# Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 0.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Il est donc supposé y avoir six exercices mais le sujet n'en comportait que cinq.

## Exercice 1.

1. Modélisation : notons $\Omega_1$ l'ensemble des 6 faces du dé (en les distinguant toutes). L'univers est muni de la loi d'équiprobabilité, $\mathbb{P}_1$, puisque les dés sont équilibrés.
   Notons $E$ l'événement « obtenir un 3 ».

   Calculons $\mathbb{P}_1(E)$.

   $\Omega_1$ est muni de l'équiprobabilité, $E$ est réalisé par 2 issues et $\Omega_1$ contient 6 issues donc :

$$\mathbb{P}_1(E) = \frac{2}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_1(E) = \frac{1}{3}.}$$

2. (a) Afin de nous ramener à l'équiprobabilité, et donc à un travail de dénombrement, nous allons modéliser en distinguant toutes les faces des dés. Par exemple les deux faces 3 du dé vert seront distinguées.
   Notons $\Omega_2$ l'univers formé des 36 couples de faces des deux dés qu'il est possible d'obtenir et munissons-le de l'équiprobabilité $\mathbb{P}_2$.
   Schématisons l'expérience aléatoire par un tableau double entrée en indiquant ce qui nous intéresse à savoir les sommes en fonction des différentes faces.

| dé vert / dé bleu | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |

Si on note $X$ variable aléatoire qui à chaque lancer des deux dés associe la somme des nombres affichés vérifie donc : $X \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Les sommes possibles sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

(b) Notons $P$ l'événement « passer son tour ».

Calculons $\mathbb{P}_2(P)$.

$\Omega_2$ est muni de l'équiprobabilité, $P$ est réalisé par 1 issue et l'univers, $\Omega_2$, contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(P) = \frac{1}{36}$$

(c) Notons $F$ l'événement « avancer de trois cases ».

Calculons $\mathbb{P}_2(F)$.

| dé bleu \ dé vert | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |

$\Omega_2$ est muni de l'équiprobabilité, d'après le tableau $F$ est réalisé par 8 issues et l'univers, $\Omega_2$, contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{9}{36}$$

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{4}$$

(d) En procédant comme à la question précédente nous obtenons :

| Somme | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{4}{36}$ |

(e) Notons $G$ l'événement « le résultat du vert est strictement supérieur à celui du dé bleu ».

Calculons $\mathbb{P}_2(G)$.

Utilisons le tableau pour dénombrer les issues qui nous intéressent même si les sommes ne servent à rien.

| dé bleu \ dé vert | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |

$\Omega_2$ est muni de l'équiprobabilité, d'après le tableau $G$ est réalisé par 12 issues et l'univers, $\Omega_2$, contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{12}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{3}}$$

3. Notons $H$ l'événement « obtenir 4 au premier tour » et $K$ l'événement « arriver sur la case 10 au deuxième tour ».

Calculons $\mathbb{P}_K(H)$ la probabilité que l'élève s'arrête sur la case 4 sachant qu'il est arrivé sur la case 10 au deuxième tour.

Avec les probabilités conditionnelles tout ce passe comme si l'univers était modifié.

Puisque l'élève est arrivé sur la case 10 il a forcément obtenu un nombre strictement supérieur à 3.

Donc l'univers n'est plus $\Omega_2$ mais pas l'univers $\Omega_3$ regroupant les issues correspondant aux cases colorées ci-dessous.

| dé vert / dé bleu | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |

Les issues ayant toutes la même chance d'être obtenues nous munissons $\Omega_3$ de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$. Ainsi $\Omega_3$ contient 18 issues.
De plus il y a 8 issues correspondant l'obtention d'un 4 donc

$$\mathbb{P}_K(H) = \frac{8}{18}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_K(H) = \tfrac{4}{9}.}$$

## Exercice 2.

1. (a) Montrons que 0,127 est un nombre décimal.

$$0{,}127 = \frac{127}{1000} = \frac{127}{10^3}.$$

Donc 0,127 peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a = 127$ qui est un entier et $n = 3$ un nombre entier positif.

$$\boxed{0{,}127 \text{ est un nombre décimal.}}$$

(b) Montrons que $\dfrac{1}{4}$ est décimal.

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = \frac{25}{10^2}.$$

Comme $a = 25 \in \mathbb{Z}$ et $n = 2 \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{\tfrac{1}{4} \in \mathbb{D}.}$$

2. * La proposition de l'élève A ne convient pas car $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ est un nombre avec une virgule mais ce n'est pas un nombre décimal.
   * La proposition de l'élève B ne convient pas car 0,127 est un nombre décimal mais il ne peut pas s'écrire comme une fraction avec 10 ou 100 au dénominateur.
   * La proposition de l'élève C ne convient pas car les nombres entiers sont des décimaux, par exemple, $3 = \frac{30}{10^1}$.

3. * $2{,}48 = \frac{248}{10^2}$. Donc

   $$\boxed{2{,}48 \in \mathbb{D}.}$$

   * $\frac{7}{25} = \frac{28}{10^2}$. Donc

   $$\boxed{\frac{7}{25} \in \mathbb{D}.}$$

   * $12 = \frac{12}{10^0}$. Donc

   $$\boxed{12 \in \mathbb{D}.}$$

   * $\frac{7}{9} = 0{,}777\ldots$. Donc

   $$\boxed{\frac{7}{9} \notin \mathbb{D}.}$$

   * $\frac{49}{14} = \frac{7}{2} = \frac{35}{10} = \frac{35}{10^1}$. Donc

   $$\boxed{\frac{49}{14} \in \mathbb{D}.}$$

4. Soient $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} &= \frac{a \times b}{10^n \times 10^m} \\ &= \frac{a \times b}{10^{n+m}}\end{aligned}$$

Comme $a \times b \in \mathbb{Z}$ et $n + m \in \mathbb{N}$, on a $\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} \in \mathbb{D}$.
Finalement

Le produit de deux nombres décimaux est encore un nombre décimal.

5. 1 et 3 sont des nombres décimaux mais $\frac{1}{3} = 0{,}333\cdots \notin \mathbb{D}$.

Le quotient de deux nombres décimaux n'est pas nécessairement décimal.

# Exercice 3.

## Partie A.

1. Calculons l'aire $\mathscr{A}_f$ de la feuille.

   Il s'agit d'un rectangle donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_f &= 120 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}\\ &= 120 \times 80 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_f = 9600 \text{ cm}^2.$$

2. (a) Déterminons le nombre $n_L$ de disque qui entre dans une longueur.

   Chaque disque ayant un rayon de 14 cm et la feuille ayant une longueur de 120 cm il faut que :

$$n_L \times (2 \times 14 \text{ cm}) \leqslant 120 \text{ cm}$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}n_L \times 28 \text{ cm} &\leqslant 120 \text{ cm}\\ \frac{n_L \times 28 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} &\leqslant \frac{120 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} \quad \text{car } 28 > 0\\ n_L &\leqslant \frac{30}{7}\end{aligned}$$

   Or, en tronquant, $\frac{30}{7} \approx 4{,}28$ donc le nombre, entier, de disques entiers qu'il est possible de tracer est au maximum de 4.

(b) Déterminons le nombre maximum de disque qu'il est possible de placer dans une largeur.

En procédant à une division euclidienne (pour changer un peu de ce qui a été fait à la question précédente) :

$$80 = 2 \times 28 + 24$$

Il est donc loisible de placer 2 disques entiers dans le sens de la largeur.

(c) Déterminons le nombre de feuilles nécessaires.

Une feuille contient au maximum 4 disques par lignes et 2 lignes donc $2 \times 4 = 8$ disques.
Puisqu'il faut 30 disques le nombre de feuilles nécessaire s'obtient par division euclidienne :

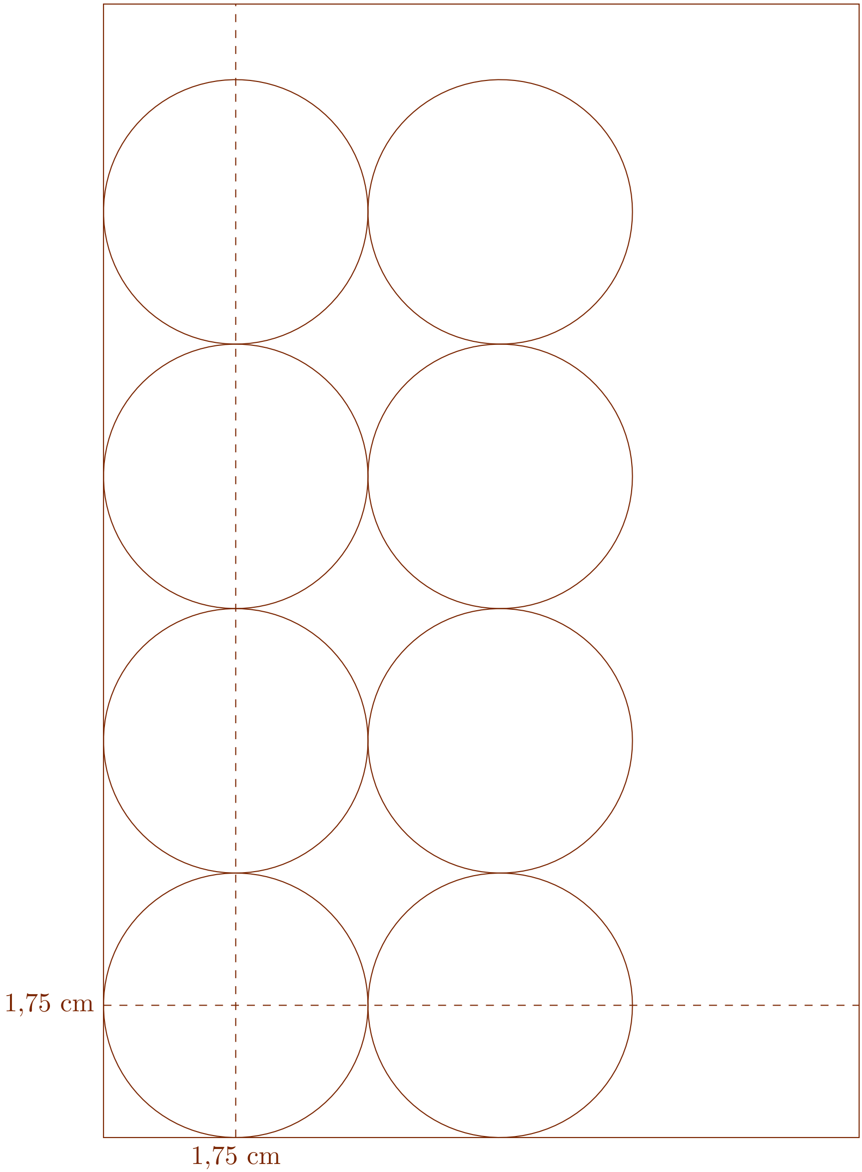
$$30 = 3 \times 8 + 6$$

En utilisant 3 feuilles il manquera encore 6 disques donc :

il faudra 4 feuilles.

3. Puisque l'échelle est 1/8 :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Réel | 14 cm | 120 cm | 80 cm |
| Échelle | 1,75 cm | 15 cm | 10 cm |




4. Calculons l'aire $\mathscr{A}_d$ d'un disque.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_d &= \pi R^2\\ &= \pi \times (14\text{ cm})^2\\ &= \pi \times 14^2\text{ cm}^2\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathscr{A}_d = 196\pi\text{ cm}^2.}$$

En arrondissant au centimètre carré :

$$\boxed{\mathscr{A}_d \approx 616\text{ cm}^2.}$$

5. (a) * D'après les questions A.1 et A.4 l'aire de la feuille en ôtant les huit disques est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_c &\approx 9600\text{ cm}^2 - 8 \times 616\text{ cm}^3\\ &\approx (9600 - 8 \times 616)\text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire des chutes sur une feuille est } \mathscr{A}_c \approx 4672\text{ cm}^2.}$$

* Déterminons la proportion $p$ des chutes pour une feuille.

$$\begin{aligned}p &= \frac{4672\text{ cm}^2}{9600\text{ cm}^2}\\ &= \frac{4672}{9600}\\ &= \frac{73}{150}\\ &\approx 0{,}48666 \quad \text{en tronquant}\end{aligned}$$

> 49 % de chaque feuille utilisée pour faire 8 disques est constituée de chutes.

(b) Calculons l'aire $\mathscr{A}_{30}$ de papier non utilisé pour faire 30 disques.

Sur trois des quatre feuilles l'aire de la chute est $\mathscr{A}_c$ mais sur la quatrième il n'y a que 6 disques donc la chute est :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_r &= \approx 9600 \text{ cm}^2 - 6 \times 616 \text{ cm}^3 \\ &\approx (9600 - 6 \times 616) \text{ cm}^2 \\ &\approx 5904 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Ainsi les chutes représentent :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{30} &\approx 3 \times \mathscr{A}_c + \\ &\approx 3 \times 4672 \text{ cm}^2 + 5904 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_{30} \approx 19920 \text{ cm}^3.}$$

6. Le format Grand Aigle peut accueillir exactement le même nombre de disque et avec la même disposition que le format Grand Monde. Cependant ce dernier est d'une superficie plus réduite ce qui minimise les déchets :

   > le format Grand Aigle permet d'obtenir moins de chutes.

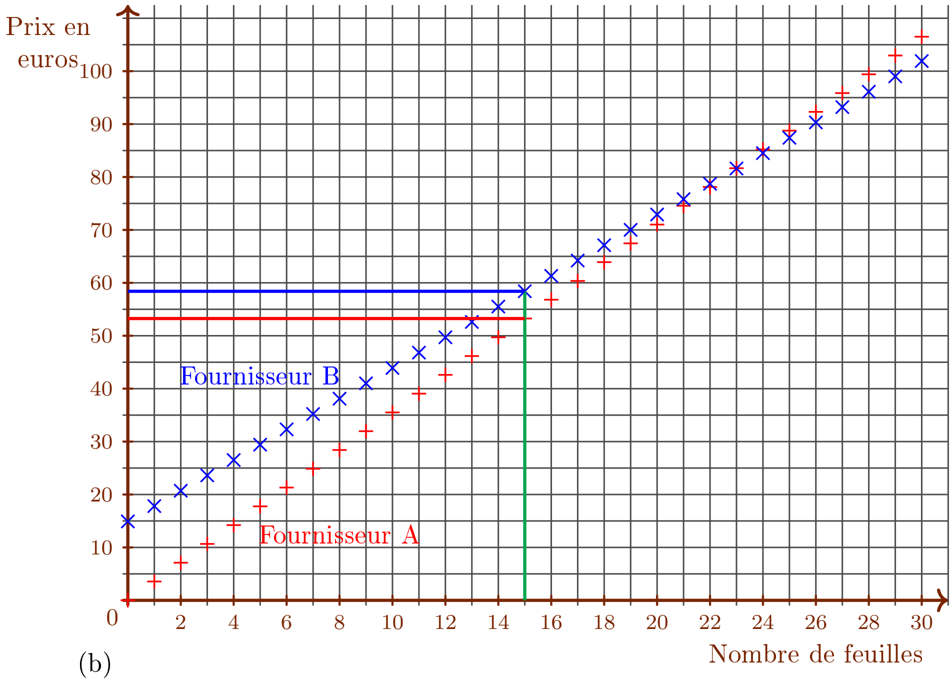
**Partie B.**

1. $\boxed{= 616 * \texttt{A1}.}$

2. > Pour 325 disques il faut choisir le format Jésus.

