Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 0.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

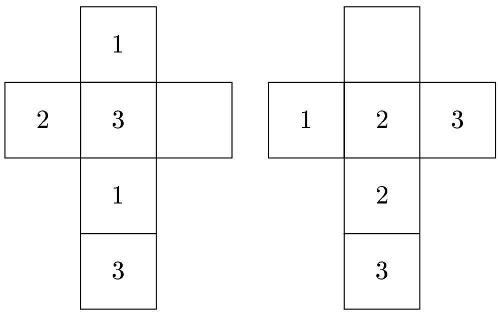
Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de six exercices indépendants.

Il est donc supposé y avoir six exercices mais le sujet n'en comportait que cinq.

Exercice 1.

Un enseignant de moyenne section de maternelle souhaite créer un jeu sur le modèle du jeu de l'oie pour travailler avec ses élèves la construction du nombre et en particulier des décompositions et recompositions de nombres de 1 à 6.

Il fabrique deux dés équilibrés selon les patrons suivants :

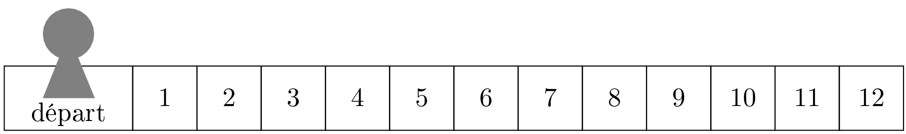


Il crée un parcours sur lequel les élèves déplacent un pion selon le protocole suivant :

— l'élève lance les deux dés ;

— il avance son pion d'autant de cases que la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés ; s'il n'obtient aucun nombre sur les deux dés (deux faces vierges), il passe son tour.

Le plateau de jeu est matérialisé par une bande numérique comme ci-dessous.



1. On lance le dé vert seul. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 ?

   Modélisation : notons Ω_1 l'ensemble des 6 faces du dé (en les distinguant toutes). L'univers est muni de la loi d'équiprobabilité, $\mathbb{P}_1$, puisque les dés sont équilibrés.
   Notons E l'événement « obtenir un 3 ».

   Calculons $\mathbb{P}_1(E)$.

   Ω_1 est muni de l'équiprobabilité, E est réalisé par 2 issues et Ω_1 contient 6 issues donc :

$$\mathbb{P}_1(E) = \frac{2}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_1(E) = \frac{1}{3}.}$$

Dans la suite de l'exercice, afin de simplifier les réponses, on pourra considérer que les faces vierges correspondent au nombre 0.

2. Un élève lance les deux dés, il calcule la somme des nombres obtenus.

   (a) Quelles sommes peuvent être obtenues ?

   Afin de nous ramener à l'équiprobabilité, et donc à un travail de dénombrement, nous allons modéliser en distinguant toutes les faces des dés. Par exemple les deux faces 3 du dé vert seront distinguées.
   Notons Ω_2 l'univers formé des 36 couples de faces des deux dés qu'il est possible d'obtenir et munissons-le de l'équiprobabilité $\mathbb{P}_2$.
   Schématisons l'expérience aléatoire par un tableau double entrée en indiquant ce qui nous intéresse à savoir les sommes en fonction des différentes faces.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Si on note X variable aléatoire qui à chaque lancer des deux dés associe la somme des nombres affichés vérifie donc : $X \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Les sommes possibles sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

(b) Quelle est la probabilité qu'il doive passer son tour ?

Notons P l'événement « passer son tour ».

Calculons $\mathbb{P}_2(P)$.

Ω_2 est muni de l'équiprobabilité, P est réalisé par 1 issue et l'univers, Ω_2, contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(P) = \frac{1}{36}$$

(c) Quelle est la probabilité qu'il doive avancer de 3 cases ?

Notons F l'événement « avancer de trois cases ».

Calculons $\mathbb{P}_2(F)$.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Ω_2 est muni de l'équiprobabilité, d'après le tableau F est réalisé par 8 issues et l'univers, Ω_2, contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{9}{36}$$

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{4}$$

(d) Déterminer la probabilité de chacun des résultats possibles.

En procédant comme à la question précédente nous obtenons :

Somme	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$

(e) Quelle est la probabilité que le résultat du dé vert soit strictement supérieur à celui du dé bleu ?

Notons G l'événement « le résultat du vert est strictement supérieur à celui du dé bleu ».

Calculons $\mathbb{P}_2(G)$.

Utilisons le tableau pour dénombrer les issues qui nous intéressent même si les sommes ne servent à rien.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Ω_2 est muni de l'équiprobabilité, d'après le tableau G est réalisé par 12 issues et l'univers, Ω_2, contient 36 issues donc :

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{12}{36}$$

$$\mathbb{P}_2(F) = \frac{1}{3}$$

3. Après deux tours de jeu, un élève est arrivé sur la case 10. Quelle est la probabilité qu'il se soit arrêté sur la case 4 au premier tour ?

Notons H l'événement « obtenir 4 au premier tour » et K l'événement « arriver sur la case 10 au deuxième tour ».

Calculons $\mathbb{P}_K(H)$ la probabilité que l'élève s'arrête sur la case 4 sachant qu'il est arrivé sur la case 10 au deuxième tour.

Avec les probabilités conditionnelles tout ce passe comme si l'univers était modifié.

Puisque l'élève est arrivé sur la case 10 il a forcément obtenu un nombre strictement supérieur à 3.

Donc l'univers n'est plus Ω_2 mais pas l'univers Ω_3 regroupant les issues correspondant aux cases colorées ci-dessous.

dé bleu \ dé vert	0	1	1	2	3	3
0	0	1	1	2	3	3
1	1	2	2	3	4	4
2	2	3	3	4	5	5
2	2	3	3	4	5	5
3	3	4	4	5	6	6
3	3	4	4	5	6	6

Les issues ayant toutes la même chance d'être obtenues nous munissons Ω_3 de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$. Ainsi Ω_3 contient 18 issues.

De plus il y a 8 issues correspondant l'obtention d'un 4 donc

$$\mathbb{P}_K(H) = \frac{8}{18}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_K(H) = \tfrac{4}{9}.}$$

Exercice 2.

Un nombre décimal est souvent défini de la façon suivante : « Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $dfraca10^n$ où a est un nombre entier et n est un nombre entier positif. ».

1. On s'appuiera sur la définition précédente pour répondre aux deux questions suivantes.

   (a) Montrer que 0,127 est un nombre décimal.

   Montrons que 0,127 est un nombre décimal.

$$0{,}127 = \frac{127}{1000} = \frac{127}{10^3}.$$

Donc 0,127 peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a = 127$ qui est un entier et $n = 3$ un nombre entier positif.

0,127 est un nombre décimal.

(b) Montrer que $\frac{1}{4}$ est un nombre décimal.

Montrons que $\frac{1}{4}$ est décimal.

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = \frac{25}{10^2}.$$

Comme $a = 25 \in \mathbb{Z}$ et $n = 2 \in \mathbb{N}$:

$\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$.

2. Dans une classe de CM2 un enseignant demande aux élèves de dire ce qu'est un nombre décimal, voici trois réponses proposées par des élèves :
   — Élève A : « *Un nombre décimal est un nombre avec une virgule.* »
   — Élève B : « *Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une fraction qui a* 10 *ou* 100 *au dénominateur.* »
   — Élève C : « *Un nombre décimal est un nombre qui n'est pas entier.* »

   Expliquer pourquoi chacune des définitions proposées ne convient pas d'un point de vue mathématique. On pourra notamment s'appuyer sur des contre-exemples.

* La proposition de l'élève A ne convient pas car $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ est un nombre avec une virgule mais ce n'est pas un nombre décimal.
* La proposition de l'élève B ne convient pas car 0,127 est un nombre décimal mais il ne peut pas s'écrire comme une fraction avec 10 ou 100 au dénominateur.
* La proposition de l'élève C ne convient pas car les nombres entiers sont des décimaux, par exemple, $3 = \frac{30}{10^1}$.

3. Parmi les nombres suivants dire, en justifiant, lesquels sont décimaux et lesquels ne le sont pas : 2,48 ; $\dfrac{7}{25}$; 12 ; $\dfrac{7}{9}$; $\dfrac{49}{14}$.

   * $2{,}48 = \frac{248}{10^2}$. Donc

     $$2{,}48 \in \mathbb{D}.$$

   * $\frac{7}{25} = \frac{28}{10^2}$. Donc

     $$\frac{7}{25} \in \mathbb{D}.$$

   * $12 = \frac{12}{10^0}$. Donc

     $$12 \in \mathbb{D}.$$

   * $\frac{7}{9} = 0{,}777\ldots$. Donc

     $$\frac{7}{9} \in \mathbb{D}.$$

   * $\frac{49}{14} = \frac{7}{2} = \frac{35}{10} = \frac{35}{10^1}$. Donc

     $$\frac{49}{14} \in \mathbb{D}.$$

4. Le produit de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

   Soient $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.

   $$\begin{aligned}\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} &= \frac{a \times b}{10^n \times 10^m} \\ &= \frac{a \times b}{10^{n+m}}\end{aligned}$$

   Comme $a \times b \in \mathbb{Z}$ et $n + m \in \mathbb{N}$, on a $\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} \in \mathbb{D}$.
   Finalement

   > Le produit de deux nombres décimaux est encore un nombre décimal.

