = 53{,}25 \text{ €}.$$

*

$$u_B(15) = 2{,}90 \times 15 + 14{,}90$$

$$u_B(15) = 58{,}40 \text{ €}.$$

(b) Déterminer le nombre de feuilles que l'on peut acheter chez chaque fournisseur si l'on dispose d'un budget de 312 €.

* Résolvons $u_A(x) = 312$.

$$\begin{aligned} u_A(x) &= 312 \\ 3{,}55x &= 312 \\ \frac{3{,}55x}{3{,}55} &= \frac{312}{3{,}55} \end{aligned}$$

Donc :

$$x \approx 87{,}88$$

Avec 312 € il est possible d'acheter 87 feuilles chez le fournisseur A.

* Résolvons $u_B(x) = 312$.

$$\begin{aligned} u_B(x) &= 312 \\ 2{,}90x + 14{,}90 &= 312 \\ 2{,}90x + 14{,}90 - 14{,}90 &= 312 - 14{,}90 \\ 2{,}90x &= 297{,}1 \\ \frac{2{,}90x}{2{,}90} &= \frac{297{,}1}{2{,}90} \end{aligned}$$

Donc :

$$x \approx 102{,}44$$

Avec 312 € il est possible d'acheter 102 feuilles chez le fournisseur B.

(c) À partir de combien de feuilles est-il plus avantageux de commander chez le fournisseur B ? Justifier la réponse.

Dire que le fournisseur B est plus avantageux c'est dire que : $u_A(x) \geqslant u_B(x)$.

Résolvons l'inéquation $u_A(x) \geqslant u_B(x)$.

$$\begin{aligned} 3{,}55x &\geqslant 2{,}9x + 14{,}9 \\ 3{,}55x - 2{,}9x &\geqslant 2{,}9x + 14{,}9 - 2{,}9x \\ 0{,}65x &\geqslant 14{,}9 \\ \frac{0{,}65x}{0{,}65} &\geqslant \frac{14{,}9}{0{,}65}, \text{ car } 0{,}65 > 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{14{,}9}{0{,}65} \approx 22{,}92$ donc

le fournisseur B est plus avantageux à partir de 23 feuilles commandées.

(d) Sachant qu'il y a 325 disques à dessiner et que l'on peut en mettre 8 par feuille, quelle entreprise la directrice va-t-elle choisir ? Quel sera le prix de cette commande ?

$325 = 8 \times 40 + 5$, il faut donc acheter 41 feuilles.
D'après la question précédente

il faut choisir le fournisseur B.

$2{,}9 \times 41 + 14{,}9 = 133{,}8$ donc

la commande coûtera 133,80 €.

Partie C.

1. Après avoir découpé les 30 disques, Alice veut les border d'un fil de laine. Quelle longueur de laine devra-t-elle utiliser pour border tous les disques ? On donnera le résultat en mètre, arrondi au décimètre.

   Calculons la longueur ℓ de fil.

   Le périmètre d'un disque est :

$$\begin{aligned} p_d &= 2\pi R \\ &= 2\pi \times 14 \text{ cm} \\ &= 28\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

   Donc, pour les 30 disques :

$$\begin{aligned} \ell &= 30 \times p_d \\ &= 30 \times 28\pi \text{ cm} \\ &= 840\pi \text{ cm} \\ &= 840\pi \times \frac{1}{100} \text{ m} \\ &= 8{,}4\pi \text{ m} \\ &\approx 26{,}389 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\boxed{\ell \approx 26{,}4 \text{ m.}}$$

2. Alice met 48 minutes à dessiner et découper les 30 disques alors que son collègue Bertrand met 1 heure et 12 minutes à effectuer cette tâche.

   (a) Donner le temps moyen que met Alice pour découper un disque (en minutes et secondes).