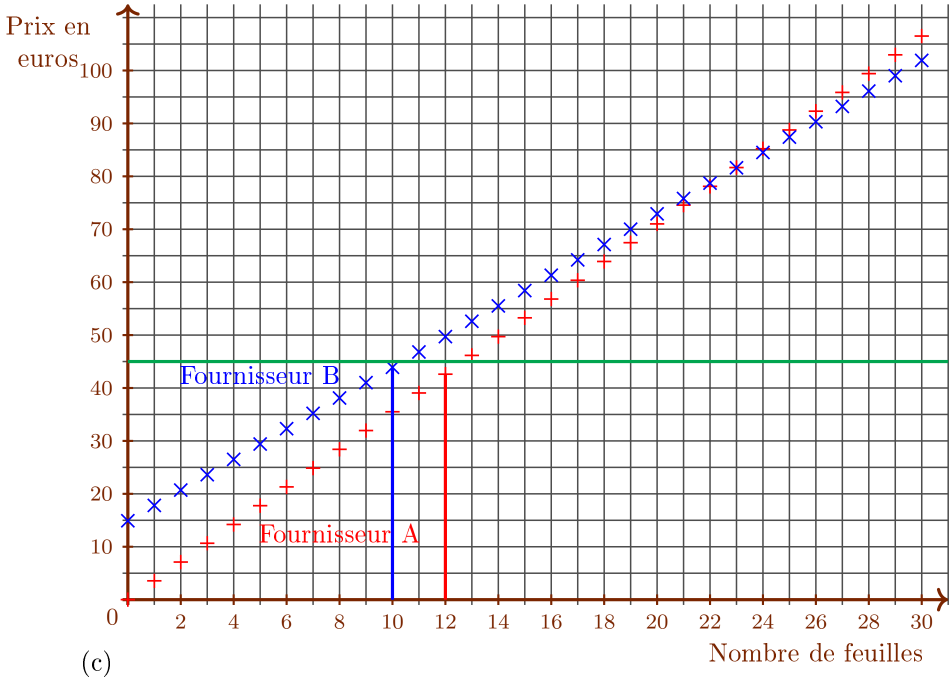
3. (a) Les deux séries de points sont alignés. Les deux droites correspondant sont les courbes représentatives de deux fonction affines. Or une fonction affine représente une situation de proportionnalité si elle est linéaire et elle est linéaire si sa courbe représentative passe par l'origine du repère.

Le coût est proportionnel chez le fournisseur A.



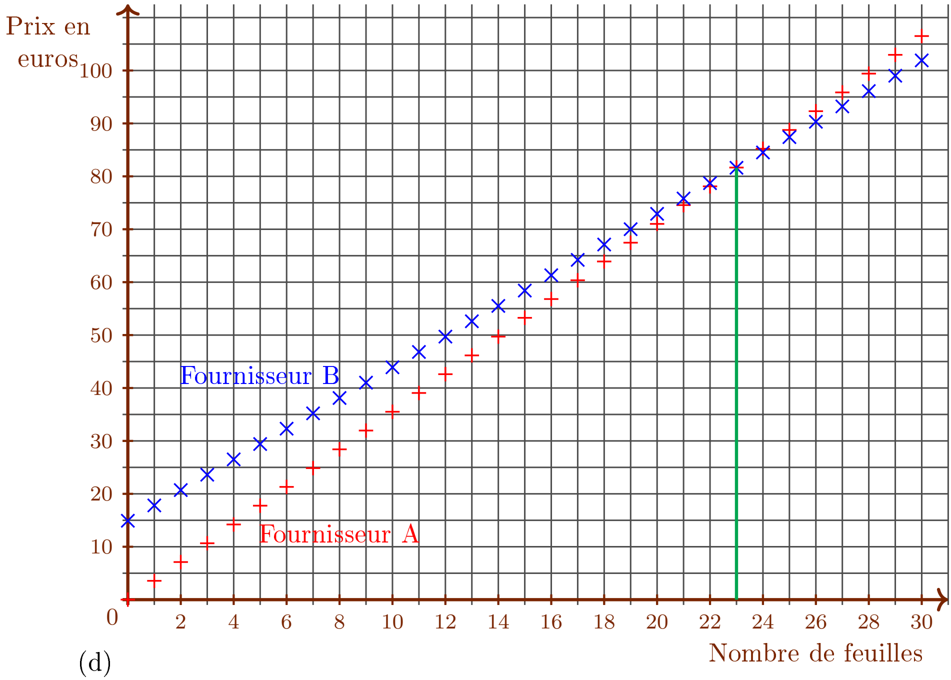

(b)

15 feuilles coûtent 53 € chez le fournisseur A et 58 € chez le fournisseur B.




(c)

Avec 45 euro il est possible d'acheter 12 feuilles chez le fournisseur A et 10 chez le fournisseur B.




(d)

Le fournisseur B devient avantageux à partir de 23 feuilles commandées.

4. (a) Déterminons le coût de 15 feuilles, $u_A(15)$ et $u_B(15)$ chez les deux fournisseurs.

*

$$u_A(15) = 15 \times 3{,}55$$

$$u_A(15) = 53{,}25 \text{ €}.$$

*

$$u_B(15) = 2{,}90 \times 15 + 14{,}90$$

$$u_B(15) = 58{,}40 \text{ €}.$$

(b) * Résolvons $u_A(x) = 312$.

$$\begin{aligned} u_A(x) &= 312 \\ 3{,}55x &= 312 \\ \frac{3{,}55x}{3{,}55} &= \frac{312}{3{,}55} \end{aligned}$$

Donc :

$$x \approx 87{,}88$$

Avec 312 € il est possible d'acheter 87 feuilles chez le fournisseur A.

* Résolvons $u_B(x) = 312$.

$$\begin{aligned} u_B(x) &= 312 \\ 2{,}90x + 14{,}90 &= 312 \\ 2{,}90x + 14{,}90 - 14{,}90 &= 312 - 14{,}90 \\ 2{,}90x &= 297{,}1 \\ \frac{2{,}90x}{2{,}90} &= \frac{297{,}1}{2{,}90} \end{aligned}$$

Donc :

$$x \approx 102{,}44$$

Avec 312 € il est possible d'acheter 102 feuilles chez le fournisseur B.

(c) Dire que le fournisseur B est plus avantageux c'est dire que : $u_A(x) \geqslant u_B(x)$.

Résolvons l'inéquation $u_A(x) \geqslant u_B(x)$.

$$\begin{aligned}
3{,}55x &\geqslant 2{,}9x + 14{,}9 \\
3{,}55x - 2{,}9x &\geqslant 2{,}9x + 14{,}9 - 2{,}9x \\
0{,}65x &\geqslant 14{,}9 \\
\frac{0{,}65x}{0{,}65} &\geqslant \frac{14{,}9}{0{,}65}, \text{ car } 0{,}65 > 0
\end{aligned}$$

Or $\frac{14{,}9}{0{,}65} \approx 22{,}92$ donc

le fournisseur $B$ est plus avantageux à partir de 23 feuilles commandées.

(d) $325 = 8 \times 40 + 5$, il faut donc acheter 41 feuilles.
D'après la question précédente

il faut choisir le fournisseur B.

$2{,}9 \times 41 + 14{,}9 = 133{,}8$ donc

la commande coûtera 133,80 €.

## Partie C.

1. Calculons la longueur $\ell$ de fil.

   Le périmètre d'un disque est :

$$\begin{aligned}
p_d &= 2\pi R \\
&= 2\pi \times 14 \text{ cm} \\
&= 28\pi \text{ cm}
\end{aligned}$$

   Donc, pour les 30 disques :

$$\begin{aligned}\ell &= 30 \times p_d \\ &= 30 \times 28\pi \text{ cm} \\ &= 840\pi \text{ cm} \\ &= 840\pi \times \frac{1}{100} \text{ m} \\ &= 8{,}4\pi \text{ m} \\ &\approx 26{,}389 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\ell \approx 26{,}4 \text{ m.}}$$

2. (a) Déterminons le temps moyen $t_A$ mis par Alice.

$$\begin{aligned}t_A &= \frac{48 \text{ min}}{30} \\ &= \frac{30+18}{30} \text{ min} \\ &= 1\text{min} + \frac{18 \times 2}{30 \times 2} \text{ min} \\ &= 1 \text{ min} + 18 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\ &= 1 \text{ min} + 18 \text{ s}\end{aligned}$$

$$\boxed{t_A = 1 \text{ min} + 18 \text{ s.}}$$

(b) Notons $n$ le nombre de disque découpé par Alice s'ils se partagent le travail.

Déterminons $n$.

On a $t_A = 1{,}6$ min.
Le temps moyen de fabrication pour Bertrand est : $t_B = \frac{1 \text{ h+12 min}}{30} =$ 2,4 min
Donc on doit avoir dans l'idéal un temps de travail égal pour les deux :

$$\begin{aligned}
n \times t_A &= (30 - n) \times t_B \\
n \times 1{,}6 &= (30 - n) \times 2{,}4 \\
1{,}6n + 2{,}4n &= 30 \times 2{,}4 \\
4n &= 7{,}2 \\
n &= \frac{72}{4} \\
n &= 18
\end{aligned}$$

Donc le temps mis est :

$$\begin{aligned}
18t_A &= 18 \times 1{,}6 \text{ min} \\
&= 28{,}8 \text{ min} \\
&= 28 \text{ min} + 0{,}8 \times 60 \text{ s}
\end{aligned}$$

Il faudra 28 min et 48 s.

## Exercice 4.

1. Effectuons les trois étapes de l'algorithme.

| | |
|---|---|
| 1 | $d \times (d+1) = 3 \times (3+1) = 12.$ |
| 2 | $u \times v = 4 \times 6 = 24.$ |
| 3 | $u \times v + 100 \times d(d+1) = 24 + 100 \times 12 = 1224.$ |

Or effectivement $34 \times 36 = 1224$ donc

l'algorithme fonctionne pour $34 \times 36$.

2. Démontrons que $M \times N = u \times v + 100 \times d(d+1)$.

$$\begin{aligned} M \times N &= (10d+u)\times(10d+v) \\ &= 10d\times 10d + 10d\times v + u\times 10d + u\times v \\ &= 100d^2 + 10d(v+u) + u\times v \\ &= 100d^2 + 10d\times 10 + u\times v \\ &= 100d\times d + 100d\times 1 + u\times v \\ &= 100d\times(d+1) + u\times v \end{aligned}$$

L'algorithme fonctionne bien.

3. Effectuons les trois étapes de l'algorithme.

| | |
|---|---|
| 1 | $d\times(d+1) = 4\times(4+1) = 20.$ |
| 2 | $u\times v = 2\times 8 = 16.$ |
| 3 | $0{,}01\times u\times v + d(d+1) = 0{,}01\times 16 + 20 = 20{,}16.$ |

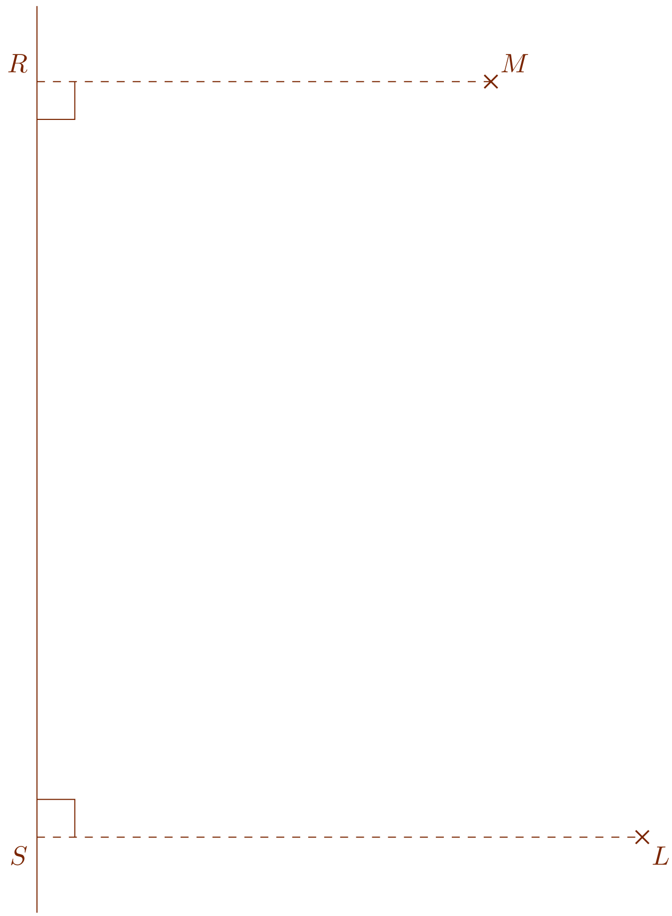
Or effectivement $34\times 36 = 1224$ donc

l'algorithme fonctionne pour $34\times 36$.

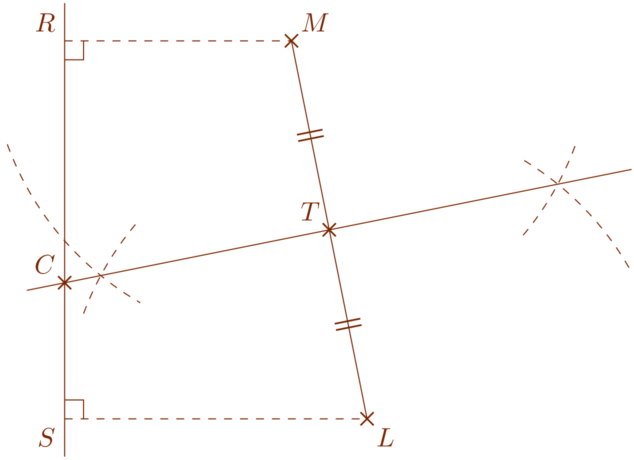
## Exercice 5.