5. Le quotient de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

   1 et 3 sont des nombres décimaux mais $\frac{1}{3} = 0{,}333\cdots \notin \mathbb{D}$.

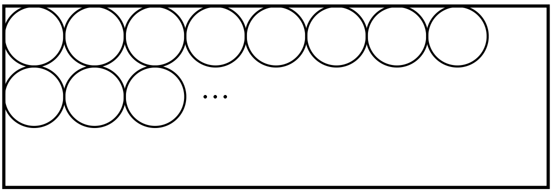
   Le quotient de deux nombres décimaux n'est pas nécessairement décimal.

Exercice 3.

Partie A.

Alice veut réaliser une activité avec ses élèves de petite section de maternelle. Elle a besoin de découper 30 disques de 14 cm de rayon dans des feuilles de dimensions 120 cm × 80 cm, c'est-à-dire de 120 cm de longueur sur 80 cm de largeur.

Elle aimerait les dessiner en occupant l'espace de chaque feuille en commençant en haut à gauche puis en continuant comme dans la figure ci-dessous.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

1. Calculer l'aire de la feuille, en cm^2.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}_f$ de la feuille.

   Il s'agit d'un rectangle donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_f &= 120 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}\\ &= 120 \times 80 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_f = 9600 \text{ cm}^2.$$

2. (a) Expliquer pourquoi Alice peut tracer au maximum 4 disques dans la longueur de la feuille.

Déterminons le nombre n_L de disque qui entre dans une longueur.

Chaque disque ayant un rayon de 14 cm et la feuille ayant une longueur de 120 cm il faut que :

$$n_L \times (2 \times 14 \text{ cm}) \leqslant 120 \text{ cm}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} n_L \times 28 \text{ cm} &\leqslant 120 \text{ cm} \\ \frac{n_L \times 28 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} &\leqslant \frac{120 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} \quad \text{car } 28 > 0 \\ n_L &\leqslant \frac{30}{7} \end{aligned}$$

Or, en tronquant, $\frac{30}{7} \approx 4{,}28$ donc

$$\boxed{\text{le nombre, entier, de disques entiers qu'il est possible de tracer est au maximum de 4.}}$$

(b) En déduire le nombre maximum de disques qu'elle pourra tracer dans cette feuille.

Déterminons le nombre maximum de disque qu'il est possible de placer dans une largeur.

En procédant à une division euclidienne (pour changer un peu de ce qui a été fait à la question précédente) :

$$80 = 2 \times 28 + 24$$

$$\boxed{\text{Il est donc loisible de placer 2 disques entiers dans le sens de la largeur.}}$$

(c) Combien faut-il au minimum de feuilles pour dessiner les 30 disques ?

Déterminons le nombre de feuilles nécessaires.

Une feuille contient au maximum 4 disques par lignes et 2 lignes donc $2 \times 4 = 8$ disques.

Puisqu'il faut 30 disques le nombre de feuilles nécessaire s'obtient par division euclidienne :

$$30 = 3 \times 8 + 6$$

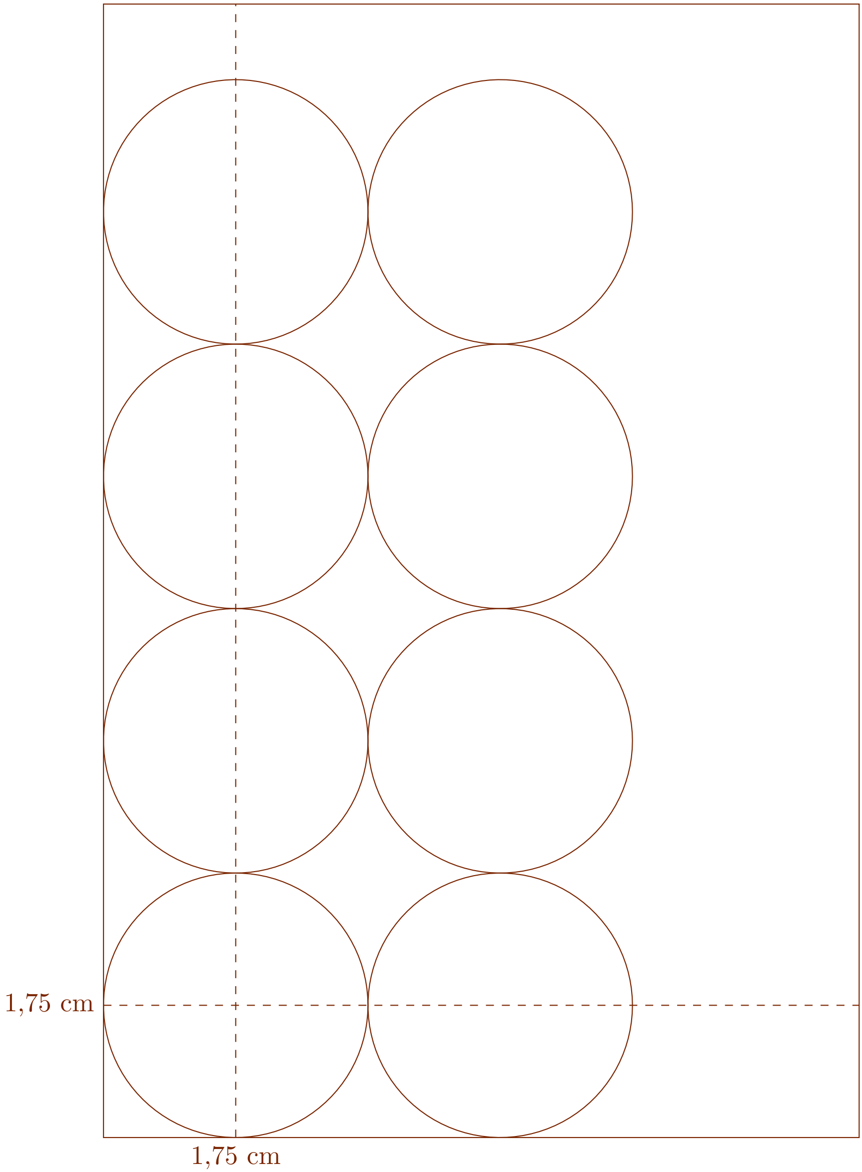
En utilisant 3 feuilles il manquera encore 6 disques donc :

il faudra 4 feuilles.

3. Représenter à l'échelle 1/8 une feuille de dimensions 120 cm × 80 cm avec les disques qu'elle peut contenir.

Puisque l'échelle est 1/8 :

Réel	14 cm	120 cm	80 cm
Échelle	1,75 cm	15 cm	10 cm



4. Calculer l'aire exacte d'un disque puis donner la valeur arrondie au centimètre carré près.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}_d$ d'un disque.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_d &= \pi R^2\\ &= \pi \times (14\text{ cm})^2\\ &= \pi \times 14^2\text{ cm}^2\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathscr{A}_d = 196\pi\text{ cm}^2.}$$

En arrondissant au centimètre carré :

$$\boxed{\mathscr{A}_d \approx 616\text{ cm}^2.}$$

Dans la suite du problème, on considérera que l'aire d'un disque est de 616 cm^2.

5. (a) Quelle est l'aire de papier non utilisé si Alice découpe 8 disques dans une feuille ?
   Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale de la feuille cela représente-t-il ?

   * D'après les questions A.1 et A.4 l'aire de la feuille en ôtant les huit disques est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_c &\approx 9600\text{ cm}^2 - 8 \times 616\text{ cm}^3\\ &\approx (9600 - 8 \times 616)\text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire des chutes sur une feuille est } \mathscr{A}_c \approx 4672\text{ cm}^2.}$$

   * Déterminons la proportion p des chutes pour une feuille.

$$\begin{aligned}p &= \frac{4672\text{ cm}^2}{9600\text{ cm}^2}\\ &= \frac{4672}{9600}\\ &= \frac{73}{150}\\ &\approx 0{,}48666 \quad \text{en tronquant}\end{aligned}$$

49 % de chaque feuille utilisée pour faire 8 disques est constituée de chutes.

(b) Quelle est l'aire de papier non utilisé après avoir découpé 30 disques ? Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale des feuilles utilisées cela représente-t-il ?

Calculons l'aire $\mathscr{A}_{30}$ de papier non utilisé pour faire 30 disques.

Sur trois des quatre feuilles l'aire de la chute est $\mathscr{A}_c$ mais sur la quatrième il n'y a que 6 disques donc la chute est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_r &=\approx 9600\ \text{cm}^2 - 6 \times 616\ \text{cm}^3\\ &\approx (9600 - 6 \times 616)\ \text{cm}^2\\ &\approx 5904\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

Ainsi les chutes représentent :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{30} &\approx 3 \times \mathscr{A}_c +\\ &\approx 3 \times 4672\ \text{cm}^2 + 5904\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_{30} \approx 19920\ \text{cm}^3.$$

6. Pour limiter le gaspillage de papier, Alice veut choisir le format qui permettra d'obtenir le moins de chutes (en cm^2) tout en gardant la même disposition que précédemment. Elle a le choix entre plusieurs formats proposés par un fournisseur :

Nom	**Dimensions**
Raisin	65 cm × 50 cm
Jésus	75 cm × 56 cm
Impérial	80 cm × 60 cm
Grand Aigle	105 cm × 75 cm
Grand Monde	120 cm × 80 cm

Pour obtenir les 30 disques, le format Grand Aigle permet-il d'obtenir moins de chutes (en cm^2) que le format Grand Monde ? Justifier la réponse.