   Déterminons le temps moyen t_A mis par Alice.

$$\begin{aligned}
t_A &= \frac{48 \text{ min}}{30} \\
&= \frac{30+18}{30} \text{ min} \\
&= 1\text{min} + \frac{18 \times 2}{30 \times 2} \text{ min} \\
&= 1 \text{ min} + 18 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\
&= 1 \text{ min} + 18 \text{ s}
\end{aligned}$$

$$\boxed{t_A = 1 \text{ min} + 18 \text{ s}.}$$

(b) Combien de temps mettront-ils pour découper les 30 disques ensemble ? Donner le résultat en minute et seconde.

Notons n le nombre de disque découpé par Alice s'ils se partagent le travail.

Déterminons n.

On a $t_A = 1{,}6$ min.
Le temps moyen de fabrication pour Bertrand est : $t_B = \frac{1 \text{ h}+12 \text{ min}}{30} = 2{,}4$ min
Donc on doit avoir dans l'idéal un temps de travail égal pour les deux :

$$\begin{aligned}
n \times t_A &= (30-n) \times t_B \\
n \times 1{,}6 &= (30-n) \times 2{,}4 \\
1{,}6n + 2{,}4n &= 30 \times 2{,}4 \\
4n &= 7{,}2 \\
n &= \frac{72}{4} \\
n &= 18
\end{aligned}$$

Donc le temps mis est :

$$\begin{aligned}
18t_A &= 18 \times 1{,}6 \text{ min} \\
&= 28{,}8 \text{ min} \\
&= 28 \text{ min} + 0{,}8 \times 60 \text{ s}
\end{aligned}$$

Il faudra 28 min et 48 s.

Exercice 4.

Soit M un nombre entier naturel inférieur à 100. On note u le chiffre des unités du nombre M et d son chiffre des dizaines.

Soit N un nombre entier naturel inférieur à 100, ayant le même chiffre d des dizaines que M et tel que son chiffre v des unités vérifie $u + v = 10$.

Par exemple, pour $M = 34$, alors $N = 36$ vérifie ces conditions.

Pour M et N vérifiant les conditions ci-dessus, on propose d'utiliser l'algorithme ci-dessous pour calculer le produit $M \times N$.

Algorithme de calcul.

- On calcule le produit de d et de l'entier suivant $d + 1$.
- On calcule le produit de u et de v.
- On ajoute au produit de u et de v, 100 fois le produit de d et de l'entier suivant $d + 1$.
- La somme obtenue est le produit $M \times N$.

1. Vérifier en détaillant les calculs que cet algorithme fonctionne pour 34×36.

Effectuons les trois étapes de l'algorithme.

1	$d \times (d+1) = 3 \times (3+1) = 12.$
2	$u \times v = 4 \times 6 = 24.$
3	$u \times v + 100 \times d(d+1) = 24 + 100 \times 12 = 1224.$

Or effectivement $34 \times 36 = 1224$ donc

l'algorithme fonctionne pour 34×36.

2. Démontrer que cet algorithme de calcul donne effectivement le résultat escompté pour tous les couples de nombres M et N vérifiant les conditions mentionnées en début d'exercice. On pourra utiliser les égalités $M = 10d + u$ et $N = 10d + v$.

Démontrons que $M \times N = u \times v + 100 \times d(d+1)$.

$$\begin{aligned} M \times N &= (10d+u)\times(10d+v)\\ &= 10d\times 10d + 10d\times v + u\times 10d + u\times v\\ &= 100d^2 + 10d(v+u) + u\times v\\ &= 100d^2 + 10d\times 10 + u\times v\\ &= 100d\times d + 100d\times 1 + u\times v\\ &= 100d\times(d+1) + u\times v \end{aligned}$$

L'algorithme fonctionne bien.

3. Montrer comment on peut utiliser cet algorithme de calcul, en détaillant les calculs, pour calculer mentalement $4{,}2\times 4{,}8$.

Effectuons les trois étapes de l'algorithme.

1	$d\times(d+1) = 4\times(4+1) = 20$.
2	$u\times v = 2\times 8 = 16$.
3	$0{,}01\times u\times v + d(d+1) = 0{,}01\times 16 + 20 = 20{,}16$.