1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Longueur réelle | 30 m | 40 m | 50 m |
| Longueur à l'échelle | 6 cm | 8 cm | 10 cm |




2. (a) La droite à tracer est la médiatrice de $[ML]$. Tracé à la règle et au compas. La figure suivante est à l'échelle $1/2$ par rapport à celle demandée.




(b) La droite $(CT)$ est la médiatrice de $[ML]$ puisqu'elle passe par le milieu du segment et est perpendiculaire à ce segment.
Or les points de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment. En particulier $C$ est équidistant de $M$ et de $L$.
Comme de plus c'est un point de $[RS]$ :

$C$ est le point de contact recherché.

(c) Sur la figure à l'échelle

la distance entre $R$ et $C$ mesure 3,2 cm.

Par proportionnalité :

| | |
|---|---|
| 1 cm | 5 m |
| 6,4 cm | $6{,}4 \times 5$ m = 32 m |

La distance entre les points $R$ et $C$ dans la cours de récréation est approximativement de 16 m.

3. (a) * Exprimons $MC$ en fonction de $x$.

$RMC$ est rectangle en $R$ donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$CR^2 + RM^2 = MC^2.$$

Nous en déduisons successivement :

$$MC^2 = x^2 + 30^2$$
$$MC^2 = x^2 + 900$$

Puisque $MC$ est une longueur c'est un nombre positif et donc :

$$\boxed{MC = \sqrt{x^2 + 900}.}$$

* Exprimons $CL$ en fonction de $x$.

$CSL$ est rectangle en $S$ donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$CS^2 + SL^2 = CL^2.$$

Nous en déduisons successivement :

$$CL^2 = (50 - x)^2 + 40^2$$
$$CL^2 = (50 - x)^2 + 1600$$

Puisque $CL$ est une longueur c'est un nombre positif et donc :

$$\boxed{CL = \sqrt{(50 - x)^2 + 1600}.}$$

(b) * Analyse.
Supposons que nous ayons trouvé $C$.
On a donc :

$$MC = CL$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+900} &= \sqrt{(50-x)^2+1600}\\
x^2+900 &= (50-x)^2+1600\\
x^2+900 &= \left(50^2-2\times 50\times x+x^2\right)+1600\\
x^2+900 &= x^2-100x+2500+1600\\
x^2+900-x^2 &= x^2-100x+4100-x^2\\
900 &= -100x+4100\\
900-4100 &= 100x+4100-4100\\
-3200 &= -100x\\
\frac{-3200}{-100} &= \frac{-100x}{-100}\\
32 &= x
\end{aligned}$$

* Synthèse.
  $0 \leqslant 32 \leqslant 50$ et si $x = 32$ alors on a bien $LC = LM$.

# Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 1.

Lien vers le sujet seul : pdf.

## Exercice 1.

### Partie 1.

1. (a) Exprimons la vitesse $v_1$ de cet élève en m/min.

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{d}{t}\\
&= \frac{4\times 250 \text{ m}}{10 \text{ min}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v_1 = 100 \text{ m/min.}}$$

(b) Exprimons la vitesse $v_2$ de cet élève en km/h.

$$\begin{aligned} v_2 &= 150 \text{ m/s} \\ &= 150 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 150 \ \frac{\frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{60} \text{ h}} \\ &= 150 \times \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{60}} \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= \frac{150 \times 60}{1000} \text{ km/h} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_2 = 9 \text{ km/h.}}$$

2. * Exprimons la vitesse $v_3$ de l'élève de CM1 en m/min.

$$\begin{aligned} 9 \text{ min} + 30 \text{ s} &= 9 \text{ min} + 30 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\ &= 9{,}5 \text{ min} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{4 \times 400 \text{ m}}{9{,}5 \text{ min}} \\ &= \frac{4 \times 400}{9{,}5} \ \frac{\text{m}}{\text{min}} \\ &\approx 168{,}421 \text{ m/min en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_3 \approx 168 \text{ m/min.}}$$

* Exprimons la vitesse $v_4$ de l'élève de CM2 en m/min.

$$\begin{aligned} 11 \text{ min} + 8 \text{ s} &= 11 \text{ min} + 8 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\ &= \frac{167}{15} \text{ min} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_4 &= \frac{4 \times 500 \text{ m}}{\frac{167}{15} \text{ min}} \\ &= \frac{2000}{\frac{167}{15}} \frac{\text{m}}{\text{min}} \\ &\approx 179{,}6407 \text{ m/min en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_5 \approx 180 \text{ m/min.}}$$

## Partie 2.

1. (a) Déterminons le rayon $r_p$ du cercle de pénalité.

   On a donc en exprimant toutes les données en mètre : $2\pi r_p = 20$. Cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \frac{1\pi r_p}{2\pi} &= \frac{20}{2\pi} \\ r_p &= \frac{10}{\pi} \end{aligned}$$

   Donc en tronquant :

$$r_p \approx 3{,}183$$

$$\boxed{r_p \approx 3{,}18 \text{ m.}}$$

   (b) * Le temps mis pour faire un grand tour est

$$\begin{aligned} t_g &= \frac{250 \text{ m}}{150 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{250}{150} \frac{\text{m}}{\text{m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{5}{3} \text{ min} \end{aligned}$$

* Donc pour faire les quatre grands tours il lui faudra $t_{4g} = 4 \times \frac{5}{3}$ min = $\frac{20}{3}$ min.
* Les trois séries de trois lancers lui prendrons un temps de $t_{3l} = 3 \times 30$ s = 90 s = $90 \times \frac{1}{60}$ min = 1,5 min.
* Le temps mis pour faire un tour de pénalité est :

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{20 \text{ m}}{150 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{2}{15} \text{ min} \end{aligned}$$

* Le temps mis pour faire tous les tours de pénalité est :

$$\begin{aligned} t_{3p} &= (1+2) \times t_p \\ &= 3 \times \frac{2}{15} \text{ min} \\ &= 0{,}4 \text{ min} \end{aligned}$$

Le temps de parcours total est donc de

$$\begin{aligned} t_{total} &= t_{4g} + t_{3l} + t_{3p} \\ &= \frac{20}{3} \text{ min} + 1{,}5 \text{ min} + 0{,}4 \text{ min} \\ &= \frac{257}{30} \text{ min} \\ &= \frac{514}{60} \text{ min} \end{aligned}$$

Or $514 = 8 \times 60 + 34$ donc :

$$t_{total} = 8 \text{ min} + 34 \text{ s}$$

Le parcours est réalisé en 8 min et 34 s.

2. (a) `C3 + E3 + G3` est le nombre de tours de pénalités donc

(`C3 + E3 + G3`) ∗ 20 est la distance supplémentaire courue du fait des pénalités.

(b) Il s'agit de calculer la vitesse moyenne sans tenir compte des temps de tirs donc, le résultat étant attendu en m/min :

> `= H3/(I3/60)`

(c) Nous avons déjà remarqué qu'il faut 90 s pour lancer les neufs balles. La durée totale en minutes est donc donnée par :

> `= (I3 + B3 + D3 + F3)/60.`

(d)

> Entre les essais 2 et 3 l'élève a augmenté sa vitesse de lancer des balles.

(e) La durée totale a augmentée entre les essais 2 et 3.

> Pour effectuer un parcours plus rapidement il vaut mieux prendre le temps de bien viser les cibles et d'éviter les tours de pénalité.

## Exercice 2.

1. (a) Représentons l'ensemble des issues de cette expérience par un tableau (puisqu'il y a deux épreuves).

| 1 \ 0,1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 1,0 | 2,0 |
| 1 | 0,1 | 1,1 | 2,1 |
| 2 | 0,2 | 1,2 | 2,2 |

> L'ensemble des nombres possibles est
> $\{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 2;\ 2{,}1;\ 2{,}2\}$.

(b) L'univers est l'ensemble $\Omega$ des nombres possibles précédemment indiqué. Il est raisonnable d'après les indications de l'énoncé (dé non truqué) de modéliser cette situation par une équiprobabilité.

Par conséquent toutes les issues, y compris 1,2 , ont la même probabilité d'être obtenues.
D'après la question précédente l'univers comporte 9 issues donc

$$\boxed{\mathbb{P}(1{,}2) = \frac{1}{9}.}$$

(c) Notons $C$ « obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

$C = \{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2\}$.
Il y a équiprobabilité, $C$ est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 9 donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}.}$$

(d) Notons $D$ « obtenir un nombre entier ».

Calculons $\mathbb{P}(D)$.

$D = \{0;\ 1;\ 2\}$.
Il y a équiprobabilité, $D$ est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 9 donc

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = \frac{1}{3}.}$$

(e) Notons $E$ « obtenir un nombre décimal ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

Tous les nombres obtenus sont décimaux donc $E$ est l'événement certain :

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = 1.}$$

2.

(a) Puisque $\mathbb{P}(Z_2)$ est proportionnelle à l'aire de $Z_2$ qui est constituée de 12 carrés sur un total de 36 :

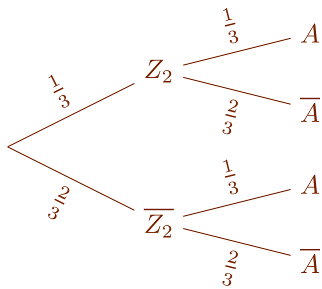
$$\mathbb{P}(Z_2) = \frac{12}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_2) = \frac{1}{3}.}$$

(b) Notons $A$ : « obtenir le nombre 1 ».
Il y a équiprobabilité entre les faces du dé, 2 d'ente elles réalisent $A$ et il y a 6 faces au total donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Calculons $\mathbb{P}(A \cap Z_2)$.

Nous pouvons nous représenter les choses sous forme d'un arbre :




Le principe multiplicatif permet alors de conclure : $\mathbb{P}(A \cap Z_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Plus formellement : il est raisonnable dans ce contexte de considérer que le nombre affiché et la zone du tapis obtenue sont des événements indépendants.
Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap Z_2) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(Z_2)\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap Z_2) = \frac{1}{9}.}$$

(c) Notons $B$ : « obtenir un nombre pair ».
Il y a équiprobabilité entre les faces du dé, 4 d'ente elles réalisent $B$ et il y a 6 faces au total donc : $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

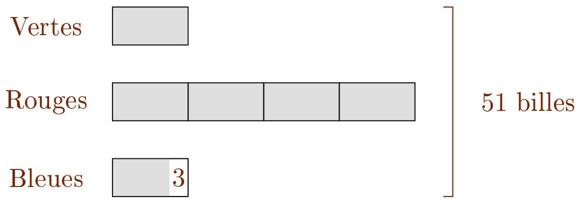
Calculons $\mathbb{P}(B \cap Z_2)$.

$B$ et $Z_2$ sont indépendants donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cap Z_2) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(Z_2)\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B \cap Z_2) = \frac{2}{9}.}$$

## Exercice 3.

1. 


2. (a) Si $r$ est le nombre de billes rouges alors :

$$\boxed{r = 4v.}$$

Si $b$ est le nombre de billes bleues alors

$$\boxed{b = v - 3.}$$

(b) On doit avoir

$$v + b + r = 51.$$

Ce qui revient, d'après la question précédente, à

$$v + v - 3 + 4v = 51.$$

Cette dernière équation du premier degré équivaut successivement à :

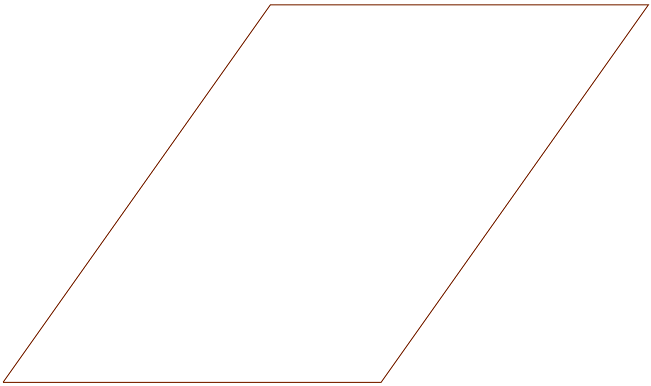
$$\begin{aligned}
6v - 3 &= 51\\
6v - 3 + 3 &= 51 + 3\\
6v &= 54\\
\frac{6v}{6} &= \frac{54}{6}\\
v &= 9
\end{aligned}$$

Donc : $r = 4 \times 9 = 36$,
et : $b = 9 - 3 = 6$.

Il y a 9 billes vertes, 36 rouges et 6 bleues.

## Exercice 4.

Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

1. 

2. Il s'agit de tracer continûment quatre segments : le tracé est une ligne polygonale formée de quatre segments de même longueur.
   La somme des angles des segments les uns par rapport aux autres étant de $45° + 135° + 45° + 135° = 360°$ la ligne polygonale qu'ils forment est fermée.
   Ainsi la figure est un quadrilatère, non croisé (du fait des angles), dont les côtés ont tous la même longueur. Autrement dit :

   la figure tracée est un losange.

3. (a) La figure est formée de 4 losanges donc

$$\boxed{N = 4.}$$

Les 4 losanges, en plus de l'agrandissement (avec $C$ qui augment de 30), se déduisent les uns des autres par une rotation de 45°.

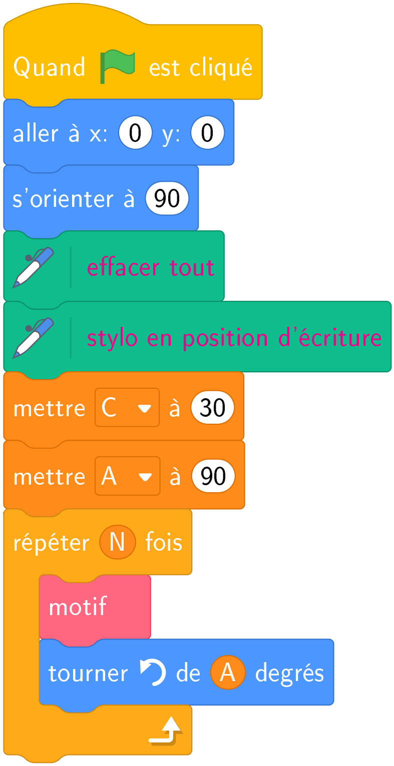
$$\boxed{A = 45.}$$

(b) Dans la boucle qui est répétée $n+4$ fois du programme 2 $C$ est augmenté de 30. Donc à la fin du programme : $C = 30 + 4 \times 30$.

$$\boxed{\text{En fin de programme } C = 150.}$$

4. Voici une modification du programme 2 : lien pour télécharger.

Il faut choisir $A = 90$ car les losanges se déduisent par des rotations successives d'angle 90°.
De plus il faut retirer la ligne de code qui agrandi la longueur $C$ du côté du losange.