Le format Grand Aigle peut accueillir exactement le même nombre de disque et avec la même disposition que le format Grand Monde. Cependant ce dernier est d'une superficie plus réduite ce qui minimise les déchets :

> le format Grand Aigle permet d'obtenir moins de chutes.

Partie B.

D'autres classes veulent réaliser la même activité. La directrice se demande quel format permettra d'obtenir moins de chutes en fonction du nombre de disques à découper.

Pour cela, elle utilise un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre de disques	Surface des disques (en cm²)	Raisin : surface des chutes (en cm²)	Jésus : surface des chutes (en cm²)	Impérial : surface des chutes (en cm²)	Grand aigle : surface des chutes (en cm²)	Grand monde : surface des chutes (en cm²)
2	1	616	2634	3584	4184	7259	8984
3	2	1232	2018	2968	3568	6643	8368
4	3	1848	4652	2352	2952	6027	7752
5	4	2464	4036	1736	2336	5411	7136
6	5	3080	6670	5320	6520	4795	6520
7	...	...	...	...	...	...	...
8	26	16016	26234	13384	17584	23359	22384
9	27	16632	28868	12768	16968	22743	21768
10	28	17248	28252	12152	16352	22127	21152
11	29	17864	30886	15736	20536	21511	20536
12	30	18480	30270	15120	19920	20895	19920
13	...	...	...	...	...	...	...
14	320	197120	322880	138880	186880	228130	186880
15	321	197736	325514	142464	191064	227514	195864
16	322	198352	324898	141848	190448	226898	195248
17	323	198968	327532	141232	189832	226282	194632
18	324	199584	326916	140616	189216	225666	194016
19	325	200200	329550	144200	193400	232925	193400

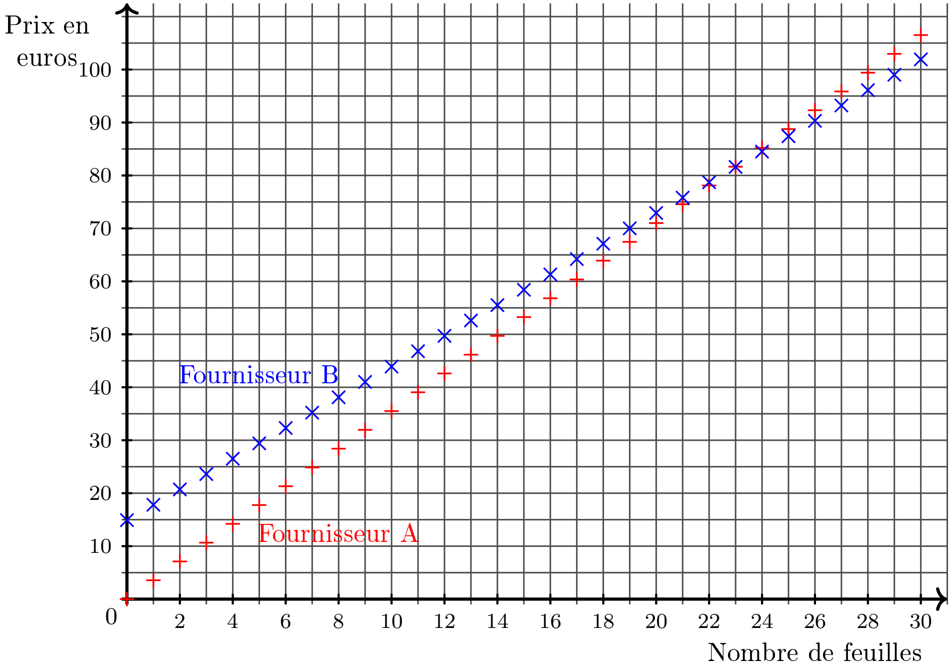
1. Sans justifier, donner la formule qui a été saisie dans la cellule B2 et étirée vers le bas.

   > = 616 ∗ A1.

2. Sans justifier, donner le format permettant d'éviter au mieux le gaspillage de papier si l'on veut réaliser 325 disques.

   > Pour 325 disques il faut choisir le format Jésus.

3. Les deux seuls fournisseurs disponibles ne disposent plus que de feuilles au format « Grand Monde ». La directrice veut choisir le fournisseur qui propose le tarif le plus avantageux pour acheter les feuilles nécessaires à la réalisation des disques. On a représenté graphiquement ci-dessous le prix en fonction du nombre de feuilles commandées chez chaque fournisseur :



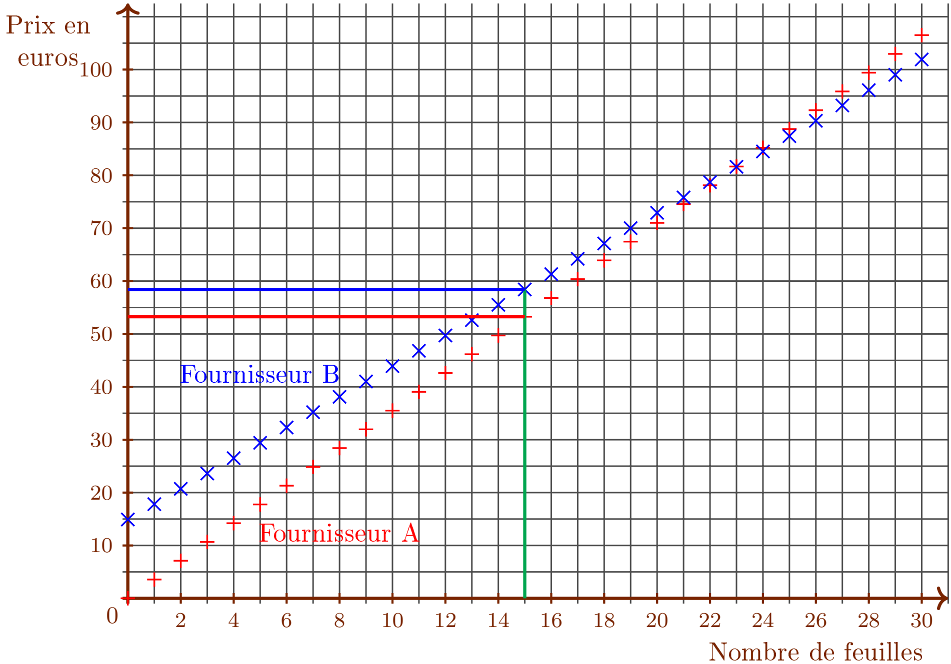
(a) Chez un des deux fournisseurs le coût des feuilles est proportionnel au nombre de feuilles achetées. Lequel ? On justifiera la réponse.

Les deux séries de points sont alignés. Les deux droites correspondant sont les courbes représentatives de deux fonction affines. Or une fonction affine représente une situation de proportionnalité si elle est linéaire et elle est linéaire si sa courbe représentative passe par l'origine du repère.

Le coût est proportionnel chez le fournisseur A.

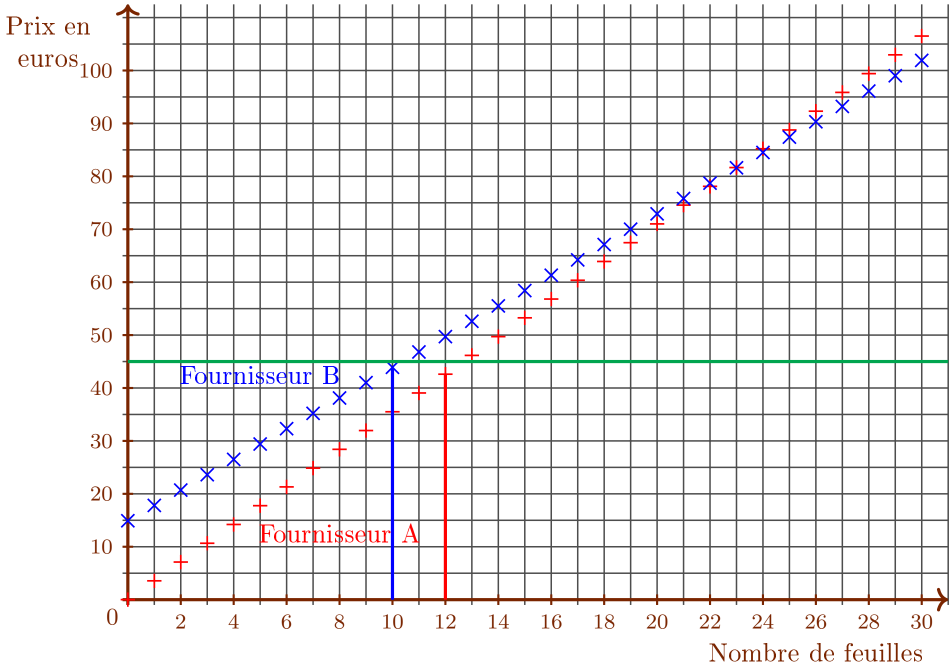
Répondre aux questions suivantes par lecture graphique, sans justifier.