Or effectivement $34\times 36 = 1224$ donc

l'algorithme fonctionne pour 34×36.

Exercice 5.

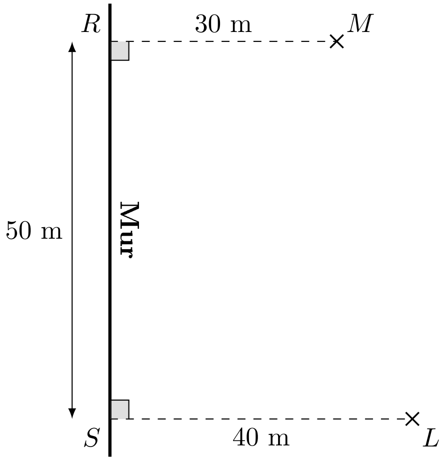
On propose un jeu dans une cour de récréation.

Pour cela on s'appuie sur des croix peintes au sol comme indiquée sur le schéma ci-dessous :

— la croix M est située à 30 m du mur d'enceinte de l'école ($MR = 30$ m) ;

— la croix L est située à 40 m du mur d'enceinte de l'école ($LS = 40$ m) ;

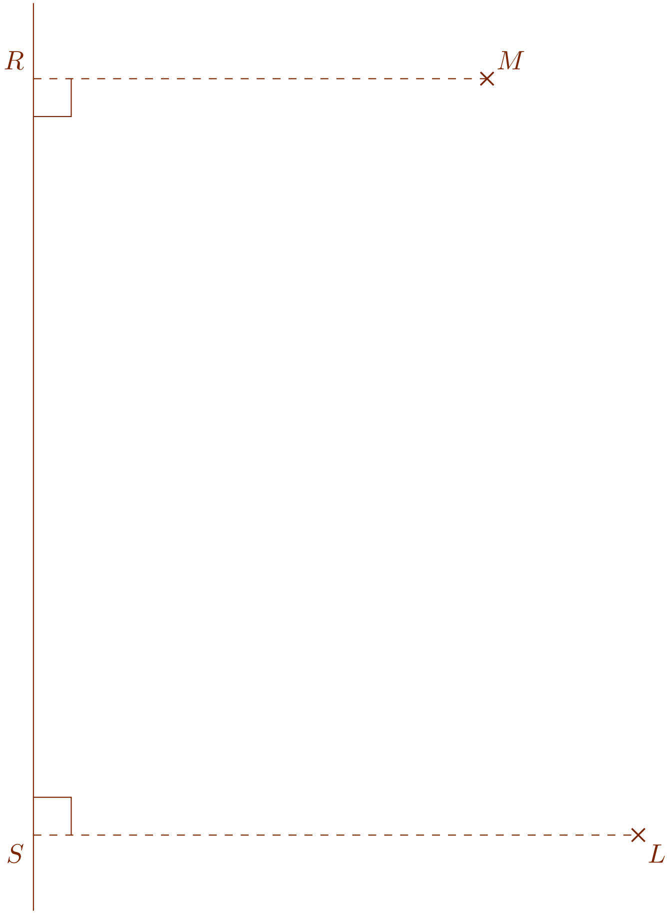
— les points R et S sont distants de 50 m ($RS = 50$ m).



Mila, une élève, se trouve sur la croix M et Lucien, un autre élève, se trouve sur la croix L. L'enseignante souhaite que Mila et Lucien courent tous les deux vers un même point de contact au mur ; le gagnant sera le premier à toucher ce point sur le mur. Pour que l'épreuve soit équitable, l'enseignante souhaite que le point de contact soit à égale distance des positions initiales des deux élèves, c'est-à-dire des croix L et M.