## Exercice 5.

1. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_b$ du ballon.

* Le haut du ballon est formé d'une demi-boule dont le volume est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi\,(30\text{ cm})^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi \times 30^3\text{ cm}^3 \\ &= 18\,000\pi\text{ cm}^3\end{aligned}$$

* Le bas du ballon est formé d'un cône de révolution dont le volume est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi\,(30\ \text{cm})^2 \times (90\ \text{cm}) \\ &= \frac{1}{3}\pi 30^2 \times 90\ \text{cm}^2 \cdot \text{cm} \\ &= 27\,000\pi\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_b &= \mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2 \\ &= 18\,000\pi\ \text{cm}^3 + 27\,000\pi\ \text{cm}^3 \\ &= (18\,000 + 27\,000)\pi\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_b = 45\,000\pi\ \text{cm}^3.}$$

(b) Exprimons $\mathscr{V}_b$ en litre.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_b &= 45\,000\pi\ \text{cm}^3 \\ &= 45\,000\pi \times \frac{1}{1000}\ \text{L} \\ &= 45\pi\ \text{L}\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\approx 141{,}371\ \text{L}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_b \approx 141\ \text{L}.}$$

2. Calculons la longueur $SN$ d'une génératrice du cône.

Le cône étant de révolution hauteur, rayon, et génératrice dessinent un triangle $SNO$ rectangle en $O$, donc, d'après le théorème de Pythagore (toutes les longueurs étant exprimées en centimètre) :

$$SN^2 = ON^2 + OS^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} SN^2 &= 30^2 + 90^2 \\ &= 9\,000 \end{aligned}$$

Puisque $SN$ une longueur donc positive :

$$SN = \sqrt{9\,000}$$

Nous avons bien $SN = \sqrt{9\,000}$ cm$^3$.

3. Calculons l'aire $\mathscr{A}_b$ de l'enveloppe du ballon.

* L'aire de la partie demi-sphérique est

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4\pi(30 \text{ cm})^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 30^2 \text{ cm}^2 \\ &= 1\,800\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

* L'aire latérale de la partie conique est

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_2 &= \pi r g \\ &= \pi(30 \text{ cm}) \times (\sqrt{9\,000} \text{ cm}) \\ &= \pi \times 30 \times \sqrt{9\,000} \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 900\sqrt{10}\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_b &= {}_1 + \mathscr{A}_2 \\
&= 1\,800\pi \text{ cm}^2 + 900\sqrt{10}\pi \text{ cm}^2 \\
&= (1\,800 + 900\sqrt{10})\pi \text{ cm}^2 \\
&= 900(2 + \sqrt{10})\pi \times \frac{1}{10000}\text{m}^2
\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{A}_b \approx 1{,}459 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}_b \approx 1{,}5 \text{ m}^2.}$$

4. (a) Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 25 % est

$$\begin{aligned}
CM &= 1 + \frac{t}{100} \\
&= 1 + \frac{25}{100} \\
&= 1{,}25
\end{aligned}$$

> Les longueurs sont multipliées par 1,25.

(b) Si les longueurs sont multipliées par 1,25 alors les aires sont multipliées par $1{,}25^2$. la nouvelle aire de l'enveloppe du ballon est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_B &= 1{,}25^2 \times \mathscr{A}_b \\
&= 1{,}25^2 \times 0{,}09(2 + \sqrt{10})\pi\text{m}^2
\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{A}_B \approx 2{,}280 \text{ m}^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}_B \approx 2{,}3 \text{ m}^2.}$$

(c) Si les longueurs sont multipliées par 1,25 alors les volumes sont multipliés par $1{,}25^3$. le volume du ballon est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_B &= 1{,}25^3 \times \mathscr{V}_b\\ &= 1{,}25^3 \times 45\pi\text{L}\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{V}_B \approx 276{,}11 \text{ L}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_B \approx 276 \text{ L.}}$$

5. Puisque la température est une fonction affine de l'altitude $x$, c'est qu'il existe des nombres $a$ et $b$ tels que : $t(x) = ax + b$.

   * Puisque $t(0) = 15$ :

$$\begin{aligned}a \times 0 + b &= 15\\ b &= 15\end{aligned}$$

   * Puisque $t(4500) = -12$ :

$$\begin{aligned}a \times 4500 + 15 &= -12\\ 4500a + 15 - 15 &= -12 - 15\\ 4500a &= -27\\ \frac{4500a}{4500} &= \frac{-27}{4500}\\ a &= -0{,}006\end{aligned}$$

   Finalement :

$$\boxed{t : x \mapsto -0{,}006x + 15.}$$

6. Nous cherchons pour quelles valeurs de $x$ :

$$t(x) \leqslant 0.$$

Cette inéquation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} -0{,}006x + 15 &\leqslant 0 \\ -0{,}006x + 15 - 15 &\leqslant 0 - 15 \\ -0{,}006x &\leqslant -15 \\ \frac{-0{,}006x}{-0{,}006} &\geqslant \frac{-15}{-0{,}006} \text{ car } -0{,}006 < 0 \\ x &\geqslant 2500 \end{aligned}$$

La température devient négative à partir de 2 500 m.

7. Lorsque la température baisse de 30° elle est de 15° − 30° = −15°. D'après le tableur

la température aura baissé de 30° à 5 000 m.

# Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 2.

Lien vers le sujet seul : pdf.

## Exercice 1.

1. (a) Indiquons toutes les sommes possibles avec ces deux dés sous forme d'un tableau (en distinguant les deux faces 1 et 2 :

| dé 2 / dé 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 |

L'ensemble des sommes possibles est $X(\Omega) = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$.

(b) Notons $E$ : « obtenir une somme de 8 ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

Tous les couples de faces des deux dés (en distinguant les deux faces 1 du premier dé et les deux faces 5 du second).
Il est donc naturel de modéliser avec une équiprobabilité : toutes les cases du précédent tableau ont la même probabilité d'être obtenus.
Ainsi $E$ est réalisé par 4 issues sur un total de 36 donc

$$\mathbb{P}(E) = \frac{4}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \tfrac{1}{9}.}$$

2. (a) Notons $F$ : « obtenir une somme de 6 ».

Calculons $\mathbb{P}(F)$.

Il y a équiprobabilité entre les couples de faces, $F$ est réalisé par 8 issues (couples de faces) sur un total de 36 donc

$$\mathbb{P}(F) = \frac{8}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(F) = \tfrac{4}{9}.}$$

(b) Notons $F_1$ : « obtenir une somme de 6 au premier lancer » et $F_2$ : « obtenir une somme de 6 au second lancer ».

Calculons $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)$.

Il est raisonnable d'estimer que le résultat du second lancer est indépendant de celui du premier donc

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2)$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$$

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \frac{16}{81}.$$

3. (a) En raisonnant comme dans les questions précédentes nous pouvons déterminer les probabilités de toutes les sommes possibles :

| Sommes | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |

Puisque 6 est la somme qui a la plus grande probabilité

Eden a le plus de chance de gagner la partie.

(b) Il est possible que la somme choisir par Axelle soit obtenue 6 fois d'affilée (constitution de la fourmi entière) sans que Eden ne gagne une seule fois.

Eden n'est pas sûr de gagner la partie.

## Exercice 2.

1. Déterminons la longueur $\mathscr{L}_P$ du parcours.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_p &= AB + ABC + CD + DA \\ &= 960 \text{ m} + 1{,}05 \text{ km} + 780 \text{ m} + 660 \text{ m} \\ &= 960 \text{ m} + 1{,}05 \times 1000 \text{ m} + 780 \text{ m} + 660 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}_P = 3\,450 \text{ m}.$$

2. (a) Déterminons la distance totale, $\mathscr{D}_L$, parcourue par Léo.

D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_L &= 2 \times \mathscr{L}_P + \frac{1}{3} \times \mathscr{L}_P \\ &= 2 \times 3\,450 \text{ m} + \frac{1}{3} \times 3\,450 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{D}_L = 8\,050 \text{ m.}}$$

(b) Calculons la vitesse moyenne, $v_L$, de Léo.

$$\begin{aligned}
v_L &= \frac{\mathscr{D}_L}{48 \text{ min}} \\
&= \frac{8050 \text{ m}}{48 \times \frac{1}{60} \text{ h}} \\
&= \frac{8050 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{48}{60} \text{ h}} \\
&= \frac{\frac{8050}{1000}}{\frac{48}{60}} \frac{\text{km}}{\text{m}} \\
&= \frac{161}{16} \text{ km/h}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v_L = 10{,}0625 \text{ km/h.}}$$

(c) Déterminons le temps $t_L$ qu'aurait mis Léo à parcourir 15 km.

$$\begin{aligned}
v_L &= \frac{15 \text{ km}}{t_L} \\
v_L \times t_L &= \frac{15 \text{ km}}{t_L} \times t_L \\
v_L \times t_L &= 15 \text{ km} \\
\frac{v_L \times t_L}{v_L} &= \frac{15 \text{ km}}{v_L} \\
t_L &= \frac{15 \text{ km}}{10{,}0625 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} \\
t_L &= \frac{15}{10{,}0625} \text{ km} \cdot \text{km}^{-1} \cdot \text{h} \\
t_L &\approx 1{,}49068 \text{ h}
\end{aligned}$$

Donc $t_L < 1{,}5$ h.

Léo aurait effectivement parcouru 15 km en moins d'une heure et demie.

3. Déterminons leur vitesse moyenne $v_m$.

Commençons par déterminer le temps mis pour faire le parcours.

* $AB + BC = 960$ m + 1050 m = 2010 m = 2,01 km.
Le temps mis par Tara pour parcourir cette distance est :

$$\begin{aligned} t_T &= \frac{2{,}01 \text{ km}}{10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &= \frac{2{,}01}{10} \text{ h} \\ &= 0{,}201 \text{ h} \end{aligned}$$

* $CD + DA = 780$ m + 660 m = 1440 m = 1,44 km
Le temps mis par Kevin pour parcourir cette distance est :

$$\begin{aligned} it_K &= \frac{1{,}44 \text{ km}}{6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &= \frac{1{,}44}{6} \text{ h} \\ &= 0{,}24 \text{ h} \end{aligned}$$

* Ainsi le temps de parcours total est $t_P = 0{,}201$ h + 0,24 h = 0,441 h.

Nous en déduisons la vitesse moyenne

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{3{,}45 \text{ km}}{0{,}441 \text{ h}} \\ &\approx 7{,}823129252 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

$v_m \approx 7{,}823$ km/h.

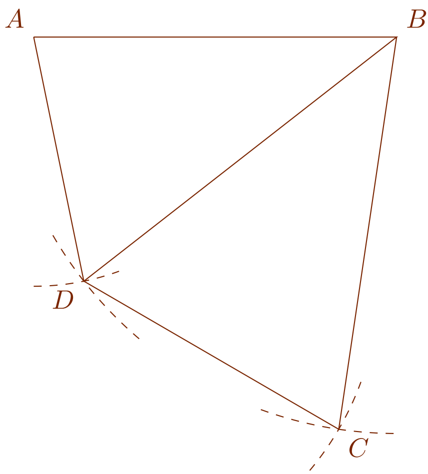
4. (a) La longueur $BD$ sera représentée par une longueur de

$$\begin{aligned}\ell_{BD} &= BD \times \frac{1}{20000} \\ &= 1050 \times \frac{1}{20000} \text{ m} \\ &= 0{,}0525 \text{ m} \\ &= 0{,}0525 \times 100 \text{ cm} \\ &= 5{,}25 \text{ cm}\end{aligned}$$

En procédant de même pour les autres longueurs :

| Nom | $AB$ | $BC$, $BD$ | $CD$ | $AD$ |
|---|---|---|---|---|
| Distances réelles (en m) | 960 | 1050 | 780 | 660 |
| À l'échelle (en cm) | 4,8 | 5,25 | 3,9 | 3,3 |

Il n'y a plus qu'à dessiner $[AB]$, puis $D$ (comme troisième sommet de $ABD$ avec un compas), et enfin $C$ (comme troisième sommet de $BCD$ avec un compas).




(b) Déterminons la distance, $d_A$, parcourue par Amina.

$$\begin{aligned}
d_A &= v \times t \\
&= \left(11{,}5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}\right) \times (25 \text{ min}) \\
&= \left(11500 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}\right) \times \left(\frac{25}{60} \text{ h}\right) \\
&= 11500 \times \frac{25}{60} \text{ m} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{h} \\
&= \frac{14375}{3} \text{ m} \\
&= 4791{,}666\ldots \text{ m}
\end{aligned}$$