(b) Quel est le prix que va coûter l'achat de 15 feuilles chez chaque fournisseur ?



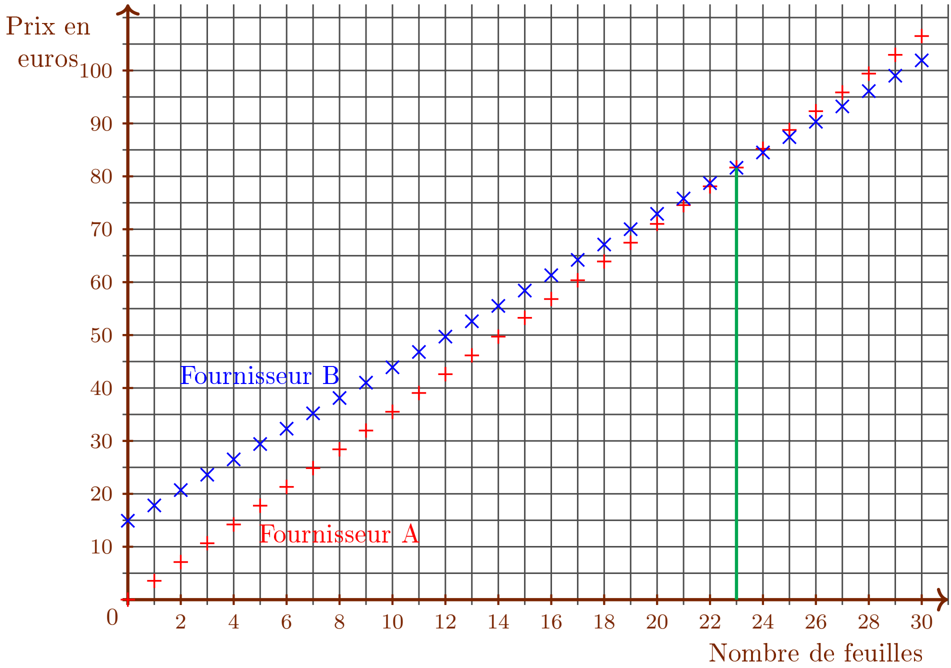
15 feuilles coûtent 53 € chez le fournisseur A et 58 € chez le fournisseur B.

(c) Déterminer le nombre maximal de feuilles que l'on peut acheter chez chaque fournisseur si l'on dispose d'un budget de 45 €.



Avec 45 euro il est possible d'acheter 12 feuilles chez le fournisseur A et 10 chez le fournisseur B.

(d) À partir de combien de feuilles est-il plus avantageux de commander chez le fournisseur B ?



Le fournisseur B devient avantageux à partir de 23 feuilles commandées.

4. On a maintenant représenté sous forme de tableau les tarifs proposés par chaque fournisseur :

	Coût d'une feuille (en €)	Frais de port (en €)
Fournisseur A	3,55	Gratuit
Fournisseur B	2,90	14,90

(a) Quel est le prix que va coûter l'achat de 15 feuilles chez chaque fournisseur ?

Déterminons le coût de 15 feuilles, $u_A(15)$ et $u_B(15)$ chez les deux fournisseurs.

*

$$u_A(15) = 15 \times 3{,}55$$

$$u_A(15) = 53{,}25 \text{ €}.$$

*

$$u_B(15) = 2{,}90 \times 15 + 14{,}90$$

$$u_B(15) = 58{,}40 \text{ €}.$$

(b) Déterminer le nombre de feuilles que l'on peut acheter chez chaque fournisseur si l'on dispose d'un budget de 312 €.

* Résolvons $u_A(x) = 312$.

$$\begin{aligned} u_A(x) &= 312 \\ 3{,}55x &= 312 \\ \frac{3{,}55x}{3{,}55} &= \frac{312}{3{,}55} \end{aligned}$$

Donc :

$$x \approx 87{,}88$$

Avec 312 € il est possible d'acheter 87 feuilles chez le fournisseur A.

* Résolvons $u_B(x) = 312$.

$$\begin{aligned} u_B(x) &= 312 \\ 2{,}90x + 14{,}90 &= 312 \\ 2{,}90x + 14{,}90 - 14{,}90 &= 312 - 14{,}90 \\ 2{,}90x &= 297{,}1 \\ \frac{2{,}90x}{2{,}90} &= \frac{297{,}1}{2{,}90} \end{aligned}$$

Donc :

$$x \approx 102{,}44$$

Avec 312 € il est possible d'acheter 102 feuilles chez le fournisseur B.

(c) À partir de combien de feuilles est-il plus avantageux de commander chez le fournisseur B ? Justifier la réponse.

Dire que le fournisseur B est plus avantageux c'est dire que : $u_A(x) \geqslant u_B(x)$.

Résolvons l'inéquation $u_A(x) \geqslant u_B(x)$.

$$\begin{aligned} 3{,}55x &\geqslant 2{,}9x + 14{,}9 \\ 3{,}55x - 2{,}9x &\geqslant 2{,}9x + 14{,}9 - 2{,}9x \\ 0{,}65x &\geqslant 14{,}9 \\ \frac{0{,}65x}{0{,}65} &\geqslant \frac{14{,}9}{0{,}65}, \text{ car } 0{,}65 > 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{14{,}9}{0{,}65} \approx 22{,}92$ donc

le fournisseur B est plus avantageux à partir de 23 feuilles commandées.

(d) Sachant qu'il y a 325 disques à dessiner et que l'on peut en mettre 8 par feuille, quelle entreprise la directrice va-t-elle choisir ? Quel sera le prix de cette commande ?

$325 = 8 \times 40 + 5$, il faut donc acheter 41 feuilles.
D'après la question précédente

il faut choisir le fournisseur B.

$2{,}9 \times 41 + 14{,}9 = 133{,}8$ donc

la commande coûtera 133,80 €.

Partie C.

1. Après avoir découpé les 30 disques, Alice veut les border d'un fil de laine. Quelle longueur de laine devra-t-elle utiliser pour border tous les disques ? On donnera le résultat en mètre, arrondi au décimètre.

   Calculons la longueur ℓ de fil.

   Le périmètre d'un disque est :

$$\begin{aligned} p_d &= 2\pi R \\ &= 2\pi \times 14 \text{ cm} \\ &= 28\pi \text{ cm} \end{aligned}$$

   Donc, pour les 30 disques :

$$\begin{aligned} \ell &= 30 \times p_d \\ &= 30 \times 28\pi \text{ cm} \\ &= 840\pi \text{ cm} \\ &= 840\pi \times \frac{1}{100} \text{ m} \\ &= 8{,}4\pi \text{ m} \\ &\approx 26{,}389 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\boxed{\ell \approx 26{,}4 \text{ m.}}$$

2. Alice met 48 minutes à dessiner et découper les 30 disques alors que son collègue Bertrand met 1 heure et 12 minutes à effectuer cette tâche.

   (a) Donner le temps moyen que met Alice pour découper un disque (en minutes et secondes).

   Déterminons le temps moyen t_A mis par Alice.

$$
\begin{aligned}
t_A &= \frac{48 \text{ min}}{30} \\
&= \frac{30+18}{30} \text{ min} \\
&= 1\text{min} + \frac{18 \times 2}{30 \times 2} \text{ min} \\
&= 1 \text{ min} + 18 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\
&= 1 \text{ min} + 18 \text{ s}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{t_A = 1 \text{ min} + 18 \text{ s.}}$$

(b) Combien de temps mettront-ils pour découper les 30 disques ensemble ? Donner le résultat en minute et seconde.

Notons n le nombre de disque découpé par Alice s'ils se partagent le travail.

Déterminons n.

On a $t_A = 1{,}6$ min.
Le temps moyen de fabrication pour Bertrand est : $t_B = \frac{1 \text{ h}+12 \text{ min}}{30} = 2{,}4$ min
Donc on doit avoir dans l'idéal un temps de travail égal pour les deux :

$$
\begin{aligned}
n \times t_A &= (30-n) \times t_B \\
n \times 1{,}6 &= (30-n) \times 2{,}4 \\
1{,}6n + 2{,}4n &= 30 \times 2{,}4 \\
4n &= 7{,}2 \\
n &= \frac{72}{4} \\
n &= 18
\end{aligned}
$$

Donc le temps mis est :

$$
\begin{aligned}
18t_A &= 18 \times 1{,}6 \text{ min} \\
&= 28{,}8 \text{ min} \\
&= 28 \text{ min} + 0{,}8 \times 60 \text{ s}
\end{aligned}
$$

Il faudra 28 min et 48 s.

Exercice 4.

Soit M un nombre entier naturel inférieur à 100. On note u le chiffre des unités du nombre M et d son chiffre des dizaines.
Soit N un nombre entier naturel inférieur à 100, ayant le même chiffre d des dizaines que M et tel que son chiffre v des unités vérifie $u + v = 10$.

Par exemple, pour $M = 34$, alors $N = 36$ vérifie ces conditions.

Pour M et N vérifiant les conditions ci-dessus, on propose d'utiliser l'algorithme ci-dessous pour calculer le produit $M \times N$.