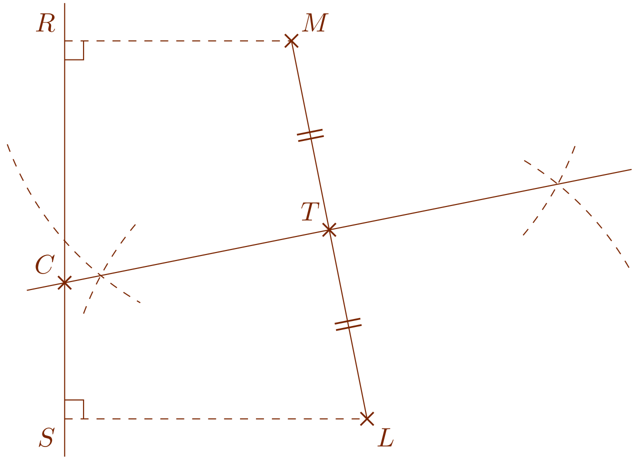
1. Construire à l'échelle le plan de la cour avec les points M, L, R et S en choisissant comme échelle 1 cm pour 5 m.

Longueur réelle	30 m	40 m	50 m
Longueur à l'échelle	6 cm	8 cm	10 cm



2. (a) Sur la figure, construire le point T, milieu du segment $[ML]$. Tracer la droite perpendiculaire à (ML) et passant par T. On note C le point d'intersection de cette droite avec le mur.

La droite à tracer est la médiatrice de $[ML]$. Tracé à la règle et au compas. La figure suivante est à l'échelle $1/2$ par rapport à celle demandée.



(b) Justifier que le point C est le point de contact cherché.

La droite (CT) est la médiatrice de $[ML]$ puisqu'elle passe par le milieu du segment et est perpendiculaire à ce segment.
Or les points de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment. En particulier C est équidistant de M et de L.
Comme de plus c'est un point de $[RS]$:

C est le point de contact recherché.

(c) Mesurer la longueur RC sur le plan et en déduire une estimation de la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.

Sur la figure à l'échelle

la distance entre R et C mesure 3,2 cm.

Par proportionnalité :

1 cm	5 m
6,4 cm	$6{,}4 \times 5$ m = 32 m

La distance entre les points R et C dans la cours de récréation est approximativement de 16 m.

3. On note x la distance, exprimée en mètre, entre les points R et C dans la cour de récréation.

   (a) Déterminer les longueurs MC et CL en fonction de x.

   * Exprimons MC en fonction de x.

     RMC est rectangle en R donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

     $$CR^2 + RM^2 = MC^2.$$

     Nous en déduisons successivement :

     $$MC^2 = x^2 + 30^2$$
     $$MC^2 = x^2 + 900$$

     Puisque MC est une longueur c'est un nombre positif et donc :

     $$\boxed{MC = \sqrt{x^2 + 900}.}$$

   * Exprimons CL en fonction de x.

     CSL est rectangle en S donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

     $$CS^2 + SL^2 = CL^2.$$

     Nous en déduisons successivement :

     $$CL^2 = (50 - x)^2 + 40^2$$
     $$CL^2 = (50 - x)^2 + 1600$$

     Puisque CL est une longueur c'est un nombre positif et donc :

     $$\boxed{CL = \sqrt{(50 - x)^2 + 1600}.}$$

   (b) En déduire la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.

* Analyse.
  Supposons que nous ayons trouvé C.
  On a donc :

$$MC = CL$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+900} &= \sqrt{(50-x)^2+1600} \\
x^2+900 &= (50-x)^2+1600 \\
x^2+900 &= \left(50^2-2\times 50\times x+x^2\right)+1600 \\
x^2+900 &= x^2-100x+2500+1600 \\
x^2+900-x^2 &= x^2-100x+4100-x^2 \\
900 &= -100x+4100 \\
900-4100 &= 100x+4100-4100 \\
-3200 &= -100x \\
\frac{-3200}{-100} &= \frac{-100x}{-100} \\
32 &= x
\end{aligned}$$

* Synthèse.
  $0 \leqslant 32 \leqslant 50$ et si $x = 32$ alors on a bien $LC = LM$.