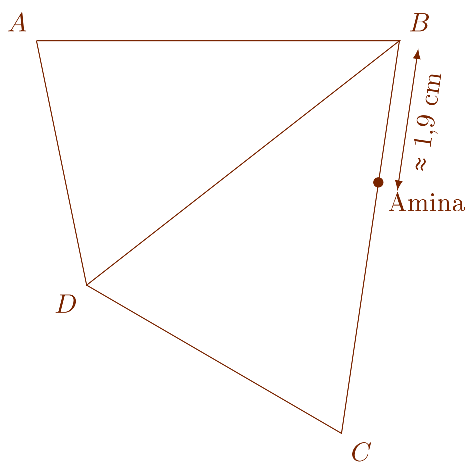
Nous remarquons que :

$$d_A = 3450 \text{ m} + 960 \text{ m} + 381{,}666\ldots \text{ m}$$

Ainsi Amina a parcourue un tour complet, la distance $AB$ et sur le trajet de $B$ à $C$ elle a encore parcourue $381{,}666\ldots$ m.
Or

$$\begin{aligned}
381{,}666\ldots \text{ m} \times \frac{1}{20000} &= 0{,}01908333\ldots \text{ m} \\
&= 1{,}908333\ldots \text{ cm}
\end{aligned}$$

donc



# Exercice 3.

## Partie A.

1. Déterminons $AL$.

   * Déterminons d'abord $AC$.
     Puisque le solide est un pavé droit, $ADC$ est rectangle en $D$. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore :

     $$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

     Nous en déduisons (toutes les longueurs étant exprimées en centimètre) :

     $$\begin{aligned} AC^2 &= 7^2 + 6^2 \\ &= 85 \end{aligned}$$

     Puisque $AC$ est une longueur, c'est un nombre positif et donc

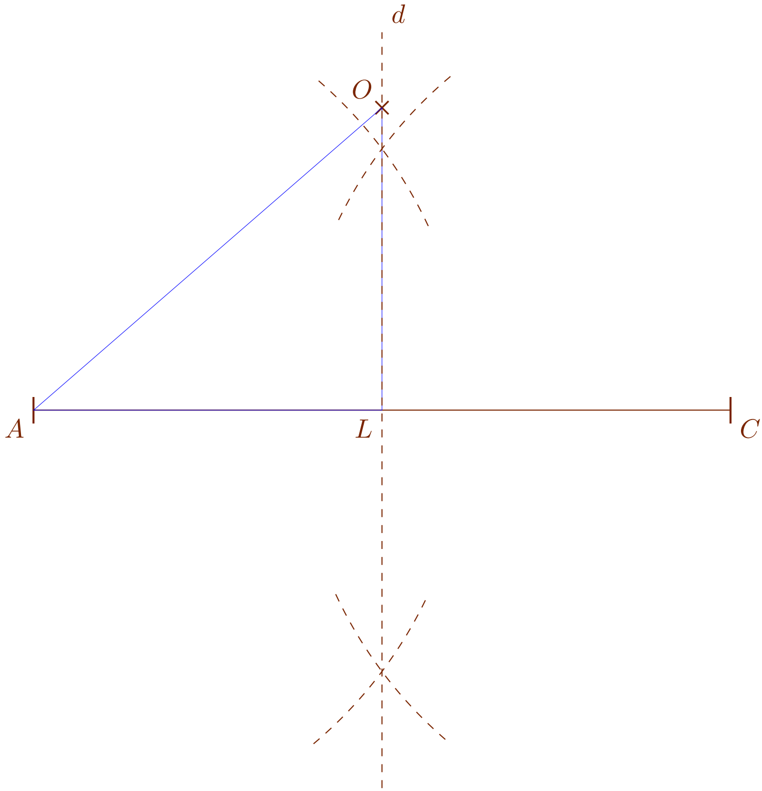
     $$AC = \sqrt{85}$$

   * Puisque le solide est un pavé droit $ABCD$ est un parallélogramme. Donc ses diagonales se coupent en leu milieu. Autrement dit $L$ est le milieu de $[AC]$. Par conséquent :

     $$\begin{aligned} AL &= \frac{1}{2}AC \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{85} \text{ cm} \\ &\approx 4{,}60977 \text{ cm} \end{aligned}$$

   $AL \approx 4{,}6$ cm. i

2. Traçons le segment $[AC]$ tel que $AC \approx 9{,}2$ cm, puis sa médiatrice $d$ (passant par $L$) avec le compas, enfin plaçons sur cette médiatrice $O$ tel que $OL = 4$ cm.




3. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_p$ de la pyramide $OABCD$.

Puisque $OL$ est la hauteur de cette pyramide :

$$\mathscr{V}_p = \frac{1}{3} \times OL \times \mathscr{A}(ABCD),$$

où $\mathscr{A}(ABCD)$ désigne l'aire délimitée par le quadrilatère $ABCD$. Or $ABCD$ est un rectangle donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= DA \times DC \\ &= (7 \text{ cm}) \times (6 \text{ cm}) \\ &= 7 \times 6 \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 42 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_p &= \frac{1}{3} \times 4 \text{ cm} \times 42 \text{ cm}^2 \\ &= \frac{1}{3} \times 4 \times 42 \text{ cm} \cdot \text{cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_p = 56 \text{ cm}^3.}$$

(b) Calculons le volume $\mathscr{V}_{pc}$ du pavé creusé.

En notant $\mathscr{V}_{\text{pavé}}$ le volume du pavé droit nous avons

$$\mathscr{V}_{pc} = \mathscr{V}_{\text{pavé}} - \mathscr{V}_p$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{\text{pavé}} &= DD' \times DC \times DA \\ &= 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} \\ &= 5 \times 6 \times 7 \text{ cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} \\ &= 210 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

donc

$$\mathscr{V}_{pc} = 210 \text{ cm}^3 - 56 \text{ cm}^3$$

$$\boxed{\mathscr{V}_{pc} = 154 \text{ cm}^3.}$$

## Partie B.

1. En reprenant le raisonnement de A.3.(a), avec $OL = x$, nous obtenons que

$$\boxed{\text{le volume, exprimé en cm}^3\text{, est } \mathscr{V}_p = 14x.}$$

2. En reprenant le raisonnement de A.3.(b) nous obtenons que :

$$\boxed{\text{le volume, exprimé en cm}^3\text{, est } \mathscr{V}_{pc} = 210 - 14x.}$$

3. Puisque $OEFGH$ est un agrandissement de $OABCD$ de rapport 2, le volume, $\mathscr{V}_P$, de $OEFGH$ est, en centimètre cube :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_P &= 2^3 \times \mathscr{V}_p \\ &= 2^3 \times 14x \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_P = 112x.}$$

4. On souhaite $x$ tel que : $\mathscr{V}_P = 2\mathscr{V}_{pc}$.
Cette égalité équivaut successivement à

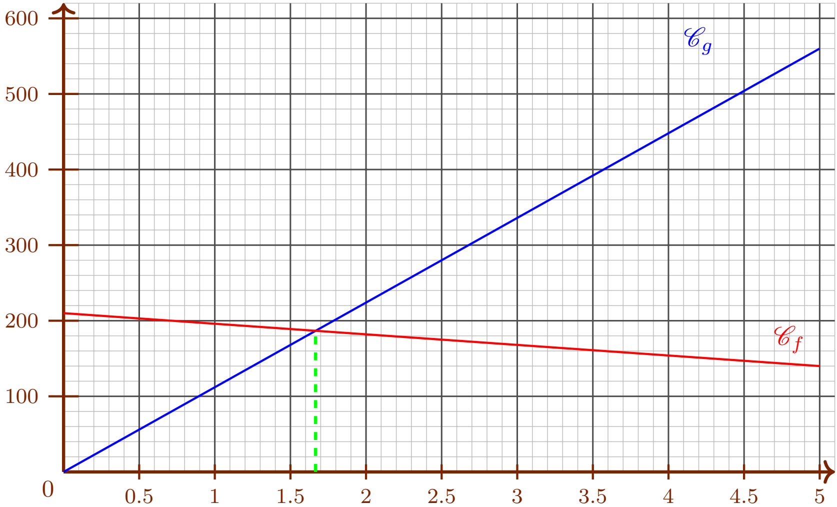
$$\begin{aligned} 112x &= 2 \times (210 - 14x) \\ 112x &= 2 \times 210 - 2 \times 14x \\ 112x &= 420 - 28x \\ 112x + 28x &= 410 - 28x + 28x \\ 140x &= 410 \\ \frac{140x}{140} &= \frac{410}{140} \\ x &= \frac{41}{14} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il faut choisir } x = \tfrac{41}{14}.}$$

5. (a) $f$ et $g$ sont des fonctions affines. Cependant $g$ est linéaire donc sa courbe représentative passe par l'origine du repère. Nécessairement

$$\boxed{D_2 \text{ est la courbe représentative de } g \text{ et donc } D_1 \text{ est celle de } f.}$$

(b)




Le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre pour $x \geqslant 1{,}65$.

(c)

$$g(x) \geqslant f(x)$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 112x &\geqslant 210 - 14x \\ 112x + 14x &\geqslant 210 - 14x + 14x \\ 126x &\geqslant 210 \\ \frac{126x}{126} &\geqslant \frac{210}{126} \\ x &\geqslant \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$x \in \left[\frac{5}{3}; 5\right]$.

## Exercice 4.

1. *Cliquez sur ce lien pour télécharger le programme.*

   (a) Considérons un tableau d'état des variables du programme.

| Lignes de codes. | demander Choisis un nombre et attendre | mettre nombre départ à réponse | mettre valeur 1 à 2 * nombre départ | mettre valeur 2 à valeur 1 + 3 | mettre valeur 3 à nombre départ - 2 | mettre résultat à valeur 2 * valeur 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| réponse | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| nombre départ | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| valeur 1 | | | $2 \times 3 = 6$ | 6 | 6 | 6 |
| valeur 2 | | | | $6 + 3 = 9$ | 9 | 9 |
| valeur 3 | | | | | $3 - 2 = 1$ | 1 |
| résultat | | | | | | $9 \times 1 = 9$ |

Si le nombre de départ est 3 alors le résultat est 9.

(b)

| Lignes de codes. | demander Choisis un nombre et attendre | mettre nombre départ à réponse | mettre valeur 1 à 2 * nombre départ | mettre valeur 2 à valeur 1 + 3 | mettre valeur 3 à nombre départ - 2 | mettre résultat à valeur 2 * valeur 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| réponse | 2,4 | 2,4 | 2,4 | 2,4 | 2,4 | 2,4 |
| nombre départ | | | 2,4 | 2,4 | 2,4 | 2,4 |
| valeur 1 | | | $2 \times 2{,}4 = 4{,}8$ | 4,8 | 4,8 | 4,8 |
| valeur 2 | | | | $4{,}8 + 3 = 7{,}8$ | 7,8 | 7,8 |
| valeur 3 | | | | | $2{,}4 - 2 = 0{,}4$ | 0,4 |
| résultat | | | | | | $7{,}8 \times 0{,}4 = 3{,}12$ |

Si le nombre de départ est 2,4 alors le résultat est 3,12.

(c)

| Lignes de codes. | demander (Choisis un nombre) et attendre | mettre nombre départ à (réponse) | mettre valeur 1 à (2 * nombre départ) | mettre valeur 2 à (valeur 1 + 3) | mettre valeur 3 à (nombre départ - 2) | mettre résultat à (valeur 2 * valeur 3) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| réponse | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| nombre départ | | | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| valeur 1 | | | $2 \times x = 2x$ | $2x$ | $2x$ | $2x$ |
| valeur 2 | | | | $2x + 3$ | $2x + 3$ | $2x + 3$ |
| valeur 3 | | | | | $x - 2$ | $x - 2$ |
| résultat | | | | | | $(2x + 3)(x - 2)$ |

Or en développant, simplifiant puis réduisant :

$$\begin{aligned}(2x+3)(x-2) &= 2x \times x + 2x \times (-2) + 3 \times x + 3 \times (-2)\\ &= 2x^2 - 4x + 3x - 6\\ &= 2x^2 - x - 6\end{aligned}$$

donc

$\boxed{\text{si le nombre de départ est } x \text{ alors le résultat est } 2x^2 - x - 6.}$

2. (a) Appliquons le programme en prenant 3 pour nombre de départ.

| | |
|---|---|
| Choisis un nombre. | 3 |
| Élève-le au carré | $3^2 = 9$ |
| Soustrais 3. | $9 - 3 = 6$ |
| Multiplie par 2. | $6 \times 2 = 12.$ |
| Soustrais le nombre de départ. | $12 - 3 = 9.$ |

Si le nombre de départ est 3 alors le résultat est 9.

(b) Appliquons le programme en prenant $\frac{7}{3}$ pour nombre de départ.

| | |
|---|---|
| Choisis un nombre. | $\frac{7}{3}$ |
| Élève-le au carré | $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$ |
| Soustrais 3. | $\frac{49}{9} - 3 = \frac{22}{9}$ |
| Multiplie par 2. | $\frac{22}{9} \times 2 = \frac{44}{9}$. |
| Soustrais le nombre de départ. | $\frac{44}{9} - \frac{7}{3} = \frac{23}{9}$. |

Si le nombre de départ est $\frac{7}{3}$ alors le résultat est $\frac{23}{9}$.

3. Appliquons le programme en prenant $x$ pour nombre de départ.

| | |
|---|---|
| Choisis un nombre. | $x$ |
| Élève-le au carré | $x^2$ |
| Soustrais 3. | $x^2 - 3$ |
| Multiplie par 2. | $(x^2 - 3) \times 2$. |
| Soustrais le nombre de départ. | $2(x^2 - 3) - x$ |

Or en développant, simplifiant puis réduisant :

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 3) - x &= 2 \times x^2 - 2 \times 3 - x \\ &= 2x^2 - 6 - x \\ &= 2x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

donc on obtient bien le même résultat que pour le programme de la question 1.

Les deux programmes donnent le même résultat.

4. Au cours des questions précédentes nous avons obtenu diverses expressions littérales du résultat des programmes : $(2x+3)(x-2)$, $2x^2-x-6$, $2(x^2-3)-x$. Nous préférons l'expression qui fait apparaître une équation produit nul.

Résolvons l'équation : $(2x + 3)(x - 2) = 0$.

$$(2x+3)(x-2)=0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
2x+3=0 &\quad \text{et} \quad x-2=0\\
2x+3-3=0-3 &\quad \text{et} \quad x-2+2=0+2\\
2x=-3 &\quad \text{et} \quad x=2\\
\frac{2x}{2}=\frac{-3}{2} &\quad \text{et} \quad x=2\\
x=-\frac{3}{2} &\quad \text{et} \quad x=2
\end{aligned}$$

Le résultat sera zéro si et seulement si le nombre de départ est choisi dans l'ensemble $\left\{-\frac{3}{2};\ 2\right\}$.

5. Utilisons la formule donnée dans l'énoncé :

$$= 2 * \mathtt{A2} \wedge 2 - \mathtt{A2} - 6.$$

## Exercice 5.

1. Le point signifie 1 et le trait signifie 5.

2. $21 = 1 \times 20 + 1 \times 1$ donc :

3. $37 = 1 \times 20 + 3 \times 5 + 2 \times 1$ donc

4.

a) $3 \times 20 + 2 \times 5 + 4 \times 1 = 74$. b) $1 \times 400 + 3 \times 100 + 2 \times 20 + 1 \times 5 = 745$.

5. (a) $25 = 1 \times 20 + 1 \times 5$.

(b) $101 = 1 \times 100 + 1 \times 1$.

(c) Suivant l'endroit où sont placés les points ou les traits (haut ou bas) ils représentent des unités ou des vingtaines. On retrouve également l'utilisation d'un zéro de position sous la forme du coquillage.

# Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 3.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Merci à Mme Jacquot pour toutes les corrections apportées.

## Exercice 1.

1. En utilisant la formule rappelée par l'énoncé (et puisque la base est u cercle de rayon $\frac{8\text{ cm}}{2}$) nous avons le volume :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \left[\pi\left(\frac{8\text{ cm}}{2}\right)^2\right] \times (6\text{ cm})\\ &= \pi \times \left(\frac{8}{2}\right)^2 \times 6\text{ cm}^2 \cdot \text{cm}\\ &= 96\pi\text{ cm}^3\end{aligned}$$

Réponse b.