Algorithme de calcul.
- On calcule le produit de d et de l'entier suivant $d + 1$.
- On calcule le produit de u et de v.
- On ajoute au produit de u et de v, 100 fois le produit de d et de l'entier suivant $d + 1$.
- La somme obtenue est le produit $M \times N$.

1. Vérifier en détaillant les calculs que cet algorithme fonctionne pour 34×36.

Effectuons les trois étapes de l'algorithme.

1	$d \times (d + 1) = 3 \times (3 + 1) = 12$.
2	$u \times v = 4 \times 6 = 24$.
3	$u \times v + 100 \times d(d + 1) = 24 + 100 \times 12 = 1224$.

Or effectivement $34 \times 36 = 1224$ donc

l'algorithme fonctionne pour 34×36.

2. Démontrer que cet algorithme de calcul donne effectivement le résultat escompté pour tous les couples de nombres M et N vérifiant les conditions mentionnées en début d'exercice. On pourra utiliser les égalités $M = 10d + u$ et $N = 10d + v$.

Démontrons que $M \times N = u \times v + 100 \times d(d + 1)$.

$$\begin{aligned} M \times N &= (10d + u) \times (10d + v) \\ &= 10d \times 10d + 10d \times v + u \times 10d + u \times v \\ &= 100d^2 + 10d(v + u) + u \times v \\ &= 100d^2 + 10d \times 10 + u \times v \\ &= 100d \times d + 100d \times 1 + u \times v \\ &= 100d \times (d + 1) + u \times v \end{aligned}$$

L'algorithme fonctionne bien.

3. Montrer comment on peut utiliser cet algorithme de calcul, en détaillant les calculs, pour calculer mentalement $4{,}2 \times 4{,}8$.

   Effectuons les trois étapes de l'algorithme.

1	$d \times (d + 1) = 4 \times (4 + 1) = 20.$
2	$u \times v = 2 \times 8 = 16.$
3	$0{,}01 \times u \times v + d(d + 1) = 0{,}01 \times 16 + 20 = 20{,}16.$

   Or effectivement $34 \times 36 = 1224$ donc

   l'algorithme fonctionne pour 34×36.

Exercice 5.

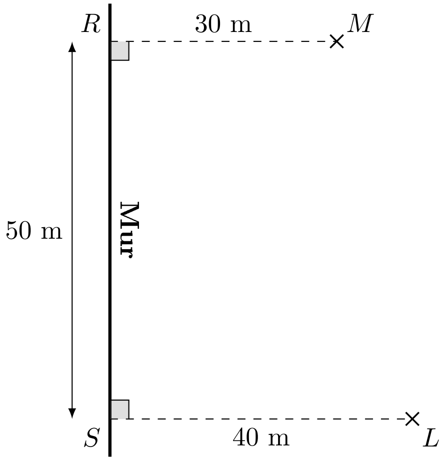
On propose un jeu dans une cour de récréation.

Pour cela on s'appuie sur des croix peintes au sol comme indiquée sur le schéma ci-dessous :

— la croix M est située à 30 m du mur d'enceinte de l'école ($MR = 30$ m) ;

— la croix L est située à 40 m du mur d'enceinte de l'école ($LS = 40$ m) ;

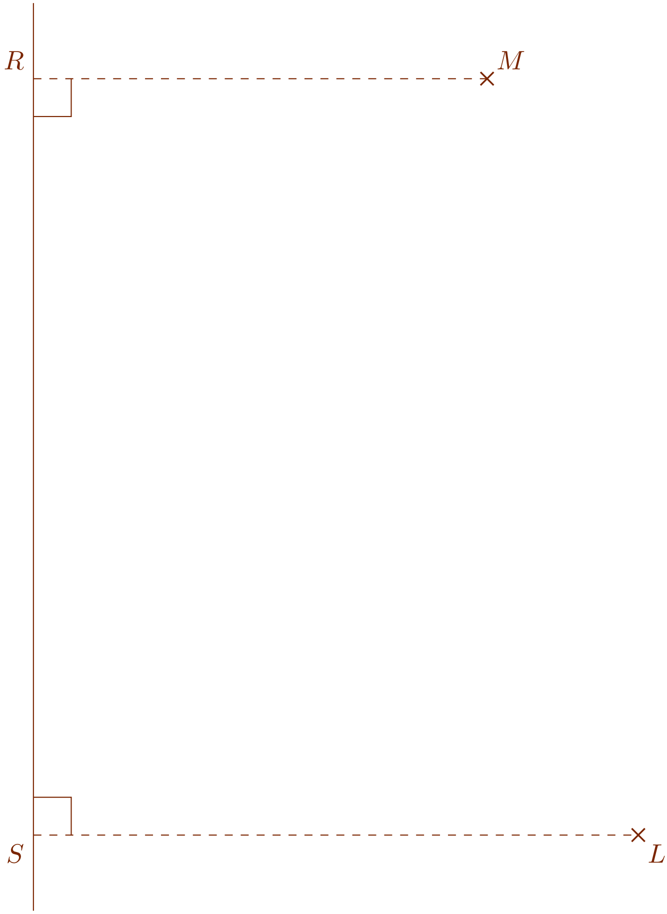
— les points R et S sont distants de 50 m ($RS = 50$ m).



Mila, une élève, se trouve sur la croix M et Lucien, un autre élève, se trouve sur la croix L. L'enseignante souhaite que Mila et Lucien courent tous les deux vers un même point de contact au mur ; le gagnant sera le premier à toucher ce point sur le mur. Pour que l'épreuve soit équitable, l'enseignante souhaite que le point de contact soit à égale distance des positions initiales des deux élèves, c'est-à-dire des croix L et M.

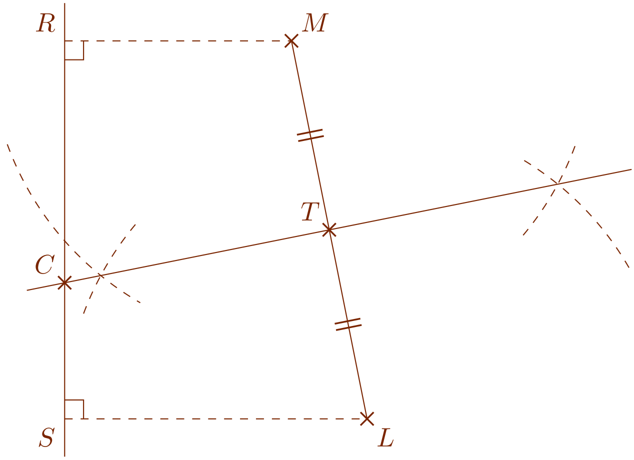
1. Construire à l'échelle le plan de la cour avec les points M, L, R et S en choisissant comme échelle 1 cm pour 5 m.

Longueur réelle	30 m	40 m	50 m
Longueur à l'échelle	6 cm	8 cm	10 cm



2. (a) Sur la figure, construire le point T, milieu du segment $[ML]$. Tracer la droite perpendiculaire à (ML) et passant par T. On note C le point d'intersection de cette droite avec le mur.

La droite à tracer est la médiatrice de $[ML]$. Tracé à la règle et au compas. La figure suivante est à l'échelle $1/2$ par rapport à celle demandée.



(b) Justifier que le point C est le point de contact cherché.

La droite (CT) est la médiatrice de $[ML]$ puisqu'elle passe par le milieu du segment et est perpendiculaire à ce segment.
Or les points de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment. En particulier C est équidistant de M et de L.
Comme de plus c'est un point de $[RS]$:

C est le point de contact recherché.

(c) Mesurer la longueur RC sur le plan et en déduire une estimation de la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.

Sur la figure à l'échelle

la distance entre R et C mesure 3,2 cm.

Par proportionnalité :

1 cm	5 m
6,4 cm	$6{,}4 \times 5$ m = 32 m

La distance entre les points R et C dans la cours de récréation est approximativement de 16 m.

3. On note x la distance, exprimée en mètre, entre les points R et C dans la cour de récréation.

   (a) Déterminer les longueurs MC et CL en fonction de x.

      * Exprimons MC en fonction de x.

        RMC est rectangle en R donc, d'après le théorème de Pythagore, on a
        $$CR^2 + RM^2 = MC^2.$$
        Nous en déduisons successivement :
        $$MC^2 = x^2 + 30^2$$
        $$MC^2 = x^2 + 900$$
        Puisque MC est une longueur c'est un nombre positif et donc :
        $$\boxed{MC = \sqrt{x^2 + 900}.}$$

      * Exprimons CL en fonction de x.

        CSL est rectangle en S donc, d'après le théorème de Pythagore, on a
        $$CS^2 + SL^2 = CL^2.$$
        Nous en déduisons successivement :
        $$CL^2 = (50 - x)^2 + 40^2$$
        $$CL^2 = (50 - x)^2 + 1600$$
        Puisque CL est une longueur c'est un nombre positif et donc :
        $$\boxed{CL = \sqrt{(50 - x)^2 + 1600}.}$$

   (b) En déduire la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.