2. En itérant :
   - le premier juin 3 personnes sont prévenues,
   - le deux juin $3 \times 3 = 3^2 = 9$ personnes sont prévenues,
   - les trois juin $3 \times 9 = 3^3 = 27$ personnes sont prévenues,
   - ...

   On remarque qu'au jour $n$ ce sont $3^n$ personnes qui sont prévenues.
   Donc le 10 juin : $3^{10} = 59049$ personnes sont prévenues.

   Réponse c.

3. Calculons le taux dévolution global $t_g$ décrivant ces deux évolutions successives.

   Pour modéliser des augmentations ou diminutions successives le plus simple consiste à travailler avec des coefficients multiplicateurs.

   Une hausse de 10 % correspond au coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10}{100} \\ &= 1{,}10 \end{aligned}$$

   De même une même une baisse de 10 % correspond au coefficient multiplicateur

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{-10}{100} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

   Le coefficient multiplicateur global correspondant aux deux évolutions successives est donc :

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 1{,}1 \times 0{,}9 \\ &= 0{,}99 \end{aligned}$$

   On peut maintenant traduire ce taux d'évolution en un coefficient multiplicateur :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM - 1) \\ &= 100 \times (0{,}99 - 1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Autrement dit le prix a, globalement baissé de 1 %.

Réponse a.

4. $\frac{4}{25} = 0{,}16$ donc c'est un nombre décimal (il admet une écriture décimale finie) mais ce n'est pas un entier (puisqu'il est strictement compris entre 0 et 1).

Réponse c.

5. Un quart de $x$ est $\frac{1}{4} \times x$. Donc un quart de $\frac{4}{12}$ est

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \times \frac{4}{12} &= \frac{1 \times 4}{4 \times 12} \\ &= \frac{4}{48} \end{aligned}$$

Réponse d.

6. Un calcul à la calculatrice permet de trouver la réponse. pour le justifier remarquons une factorisation :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times 5 + 5 \times \frac{1}{3} &= 5\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= 5 \times 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Réponse a.

7. Calculons l'aire $\mathscr{A}$ du triangle $ABC$.

* Le triangle est rectangle en $B$ donc la façon la plus simple de calculer son aire est de faire $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times AB \times BC$ puisque les hauteurs de l'angle droit se confondent à les hauteurs.
* Déterminons $BC$.
  $ABC$ est rectangle en $B$ donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

  Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} 8^2 + BC^2 &= 10^2 \\ 64 + BC^2 &= 100 \\ BC^2 &= 36 \end{aligned}$$

  $BC$ étant une longueur donc un nombre positif :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{36} \\ BC &= 6 \end{aligned}$$

  Ainsi $BC = 6$ cm.
* Nous pouvons maintenant déterminer $\mathscr{A}$.

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times BC \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 24 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Réponse a.

## Exercice 2.

1. (a) Calculons la durée moyenne, $x_c$, de course de Célia.

   Puisqu'elle a couru 7 jours :

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{33 \text{ min} + 12 \text{ s} + 32 \text{ min} + 4 \text{ s} + \cdots + 29 \text{ min} + 1 \text{ s}}{7} \\ &= \frac{217 \text{ min} + 91 \text{ s}}{7} \\ &= \frac{217}{7} \text{ min} + \frac{91}{7} \text{ s} \\ &= 31 \text{ min} + 13 \text{ s} \end{aligned}$$

Et puisque la moyenne de la sœur est de 31 min et 13 secondes

> les durées moyennes des sœurs sont les mêmes.

(b) Déterminons la médiane des temps de course de Célia.

* Ordonnons les temps de course.
  - Samedi : 26 min et 38 secondes.
  - Jeudi : 27 min et 11 secondes.
  - Dimanche : 29 min et 1 secondes.
  - Vendredi : 30 min.
  - Mardi : 32 min et 4 secondes.
  - Lundi : 33 min et 12 secondes.
  - Mercredi : 40 min et 25 secondes.
* $\frac{7}{2} = 3{,}5$ donc la médiane est la quatrième valeur de la série ordonnée.
* Le temps médian de Célia est 30 min.

Puisque la médiane de sa sœur est 30 min :

> les deux sœurs ont le même temps médian.

(c) Un raisonnement par l'absurde.

Si le minimum de la série de la sœur était de 28 min alors, l'étendue étant de 3 min le maximum serait de 31 min.

La moyenne étant inférieure ou égale au maximum ceci serait contradictoire. Nécessairement le minimum est strictement supérieur à 28 min.

> L'affirmation est vraie.

(d) Pour juger de la régularité il faut regarder si les valeurs sont très éloignées les unes des autres. Il faut donc utiliser un indicateur de dispersion. le seul dont nous disposions est l'étendue.

L'étendue de la série des durées de Célia est :

$$\begin{aligned} e &= 40 \text{ min} + 25 \text{ s} - (26 \text{ min} + 38 \text{ s}) \\ &= (40 - 26) \text{ min} + (25 - 38) \text{ s} \\ &= 14 \text{ min} - 13 \text{ s} \\ &= 13 \text{ min} + (60 - 13) \text{ s} \\ &= 13 \text{ min} + 47 \text{ s} \end{aligned}$$

L'étendue de Célia est (beaucoup) plus importante donc

$$\boxed{\text{la sœur a été plus régulière.}}$$

2. (a) La mise à l'échelle consiste à appliquer de la proportionnalité sur les longueurs. Il faut trouver le bon coefficient (multiplicateur ou de proportionnalité).

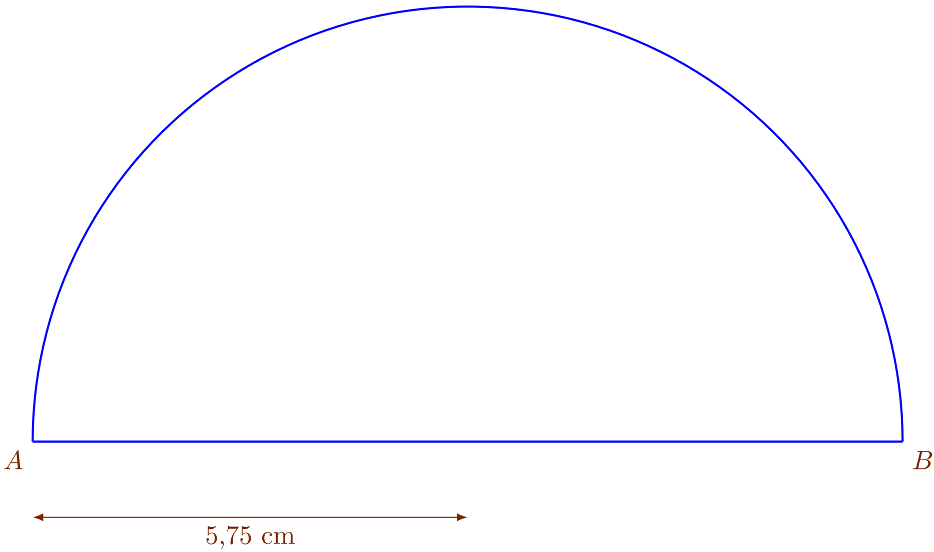
Déterminons la longueur $A'B'$ correspondant à $AB$ après la mise à l'échelle.

$$\begin{aligned} A'B' &= \frac{1}{20\,000} \times AB \\ &= \frac{1}{20\,000} \times 2\,300 \text{ m} \\ &= \frac{2\,300}{20\,000} \times 100 \text{ cm} \\ &= 11{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ainsi le rayon du cercle que nous devons dessine est :

$$\begin{aligned} \frac{A'B'}{2} &= \frac{11{,}5 \text{ cm}}{2} \\ &= 5{,}75 \text{ cm} \end{aligned}$$

Finalement :




(b) Calculons la distance $d_p$ du parcours.

Le parcours ayant une forme de demi-cercle fermé :

$$d_p = 2\,300 \text{ m} + \frac{1}{2} \times \left(2\pi \frac{2\,300 \text{ m}}{2}\right)$$
$$\approx 5912{,}83 \text{ m, en tronquant.}$$

$$\boxed{d_p \approx 5913 \text{ m.}}$$

(c) Calculons la vitesse moyenne $v_p$.

$$v_p = \frac{d_p}{t_p}$$

où $t_p$ désigne le temps mis pour faire le parcours.
Or

$$\begin{aligned} t_p &= 33 \text{ min} + 36 \text{ s} \\ &= 33 \times \frac{1}{60} \text{ h} + 36 \times \frac{1}{3600} \text{ h} \\ &= \left( \frac{33}{60} + \frac{36}{3600} \right) \text{ h} \\ &= \frac{14}{25} \text{ h} \\ &= 0{,}56 \text{ h} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_p &\approx 5913 \text{ m} \\ &\approx 5913 \times \frac{1}{1000} \text{ km} \\ &\approx 5{,}913 \text{ km} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} v_p &\approx \frac{5{,}913 \text{ km}}{0{,}56 \text{ h}} \\ &= 10{,}5589 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}, \text{ en tronquant.} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_p \approx 10{,}6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.}$$

(d) Plutôt que de travailler avec les longueurs réelles pour ensuite les convertir en longueur nous travaillerons avec les longueurs de la figure mise à l'échelle.

* La longueur $P$ de la représentation du parcours est en centimètre, d'après la question 2.(a) :

$$\begin{aligned} P &= 2 \times 5{,}75 + \frac{1}{2} \times 2\pi 5{,}75 \\ &= (2 + \pi)5{,}75 \\ &\approx 29{,}6 \end{aligned}$$

* $\frac{1}{4} \times 29{,}6 = 7{,}4$.
* Ainsi on doit avoir l'arc de cercle $\widehat{AL} \approx 7{,}4$ cm.
  Par rapport au demi-cercle d'extrémités $A$ et $B$ cela représente une proportion de

$$\begin{aligned}\alpha &\approx \frac{7{,}4}{\frac{1}{2} \times 2\pi 5{,}75} \\ &\approx 0{,}41\end{aligned}$$

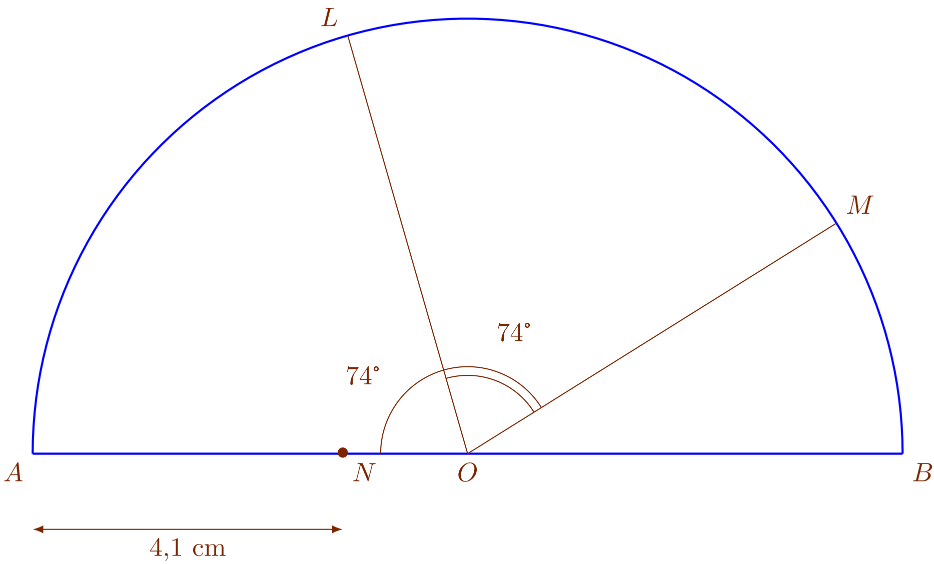
  Nous en déduisons l'angle correspondant :

$$\begin{aligned}\theta &\approx \alpha \times 180 \\ &\approx 73{,}74\end{aligned}$$

  En notant $O$ le centre du demi-cercle, nous avons obtenu que $\widehat{AOL} \approx 74°$.
* Donc : $\widehat{AOM} \approx 148°$.
* Le point $N$ n'est a priori pas sur le demi-cercle.

$$\begin{aligned}AN &\approx 11{,}5 - 7{,}4 \\ &\approx 4{,}1\end{aligned}$$

Enfin :




Morale : pensez à apporter un rapporteur.

## Exercice 3.

### Partie A : installation du potager.

1. Nous connaissons les longueurs des trois côtés de ce triangle donc, pour vérifier qu'il est rectangle, il suffit d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

   Démontrons que $ABC$ est rectangle en $A$.

   D'une part (toutes les grandeurs étant exprimées en mètres) :

$$CA^2 + AB^2 = 10^2 + 24^2$$
$$CA^2 = 676 \quad (1)$$

   et d'autre part :

$$CB^2 = 26^2$$
$$CB^2 = 676 \quad (2)$$

donc, de (1) et (2), on déduit l'égalité qui nous permet d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore) :

$$CA^2 + AB^2 = CB^2.$$

Donc, d'après le théorème de Pythagore :

$ABC$ est rectangle en $A$.

2. (a) Pour calculer cette longueur et au su des angles droits nous pouvons penser à de la trigonométrie, au théorème de Thalès, au théorème de Pythagore.
Nous n'avons pas d'information sur les angles non droits donc pas de trigonométrie.
Nous ne connaissons pas $BE$ donc pas de Pythagore.

Déterminons $DE$ en utilisant le théorème de Thalès.

* Configuration de Thalès.
Les points $B$, $D$, $A$ d'une part et $B$, $C$, $E$ d'autre part sont alignés dans cet ordre.
* Parallélisme. Puisque, par construction , $ADEF$ est un rectangle, $(AF) \parallel (DE)$. Autrement dit $(AC) \parallel (DE)$.

Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{CA}.$$

En ne conservant que ce qui nous intéresse :

$$\begin{aligned}
\frac{BD}{AB} &= \frac{ED}{CA} \\
\frac{AB - AD}{24} &= \frac{ED}{10} \\
\frac{24 - 4{,}8}{24}\times 10 &= \frac{ED}{10}\times 10 \\
8 &= ED
\end{aligned}$$

$ED = 8$ m.

(b) Calculons l'aire $\mathscr{A}(4{,}8)$ de $ADEF$.