* Analyse.
  Supposons que nous ayons trouvé C.
  On a donc :

$$MC = CL$$

  D'où :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+900} &= \sqrt{(50-x)^2+1600} \\
x^2+900 &= (50-x)^2+1600 \\
x^2+900 &= \left(50^2-2\times 50\times x+x^2\right)+1600 \\
x^2+900 &= x^2-100x+2500+1600 \\
x^2+900-x^2 &= x^2-100x+4100-x^2 \\
900 &= -100x+4100 \\
900-4100 &= 100x+4100-4100 \\
-3200 &= -100x \\
\frac{-3200}{-100} &= \frac{-100x}{-100} \\
32 &= x
\end{aligned}$$

* Synthèse.
  $0 \leqslant 32 \leqslant 50$ et si $x = 32$ alors on a bien $LC = LM$.

Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 1.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

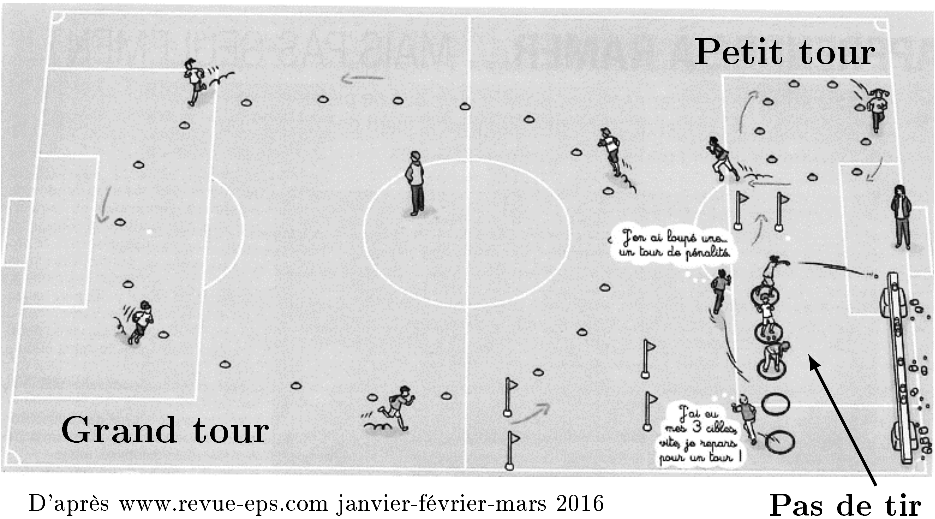
Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

Exercice 1.

Dans cette version adaptée du biathlon, les élèves ont à parcourir, en courant, 4 grands tours tracés avec des plots sur un stade comme dans la figure ci-dessous.

À l'issue de chacun des 3 premiers tours, ils se présentent au pas de tir et lancent 3 balles sur des cibles. S'ils atteignent 3 fois leur cible, ils n'ont pas de pénalité et repartent pour le grand tour suivant. En revanche, pour chaque lancer manqué, ils doivent effectuer un petit tour avant de repartir sur le grand tour.

Pour chaque élève on mesure la durée mise pour faire un parcours complet (grands tours + lancers + petits tours de pénalité le cas échéant). L'objectif est de mettre le moins de temps possible pour effectuer le parcours complet.



D'après www.revue-eps.com janvier-février-mars 2016

Partie 1.

Dans cette partie, les élèves s'entraînent à la course sur le grand tour, sans effectuer de lancer de balles.

1. Pour un élève de CE1, la longueur du grand tour est de 250 m.

   (a) On considère un élève, qui effectue les 4 tours en 10 minutes. Quelle est sa vitesse moyenne de course, en mètre par minute ?

   Exprimons la vitesse v_1 de cet élève en m/min.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d}{t} \\ &= \frac{4 \times 250 \text{ m}}{10 \text{ min}} \end{aligned}$$

$$v_1 = 100 \text{ m/min.}$$

(b) Un autre élève a couru les 4 tours à la vitesse moyenne de 150 m/min. Déterminer sa vitesse moyenne en kilomètre par heure.

Exprimons la vitesse v_2 de cet élève en km/h.

$$\begin{aligned} v_2 &= 150 \text{ m/s} \\ &= 150 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 150 \ \frac{\frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{1}{60} \text{ h}} \\ &= 150 \times \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{60}} \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= \frac{150 \times 60}{1000} \text{ km/h} \end{aligned}$$

$$v_2 = 9 \text{ km/h.}$$

2. Dans le tableau ci-dessous, les longueurs d'un grand tour pour des élèves de CM1 et de CM2 sont données, ainsi que les temps de course pour effectuer 4 grands tours, de deux élèves (un en CM1 et un en CM2).

Élève	**Longueur de 1 grand tour**	**Temps de course pour 4 grands tours**
Élève de CM1	400 m	9 minutes et 30 secondes
Élève de CM2	500 m	11 minutes et 8 secondes

Déterminer la vitesse moyenne (en mètre par minute, arrondie à l'unité) de chacun de ces deux élèves, lorsqu'ils ont réalisé les 4 grands tours.

* Exprimons la vitesse v_3 de l'élève de CM1 en m/min.

$$\begin{aligned} 9 \text{ min} + 30 \text{ s} &= 9 \text{ min} + 30 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\ &= 9{,}5 \text{ min} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{4 \times 400 \text{ m}}{9{,}5 \text{ min}} \\ &= \frac{4 \times 400}{9{,}5} \frac{\text{m}}{\text{min}} \\ &\approx 168{,}421 \text{ m/min en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_3 \approx 168 \text{ m/min.}}$$

* Exprimons la vitesse v_4 de l'élève de CM2 en m/min.

$$\begin{aligned} 11 \text{ min} + 8 \text{ s} &= 11 \text{ min} + 8 \times \frac{1}{60} \text{ min} \\ &= \frac{167}{15} \text{ min} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_4 &= \frac{4 \times 500 \text{ m}}{\frac{167}{15} \text{ min}} \\ &= \frac{2000}{\frac{167}{15}} \frac{\text{m}}{\text{min}} \\ &\approx 179{,}6407 \text{ m/min en tronquant} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_5 \approx 180 \text{ m/min.}}$$

Partie 2.

Dans cette partie, des élèves de CE1 font l'épreuve de biathlon dans sa totalité :

> Les 4 grands tours + les 3 épreuves de lancers de 3 balles + les éventuels tours de pénalité.

On rappelle que pour un élève de CE1, la longueur du grand tour est de 250 m.

1. La longueur du tour de pénalité est de 20 m.

   (a) Sachant que le tour de pénalité forme un cercle, déterminer son rayon. Arrondir au centimètre.

   Déterminons le rayon r_p du cercle de pénalité.

   On a donc en exprimant toutes les données en mètre : $2\pi r_p = 20$.
   Cette équation équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \frac{1\pi r_p}{2\pi} &= \frac{20}{2\pi} \\ r_p &= \frac{10}{\pi} \end{aligned}$$

   Donc en tronquant :

$$r_p \approx 3{,}183$$

$$\boxed{r_p \approx 3{,}18 \text{ m.}}$$

   (b) Un élève de CE1, qui court à la vitesse moyenne de 150 m/min, prend le départ de l'épreuve. On suppose que pour effectuer 3 lancers, il passe, à chaque fois, 30 secondes sur le pas de tir.
   Quelle sera la durée totale que met cet élève pour réaliser le parcours complet, s'il ne rate aucune cible au premier tour et qu'il rate une cible au 2e tour puis deux cibles au 3e tour ? Donner la réponse en minutes et secondes.

   * Le temps mis pour faire un grand tour est

$$\begin{aligned} t_g &= \frac{250 \text{ m}}{150 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{250}{150} \frac{\text{m}}{\text{m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{5}{3} \text{ min} \end{aligned}$$

   * Donc pour faire les quatre grands tours il lui faudra $t_{4g} = 4 \times \frac{5}{3}$ min $= \frac{20}{3}$ min.

* Les trois séries de trois lancers lui prendrons un temps de $t_{3l} = 3 \times 30 \text{ s} = 90 \text{ s} = 90 \times \frac{1}{60} \text{ min} = 1{,}5 \text{ min}$.
* Le temps mis pour faire un tour de pénalité est :

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{20 \text{ m}}{150 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{2}{15} \text{ min} \end{aligned}$$

* Le temps mis pour faire tous les tours de pénalité est :

$$\begin{aligned} t_{3p} &= (1+2) \times t_p \\ &= 3 \times \frac{2}{15} \text{ min} \\ &= 0{,}4 \text{ min} \end{aligned}$$

Le temps de parcours total est donc de

$$\begin{aligned} t_{total} &= t_{4g} + t_{3l} + t_{3p} \\ &= \frac{20}{3} \text{ min} + 1{,}5 \text{ min} + 0{,}4 \text{ min} \\ &= \frac{257}{30} \text{ min} \\ &= \frac{514}{60} \text{ min} \end{aligned}$$

Or $514 = 8 \times 60 + 34$ donc :

$$t_{total} = 8 \text{ min} + 34 \text{ s}$$

Le parcours est réalisé en 8 min et 34 s.

2. Le professeur des écoles souhaite aider ses élèves à développer une stratégie pour améliorer leurs résultats. Il relève les performances d'un même élève de CE1 qui fait 3 fois l'épreuve de biathlon dans sa totalité en modifiant certains paramètres à chaque essai.
   Dans le tableau ci-dessous, V_{moy} est la vitesse moyenne de cet élève sur les périodes de course (4 grands tours + éventuels tours de pénalités).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	élève	tirs n°1		tirs n°2		tirs n°3		distance totale parcourue	temps de course (s)	V moy (m/min)	durée totale (min)
2		durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées				
3	essai 1	30	0	30	1	30	2		418		
4	essai 2	30	0	32	0	35	0		300		
5	essai 3	19	3	21	3	21	3		341		

(a) La formule saisie en H3 puis recopiée vers le bas est

$$= 1000 + (\mathtt{C3} + \mathtt{E3} + \mathtt{G3}) * 20.$$

Expliquer le terme $(\mathtt{C3} + \mathtt{E3} + \mathtt{G3}) * 20$ dans le contexte de l'exercice.

$\mathtt{C3} + \mathtt{E3} + \mathtt{G3}$ est le nombre de tours de pénalités donc

$(\mathtt{C3} + \mathtt{E3} + \mathtt{G3}) * 20$ est la distance supplémentaire courue du fait des pénalités.

(b) Donner une formule qui pourra être introduite dans la cellule J3, de telle sorte qu'elle puisse être recopiée vers le bas pour effectuer le calcul pour les autres essais.

Il s'agit de calculer la vitesse moyenne sans tenir compte des temps de tirs donc, le résultat étant attendu en m/min :

$$= \mathtt{H3}/(\mathtt{I3}/60)$$

(c) Donner une formule qui pourra être introduite dans la case « durée totale » K3, de telle sorte qu'elle puisse être recopiée vers le bas pour effectuer le calcul pour les autres essais.

Nous avons déjà remarqué qu'il faut 90 s pour lancer les neufs balles. La durée totale en minutes est donc donnée par :

$$= (\mathtt{I3} + \mathtt{B3} + \mathtt{D3} + \mathtt{F3})/60.$$

Après calculs, on obtient le tableau complet ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	élève	tirs n°1		tirs n°2		tirs n°3		distance totale parcourue	temps de course (s)	V moy (m/min)	durée totale (min)
2		durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées				
3	essai 1	30	0	30	1	30	2	1060	482	132	9,53
4	essai 2	30	0	32	0	35	0	1000	469	128	9,43
5	essai 3	19	3	21	3	21	3	1180	566	125	10,45

(d) Interpréter le tableau pour déterminer ce que l'élève a modifié entre l'essai 2 et l'essai 3.

Entre les essais 2 et 3 l'élève a augmenté sa vitesse de lancer des balles.

(e) Si on analyse les performances de l'élève aux essais 2 et 3, quelle hypothèse ce tableau permet-il de faire du point de vue des stratégies à adopter ?

La durée totale a augmentée entre les essais 2 et 3.

Pour effectuer un parcours plus rapidement il vaut mieux prendre le temps de bien viser les cibles et d'éviter les tours de pénalité.

Exercice 2.

On dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces opposées sont identiques : deux faces numérotées 0, deux faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

1. On effectue deux lancers et on lit, à chaque lancer, le chiffre inscrit sur la face supérieure. Les deux lancers permettent d'obtenir un nombre décimal : le résultat du premier lancer donne le chiffre des unités et celui du second lancer le chiffre des dixièmes.

(a) Donner la liste de tous les nombres que l'on peut obtenir.

Représentons l'ensemble des issues de cette expérience par un tableau (puisqu'il y a deux épreuves).

0,1 \ 1	0	1	2
0	0,0	1,0	2,0
1	0,1	1,1	2,1
2	0,2	1,2	2,2

L'ensemble des nombres possibles est $\{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 2;\ 2{,}1;\ 2{,}2\}$.

(b) Justifier que la probabilité d'obtenir 1,2 est égale à 1/9.

L'univers est l'ensemble Ω des nombres possibles précédemment indiqué. Il est raisonnable d'après les indications de l'énoncé (dé non truqué) de modéliser cette situation par une équiprobabilité.

Par conséquent toutes les issues, y compris 1,2 , ont la même probabilité d'être obtenues.

D'après la question précédente l'univers comporte 9 issues donc

$$\boxed{\mathbb{P}(1{,}2) = \tfrac{1}{9}.}$$

(c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ?

Notons C « obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

$C = \{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2\}$.

Il y a équiprobabilité, C est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 9 donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{9}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \tfrac{1}{3}.}$$

(d) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entier ?

Notons D « obtenir un nombre entier ».

Calculons $\mathbb{P}(D)$.

$D = \{0;\ 1;\ 2\}$.

Il y a équiprobabilité, D est réalisé par 3 issues et l'univers en comporte 9 donc

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = \tfrac{1}{3}.}$$

(e) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal ?

Notons E « obtenir un nombre décimal ».

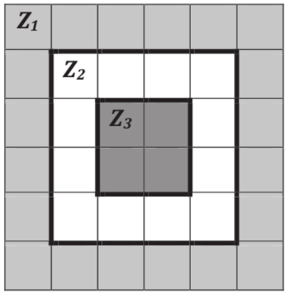
Calculons $\mathbb{P}(E)$.

Tous les nombres obtenus sont décimaux donc E est l'événement certain :

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = 1.}$$

2.

Le tapis représenté ci-contre est constitué de 36 carrés de côté 10 cm. Ces carrés définissent trois zones Z_1, Z_2 et Z_3 repérées par des couleurs différentes.
Avec le même dé que précédemment, on effectue un lancer sur ce tapis et on regarde la face supérieure. Si le dé tombe à cheval sur deux zones, on le relance. On admet que la probabilité que le dé tombe dans une zone est proportionnelle à l'aire de la zone.



(a) Quelle est la probabilité que le dé tombe dans la zone Z_2 ?

Puisque $\mathbb{P}(Z_2)$ est proportionnelle à l'aire de Z_2 qui est constituée de 12 carrés sur un total de 36 :

$$\mathbb{P}(Z_2) = \frac{12}{36}$$

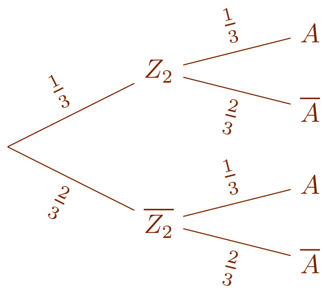
$$\boxed{\mathbb{P}(Z_2) = \frac{1}{3}.}$$

(b) Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 et donne le nombre 1 ?

Notons A : « obtenir le nombre 1 ».
Il y a équiprobabilité entre les faces du dé, 2 d'ente elles réalisent A et il y a 6 faces au total donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Calculons $\mathbb{P}(A \cap Z_2)$.

Nous pouvons nous représenter les choses sous forme d'un arbre :



Le principe multiplicatif permet alors de conclure : $\mathbb{P}(A \cap Z_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Plus formellement : il est raisonnable dans ce contexte de considérer que le nombre affiché et la zone du tapis obtenue sont des événements indépendants.

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap Z_2) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(Z_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap Z_2) = \frac{1}{9}.}$$

(c) Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 et donne un nombre pair ?

Notons B : « obtenir un nombre pair ».

Il y a équiprobabilité entre les faces du dé, 4 d'ente elles réalisent B et il y a 6 faces au total donc : $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Calculons $\mathbb{P}(B \cap Z_2)$.

B et Z_2 sont indépendants donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cap Z_2) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(Z_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B \cap Z_2) = \frac{2}{9}.}$$

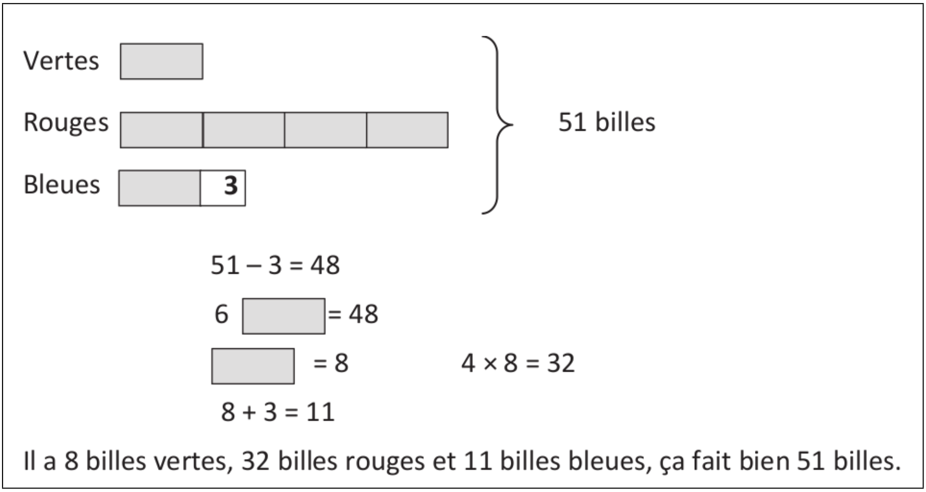
Exercice 3.

Un enseignant d'une classe de CM2 a proposé ce problème à ses élèves.

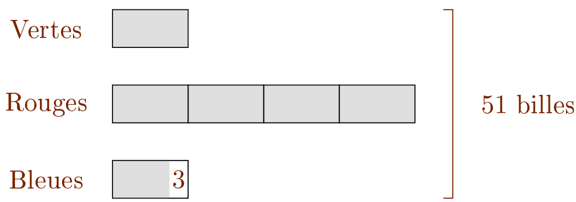
> Dans un bocal, un enfant a des billes vertes, des billes rouges et des billes bleues. Il a 4 fois plus de billes rouges que de billes vertes et il a 3 billes vertes de plus que de billes bleues.
> En tout il a 51 billes.
> Combien a-t-il de billes de chaque couleur ?