Puisque $ADEF$ est un rectangle :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(4{,}8) &= AD \times DE\\ &= 4{,}8 \text{ m} \times 8 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(4{,}8) = 38{,}4 \text{ m.}}$$

3. (a) En procédant comme à la question 2.(a) :

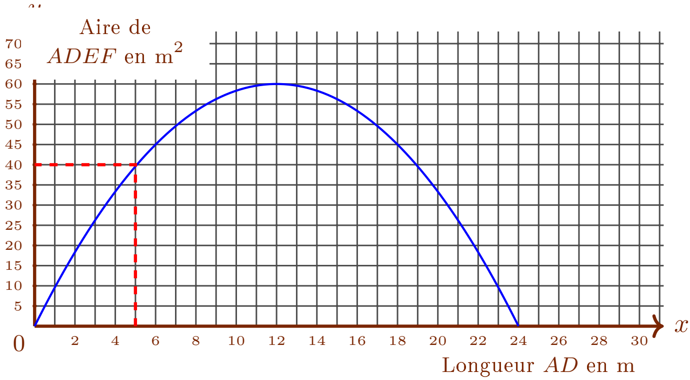
$$\begin{aligned}DE &= 10 \times \frac{24 - x}{24}\\ &= 10\left(\frac{24}{24} - \frac{x}{24}\right)\\ &= 10\left(1 - \frac{1}{24}x\right)\\ &= 10 \times 1 - 10 \times \frac{1}{24}x\\ &= 10 - \frac{10}{24}x\end{aligned}$$

$$\boxed{DE = 10 - \tfrac{5}{12}x.}$$

(b) En procédant comme dans la question 2.(b) :

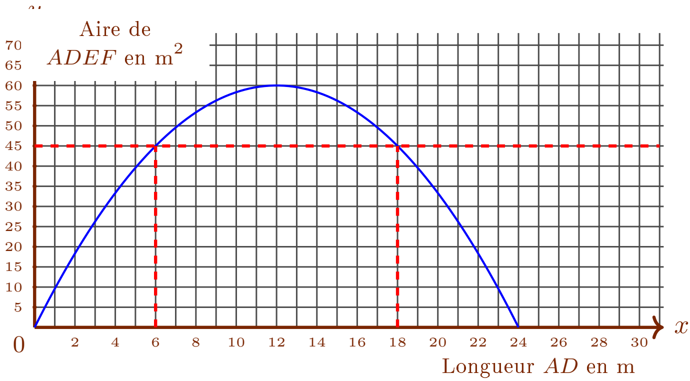
$$\mathscr{A}(x) = AD \times DE$$

$$\boxed{\mathscr{A}(x) = x \times \left(10 - \tfrac{5}{12}x\right).}$$



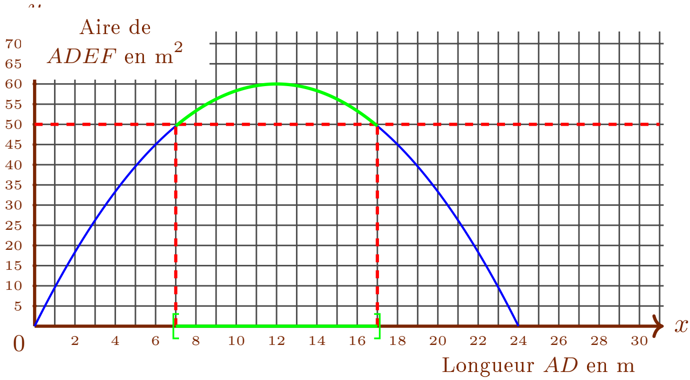

4. (a)

Si $AD = 5$ m le potager a une aire de 40 m$^2$.



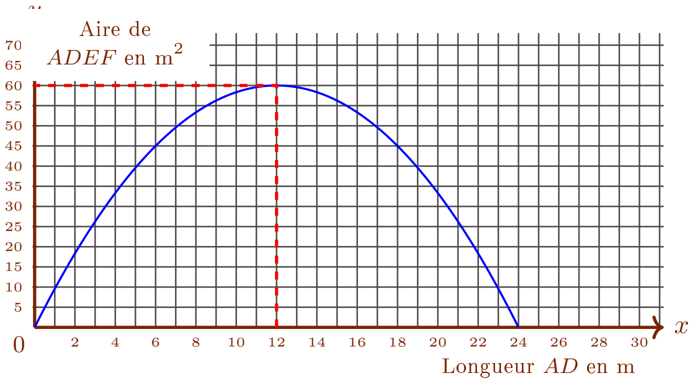

(b)

L'aire égalera 45 m$^2$ si l'on choisi $AD = 6$ m ou $AD = 18$ m.




(c)

L'aire sera supérieure ou égale à 50 m$^2$ si $7 \leqslant AD \leqslant 17$.




(d)

L'aire maximale est de 60 m$^2$ et cela advient lorsque $AD = 12$ m.

## Partie B : choix du terreau.

1. Calculons le volume $\mathscr{V}$ de terreau.

   Puisqu'il s'agit d'un pavé droit le volume à remplir est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_r &= \left(12\ \mathrm{m}^2\right) \times (5\ \mathrm{m}) \times (30\ \mathrm{cm})\\ &= 12 \times 5 \times 30 \times \frac{1}{100}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}\\ &= 18\ \mathrm{m}^3\end{aligned}$$

Seul un tiers est à remplir donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \frac{1}{3}\mathscr{V}_r\\ &= \frac{1}{3} \times 18\ \mathrm{m}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V} = 6\ \mathrm{m}^3.}$$

2. Comparons les trois offres.

Convertissons le volume de terreau en $\ell$.

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= 6\ \mathrm{m}^3\\ &= 6 \times 1000\ \mathrm{dm}^3\\ &= 6000\ \ell\end{aligned}$$

* Pour le magasin 1 le coût est de

$$\begin{aligned}C_1 &= 20 + 6000 \times 0{,}10\\ &= 620\end{aligned}$$

* Magasin 2.
Une remise de 20 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned}CM &= 1 + \frac{t}{100}\\ &= i1 + \frac{-20}{100}\\ &= 0{,}8\end{aligned}$$

$6000 = 300 \times 20$ il faudra donc 300 sacs de 20 $\ell$.
Nous en déduisons le coût :

$$\begin{aligned} C_3 &= 10 + 0{,}8 \times (300 \times 2{,}35) \\ &= 574 \end{aligned}$$

* Pour le magasin 3 : $6000 = 120 \times 50$. Il faudra donc 120 sacs. Nous en déduisons le coût :

$$\begin{aligned} C_2 &= 120 \times 5{,}37 \\ &= 644{,}4 \end{aligned}$$

> Le magasin 2 est le plus économique pour 6 m$^3$.

### Partie C : plantation des fleurs.

1. Chaque élève reçoit 20 graines et le taux de germination est de 90 % donc le nombre de graines que l'on peut espérer voir pousser est

$$n_g = \frac{90}{100} \times 20$$

> $n_g = 18$.

2. (a) Chacun des 26 élèves recevra 20 graines il faut donc un total de $26 \times 20 = 520$ graines.
   (b) Il y a 50 graines par paquet et $520 = 10 \times 50 + 20$ donc il faudra acheter 11 paquet.
   (c) Chaque paquet valant 4,53 € il faudra payer : $11 \times 4{,}53$ €.

> Il faut prévoir un budget de 49,83 €.

3. (a) $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$ représentent donc $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{14}{48}=\frac{7}{24}$.
Comparons cette fraction à $\frac{25}{100}$ :

$$\frac{25}{100}-\frac{7}{24}=-\frac{1}{24}$$

Puisque $\frac{25}{100}-\frac{7}{24}<0$ il y a plus de 25 % du potager.

L'élève a raison.

(b) Notons $x$ le nombre de bulbes dans le panier. Puisque $\frac{1}{6}$ des bulbes sont des tulipes.
Nous avons

$$30+\frac{1}{6}x=x.$$

Cette équation (du premier degré) équivaut successivement à

$$\begin{aligned}30+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}x &= x\frac{1}{6}x\\ 30 &= \frac{5}{6}x\\ \frac{6}{5}\times 30 &= \frac{6}{5}\times\frac{1}{6}x\\ 36 &= x\end{aligned}$$

Enfin $36-30=6$.

Il y a 6 bulbes de tulipes.

## Exercice 4.

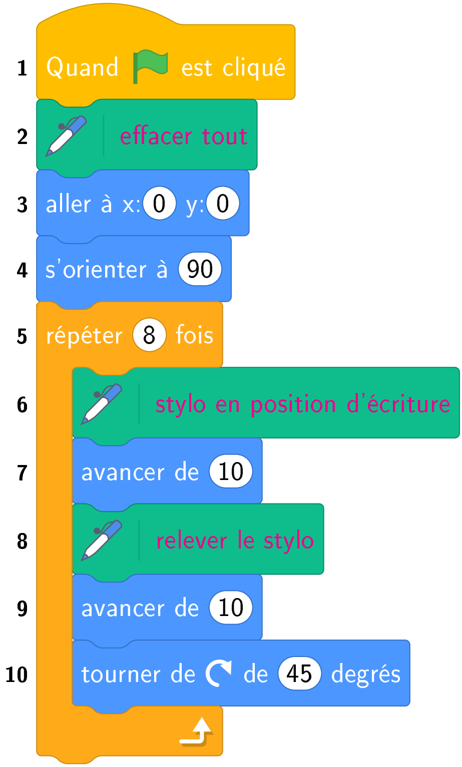
*Cliquez sur ce lien pour télécharger le programme.*

1.

2.
```
1 Quand [drapeau vert] est cliqué
2   effacer tout
3   aller à x: 0 y: 0
4   s'orienter à 90
5   répéter 8 fois
6     stylo en position d'écriture
7     avancer de 10
8     relever le stylo
9     avancer de 10
```

*Cliquez sur le programme pour le télécharger.*

3. (a)




(b) Il s'agit d'une rotation de 45 °.

# Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

## Exercice 1.

1. (a) Modélisation : l'univers $\Omega$ est formé des 80 cartes et, chaque carte ayant la même probabilité qu'une autre d'être obtenue, nous munissons $\Omega$ de l'équiprobabilité.
   Notons $B$ : « obtenir une carte bleue ».

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Il y a équiprobabilité, $B$ est réalisé par 20 issues et l'univers en contient 80 donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{20}{80}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \tfrac{1}{4}.}$$

(b) Notons $N$ : « obtenir une carte numéro 2 ».

Calculons $\mathbb{P}(N)$.

Il y a équiprobabilité, $N$ est réalisé par 8 issues et l'univers en contient 80 donc

$$\mathbb{P}(N) = \frac{8}{80}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(N) = \tfrac{1}{10}.}$$

(c) Calculons $\mathbb{P}(B \cap N)$.

Il y a équiprobabilité, $B \cap N$ est réalisé par 2 issues et l'univers en contient 80 donc

$$\mathbb{P}(B \cap N) = \frac{2}{80}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B \cap N) = \tfrac{1}{40}.}$$

(d) Calculons $\mathbb{P}(B \cup N)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cup N) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(N) - \mathbb{P}(B \cap N) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{40}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(B \cup N) = \frac{13}{40}.$$

2. Notons $x$ le nombre de cartes rajoutées et $J$ :« obtenir un joker. ».

   Déterminons $x$.

   Il y a équiprobabilité, $J$ est réalisé par $x$ issues et l'univers en contient $80 + x$ donc

$$\mathbb{P}(J) = \frac{x}{80 + x}$$

   Nous devons avoir :

$$\mathbb{P}(J) = \frac{1}{6}$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{x}{80 + x} = \frac{1}{6}$$

   en procédant à un produit en croix et puisque $80 + x \neq 0$ :

$$6x = 80 + x$$

   nous reconnaissons une équation du premier degré, il suufit d'isoler l'inconnue :

$$\begin{aligned} 6x - x &= 80 + x - x \\ 5x &= 80 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{80}{5} \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Elle doit ajouter 16 cartes.

# Exercice 2.

## Partie A.

1. (a) Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 58,6 % est

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{58{,}6}{100} \\ &= 1{,}586 \end{aligned}$$

Donc le nombre de marques en 2010 est :

$$\begin{aligned} V_{2010/1} &= CM_1 \times V_{2009/1} \\ &= 1{,}586 \times 58 \\ &= 91{,}988 \end{aligned}$$

> En 2010 on compte 92 marques dans la catégorie allégées.

(b) Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 52,7 % est

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{52{,}7}{100} \\ &= 1{,}527 \end{aligned}$$

Donc le nombre de marques en 2017 est :

$$V_{2017/2} = CM_2 \times V_{2010/2}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 452 &= 1{,}527 \times V_{2010/2} \\ \frac{452}{1{,}527} &= \frac{1{,}527 \times V_{2010/2}}{1{,}527} \\ V_{2010/2} &\approx 296{,}0052 \end{aligned}$$

En 2010 on compte 296 marques dans la catégorie confitures.

2. Le taux d'évolution est donné en pourcentage par

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{V_{2017/3} - V_{2009/3}}{V_{2033/3}} \times 100 \\ &= \frac{32 - 11}{11} \times 100 \\ &= 190{,}909090\ldots \end{aligned}$$

Le nombre de marques crèmes et marrons a augmenté de 191,0 % entre 2009 et 2017.

3. Les angles sont proportionnels au nombre de marques il suffit de compléter le tableau :

| | Marques | Angle en degré |
|---|---|---|
| Total | 337 | 360 |
| Confitures | 227 | $x$ |

Par un produit en croix :

$$\begin{aligned} 337x &= 227 \times 360 \\ \frac{337x}{337} &= \frac{227 \times 360}{337} \\ x &\approx 242{,}49 \end{aligned}$$

L'angle pour les confitures est de 242°.

## Partie B.

1. Calculons la proportion de sucre dans les trois préparations.

   * Préparation 1.
     La proportion de sucre est

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{240\text{ g}}{240\text{ g} + 1\text{ kg}} \\ &= \frac{240\text{ g}}{240\text{ g} + 1000\text{ g}} \\ &= \frac{240}{1240} \\ &\approx 0{,}19354 \end{aligned}$$

Donc $p_1 \approx 19{,}35$ %.
D'où $p_1 \notin [20\ \%, 30\ \%]$.

$$\boxed{\text{La préparation 1 ne convient pas.}}$$

* Préparation 2.
  $p_2 = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25$ %.
  Comme $p_2 \in [20\ \%, 30\ \%]$

$$\boxed{\text{la préparation 2 convient.}}$$

* Préparation 3.
  La proportion de sucre est

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{330\text{ g}}{1{,}5\text{ kg}} \\ &= \frac{330\text{ g}}{1500\text{ g}} \\ &= \frac{330}{1500} \\ &= 0{,}22 \end{aligned}$$

Donc $p_3 = 22$ %. Et comme $p_3 \in [20\ \%, 30\ \%]$

$$\boxed{\text{la préparation 3 convient.}}$$

2. (a) Déterminons la masse $x$ de sucre qu'il faut rajouter exprimée en gramme.

   Puisque la proportion de fruit doit être de $\frac{3}{4}$ et qu'il y a 1000 g de sucre :

$$\frac{1000}{x + 1000} = \frac{3}{4}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1000 \times 4 &= (x + 1000) \times 3, \text{ car } x + 1000 \neq 0 \\
4000 &= x \times 3 + 1000 \times 3 \\
4000 &= 3x + 3000 \\
4000 - 3000 &= 3x + 3000 - 3000 \\
1000 &= 3x \\
\frac{1000}{3} &= \frac{3x}{3} \\
x &= \frac{1000}{3} \\
x &\approx 333{,}33\ldots
\end{aligned}$$

Il faut ajouter 333 g.

(b) * Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 100 g à 83 g est

$$\begin{aligned}
CM_3 &= \frac{V_A}{V_D} \\
&= \frac{83 \text{ g}}{100 \text{ g}} \\
&= 0{,}83
\end{aligned}$$

* Nous avons, les grandeurs étant exprimées en gramme,

$$V_A = CM_3 \times V_D$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
100 &= 0{,}83 \times V_D \\
\frac{100}{0{,}83} &= V_D \\
V_D &\approx 120{,}4819
\end{aligned}$$

Il devra écrire : 120 g.

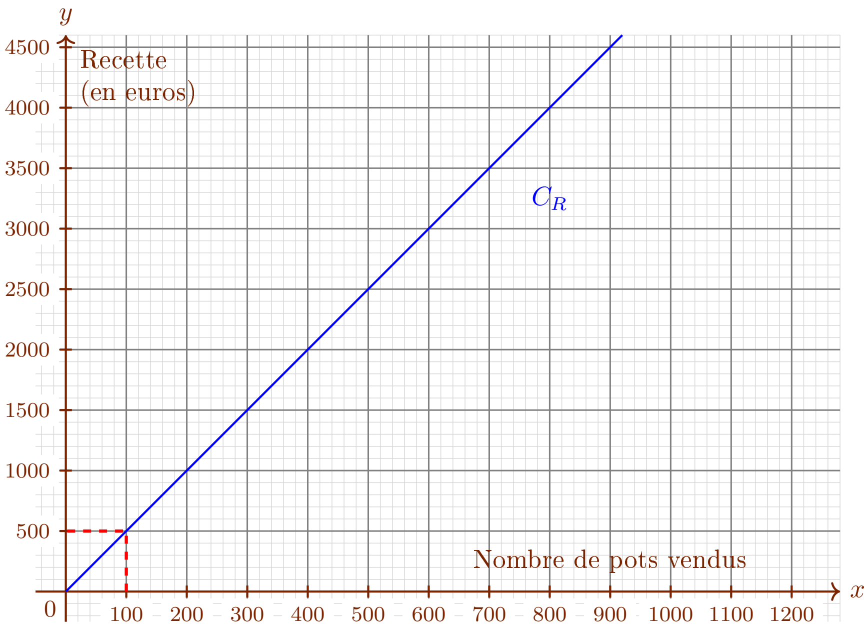
(c) La proportion de sucre d'origine naturelle dans le mélange correspond à 10 % des trois quart du mélange : $\frac{10}{100} \times \frac{3}{4} = 0{,}075 = 7{,}5$ %.
En tenant compte de 25 % de sucre dans le mélange : $25 + 7{,}5 = 32{,}5$.

Il y a 32,5 % de sucre dans le mélange.

## Partie C.

1. (a) La courbe représentative de la fonction est une droite donc il s'agit d'une fonction affine.
Comme de plus cette droite passe par l'origine du repère nous pouvons préciser que

$R$ est une fonction linéaire.




(b)

100 génèrent une recette de 500 € donc, par proportionnalité la recette correspondant à un pot est

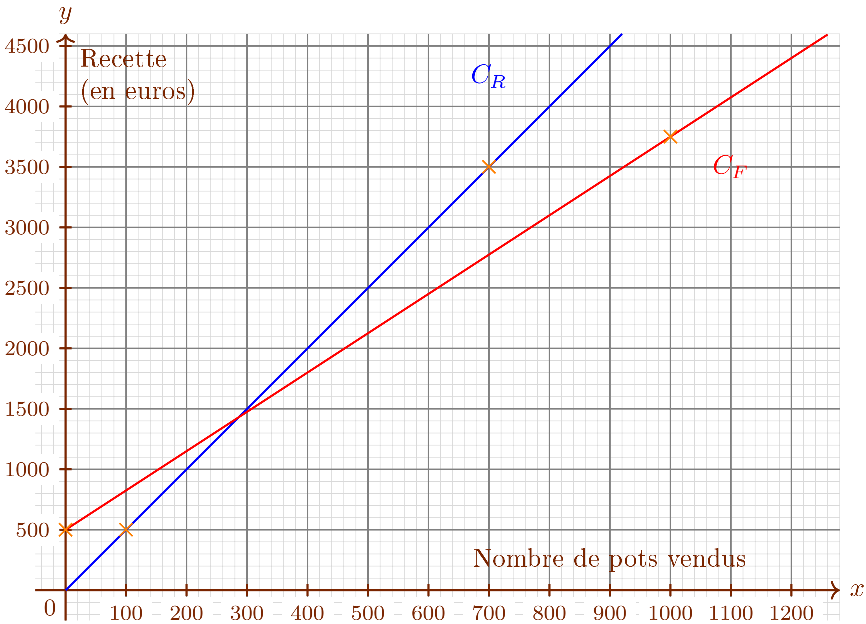
$$R(1) = \frac{500}{100}.$$

Le micro-entrepreneur a décidé de vendre chaque pot 5 €.

2. (a) Le coût de fabrication pour $x$ pots est, par proportionnalité, $x \times 3{,}25$ €. Et comme l faut ajouter 500 € de frais fixes

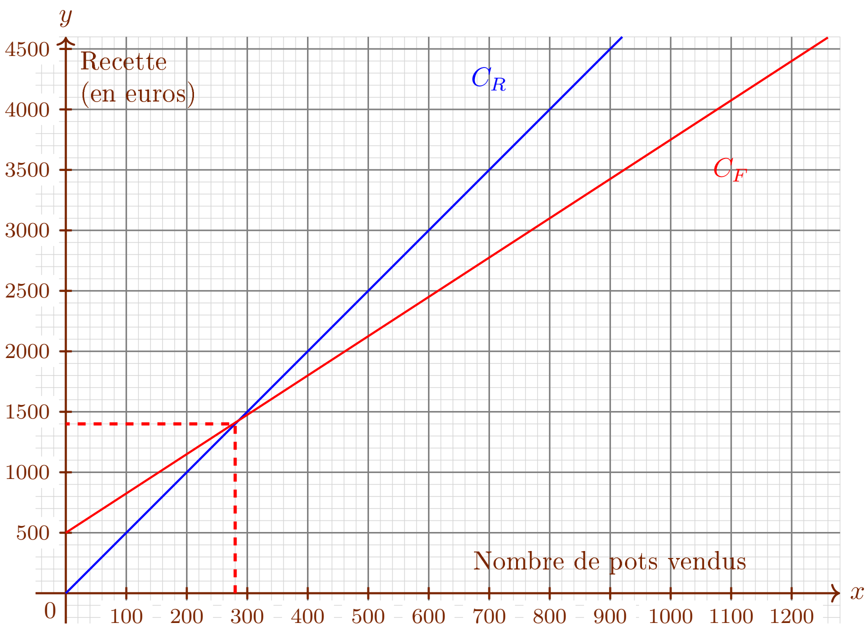
$F(x) = 3{,}25x + 500$ pour tout nombre entier naturel $x$.

(b) Pour dessiner la courbe représentative de $R$ qui est une demi-droite, il suffit de reporter deux points à partir de leurs coordonnées.




Traçons $C_F$.
$F$ est une fonction affine avec $a = 3{,}25$ et $b = 500$. Donc $C_F$ est une droite (ou une partie de droite).
Puisque l'ordonnée à l'origine est $b = 500$, $C_F$ passe par le point de coordonnées $(0; 3{,}25)$.

De plus pour, par exemple, $x = 1000$ alors $F(100) = 3{,}25 \times 1000 + 500 = 3750$. Donc $C_F$ passe par le point de coordonnées $(1000; 3750)$.




(c)

Le micro-entrepreneur dégage un bénéfice à partir de 280 pots vendus.

(d) Résolvons l'équation $F(x) \leqslant R(x)$.

$R$ est une fonction linéaire, ce qui correspond à une situation de proportionnalité, or nous savons que la vente d'un pot donne une recette de 5 € donc : $R(x) = 5x$.

$$\begin{aligned}
F(x) &\leqslant R(x)\\
3{,}25x + 500 &\leqslant 5x\\
3{,}25x + 550 - 5x &\leqslant 5x - 5x\\
-1{,}75x + 550 &\leqslant 0\\
-1{,}75x + 500 - 500 &\leqslant 0 - 500\\
-1{,}75x &\leqslant -500\\
\frac{-1{,}75x}{-1{,}75} &\geqslant \frac{-500}{-1{,}75} \text{ car } -1{,}75 < 0\\
x &\geqslant \frac{500}{1{,}75}
\end{aligned}$$

Or $\frac{500}{1{,}75} \approx 285{,}714$ en tronquant donc

il dégagera un bénéfice à partir de 286 pots vendus.

## Partie D.

1. (a) Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ du pot.

Toutes les longueurs étant exprimées en centimètres :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_1 &= B \times h\\
&= \left(\pi R^2\right) \times 8\\
&= \left(\pi \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) \times 8\\
&= 98\pi\\
&\approx 307{,}876
\end{aligned}$$

$\mathscr{V}_1 \approx 308 \text{ cm}^3$.

(b) Puisque 90 % du pot peut être rempli, le volume maximum de confiture est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{1m} &= \frac{90}{100} \times \mathscr{V}_1 \\ &\approx \frac{90}{100} \times 308 \\ &\approx 277{,}2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_{1m} \approx 277 \text{ cm}^3.}$$

2. (a) Calculons l'aire $\mathscr{A}_{hex}$ de l'hexagone.

L'hexagone est formé de 6 triangles équilatéraux dont l'aire est $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ où $x$ est la longueur d'un côté *i.e.* 4 cm.
Nous en déduisons l'aire exprimée en centimètre carré :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{hex} &= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \\ &= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \\ &= 24\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_{hex} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2.}$$

(b) Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ du pot n°2.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{2m} &= 24\sqrt{3} \text{ cm}^2 \times 8 \text{ cm} \\ &= 24 \times 8\sqrt{3} \text{ cm}^2 \times \text{cm} \\ &= 192\sqrt{3} \text{ cm}^3 \\ &\approx 332{,}5537 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_{2m} \approx 333 \text{ cm}^3.}$$

(c) Puisque 90 % du pot peut être rempli, le volume maximum de confiture est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{2m} &= \frac{90}{100} \times \mathscr{V}_2 \\ &\approx \frac{90}{100} \times 333 \\ &\approx 299{,}7\end{aligned}$$

i

$$\mathscr{V}_{2m} \approx 300 \text{ cm}^3.$$

## Exercice 3.

1. (a) Nous observons que le total désiré est atteint dans la cellule `E12`. Nous pouvons lire le nombre de cartes à 1,25 € correspondant en `A12` et celui de cartes à 2,50 € en `C12` :

il faut 9 cartes à 1,25 € et 15 cartes à 2,50 €.

(b) * On descend dans la colonne `B` en ajoutant 1,25 à chaque ligne.
* Sur une ligne, la somme des valeurs en `A` et `C` doit être de 24.
* On descend dans la colonne `D` en soustrayant 2,50.
* Sur une ligne, la valeur en `E` est la somme des valeurs en `B` et en `D`.

Finalement :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 13 | 16,25 | 11 | 27,5 | 43,75 |

(c) * En `B3` :

= `A3` ∗ 1,25

* En `C3` :

= 14 − `A3`

* En D3 :

$$= \texttt{C3} * 2{,}50$$

* En E3 :

$$= \texttt{B3} + \texttt{D3}$$

2. Déchiffrons ligne par ligne :
   — Si toutes les cartes coûtaient 2,5 € cela ferait un total de 60 €.
   — Cela signifie 11,25 € de trop par rapport au total désiré.
   — Or ces 11,25 € correspondent à 9 cartes à 1,25 €.
   — Il s'agit d'enlever les 9 cartes qui correspondent aux 11,25 € de trop, il y aura donc 15 cartes à 2,50 €.

3. Puisque le nombre total de carte est 24 et que la somme totale dépensée est de 48,75, $x$ et $y$ sont solution du système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 24 \quad (1) \\ 1{,}25x & + & 2{,}50y & = & 48{,}75 \quad (2) \end{array} \right.$$

Résolvons le système $(S)$ par substitution.

* D'après $(1)$ :

$$x = 24 - y. \quad (3)$$

* En substituant $x$ par cette expression dans $(2)$ :

$$1{,}25(24 - y) + 2{,}50y = 48{,}75.$$

Cette équation du premier degré d'inconnue $y$ équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 1{,}25 \times 24 - 1{,}25 \times y + 2{,}50y &= 48{,}75 \\ 30 - 1{,}25y + 2{,}5y &= 48{,}75 \\ 30 + 1{,}25y &= 48{,}75 \\ 30 + 1{,}25y - 30 &= 48{,}75 - 30 \\ 1{,}25y &= 18{,}75 \\ \frac{1{,}25y}{1{,}25} &= \frac{18{,}75}{1{,}25} \\ y &= 15 \end{aligned}$$

* En substituant $y$ par cette valeur dans (3) :

$$x = 24 - 15 = 9.$$

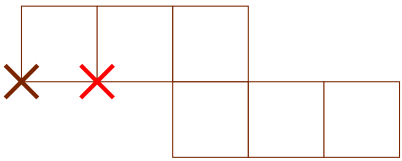
Il faut acheter 9 cartes à 1,25 € et 15 cartes à2,50 €.

## Exercice 4.

1. (a) *Cliquez sur ce lien pour télécharger le programme.*

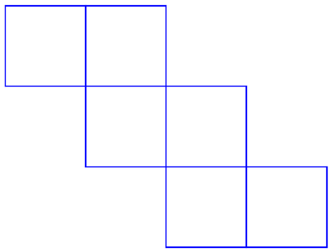
   Un pas mesure 0,005 cm donc, pour obtenir un segment de 3 cm, il faut avancer de : $\frac{3}{0{,}05} = 60$ pas.
   De plus pour obtenir un carré il faut évidemment tourner à angle droit.

Position finale du lutin



(b) Position initiale du lutin

(c)



2.