D'après un problème du Guide pour enseigner la résolution de problèmes au cours moyen, Ministère de l'éducation nationale, 2021.

1. Voici la réponse proposée par Samira, une élève de la classe de CM2 :



Proposer une version corrigée du schéma utilisé par Samira pour résoudre le problème.



2. (a) En notant v le nombre de billes vertes, déterminer, en fonction de v, le nombre de billes rouges et le nombre de billes bleues.

Si r est le nombre de billes rouges alors :

$$r = 4v.$$

Si b est le nombre de billes bleues alors

$$b = v - 3.$$

(b) Mettre le problème en équation et la résoudre pour répondre algébriquement à la question posée dans l'énoncé.

On doit avoir

$$v + b + r = 51.$$

Ce qui revient, d'après la question précédente, à

$$v + v - 3 + 4v = 51.$$

Cette dernière équation du premier degré équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 6v - 3 &= 51 \\ 6v - 3 + 3 &= 51 + 3 \\ 6v &= 54 \\ \frac{6v}{6} &= \frac{54}{6} \\ v &= 9 \end{aligned}$$

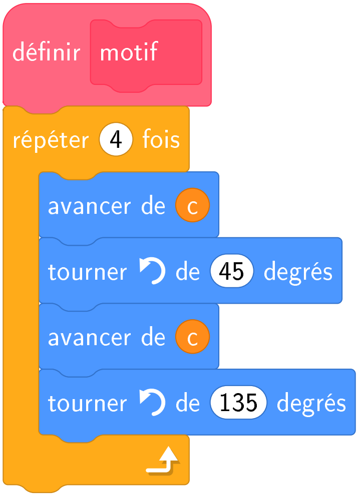
Donc : $r = 4 \times 9 = 36$,
et : $b = 9 - 3 = 6$.

Il y a 9 billes vertes, 36 rouges et 6 bleues.

Exercice 4.

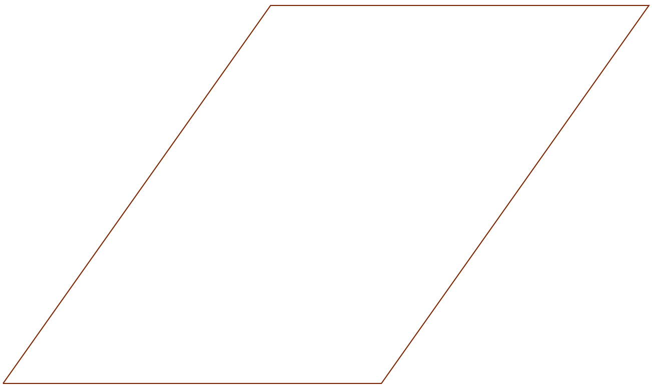
Le programme ci-dessous (programme 1) a été écrit avec le logiciel Scratch.

Programme 1.



Les programmes de cet exercice sont téléchargeables ici : lien de téléchargement.

1. En prenant C = 50 et 1 cm pour 10 pixels, tracer la figure construite en utilisant le Programme 1.



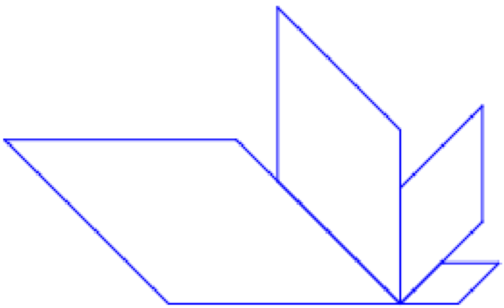
2. Quelle est la nature de la figure tracée ? Justifier la réponse.

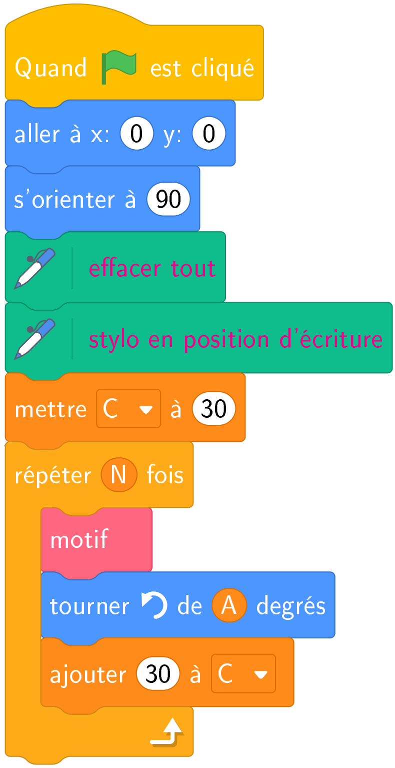
   Il s'agit de tracer continûment quatre segments : le tracé est une ligne polygonale formée de quatre segments de même longueur.
   La somme des angles des segments les uns par rapport aux autres étant de $45° + 135° + 45° + 135° = 360°$ la ligne polygonale qu'ils forment est fermée.
   Ainsi la figure est un quadrilatère, non croisé (du fait des angles), dont les côtés ont tous la même longueur. Autrement dit :

$$\boxed{\text{la figure tracée est un losange.}}$$

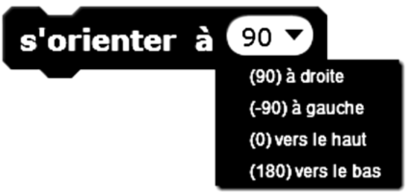
3. On écrit le programme 2 en utilisant le bloc précédent, afin d'obtenir la figure représentée ci-après.

Programme 2.





Rappel :



(a) Quelles valeurs attribuer aux lettres A et N dans le programme 2 pour obtenir la figure correspondante ?

La figure est formée de 4 losanges donc

$$\boxed{N = 4.}$$

Les 4 losanges, en plus de l'agrandissement (avec C qui augment de 30), se déduisent les uns des autres par une rotation de 45°.

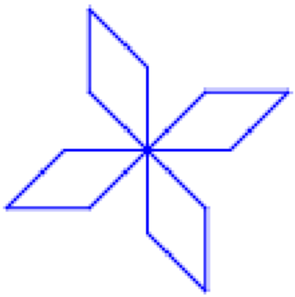
$A = 45.$

(b) Quelle est la valeur de la variable C une fois le programme exécuté ?

Dans la boucle qui est répétée $n+4$ fois du programme 2 C est augmenté de 30. Donc à la fin du programme : $C = 30 + 4 \times 30$.

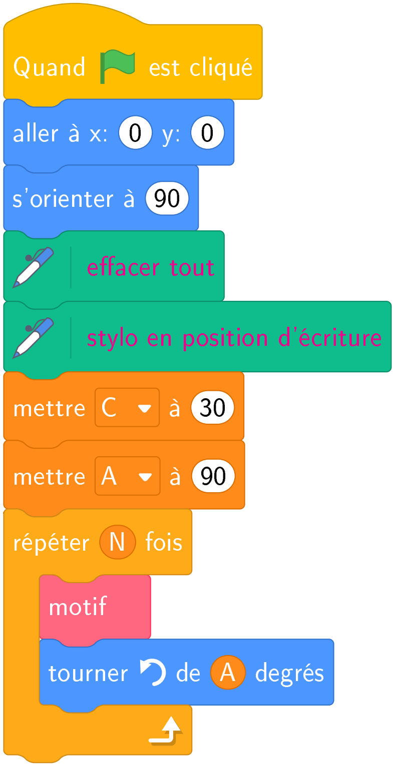
En fin de programme $C = 150$.

4. Comment peut-on modifier le programme 2 pour obtenir la figure ci-dessous pour laquelle chaque segment mesure 30 pixels ?



Voici une modification du programme 2 : lien pour télécharger.

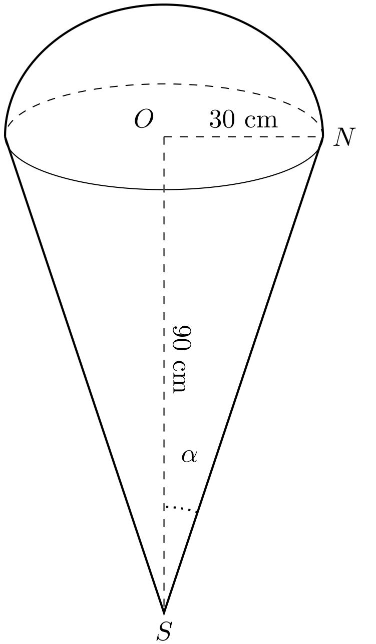
Il faut choisir $A = 90$ car les losanges se déduisent par des rotations successives d'angle 90°.
De plus il faut retirer la ligne de code qui agrandi la longueur C du côté du losange.



Exercice 5.

Un ballon-sonde est un ballon à gaz utilisé pour faire des mesures locales dans l'atmosphère.

Dans le cadre du projet scientifique qu'elle anime pour sa classe de CM2, une professeure des écoles a reçu un petit ballon-sonde, représenté ci-dessous.

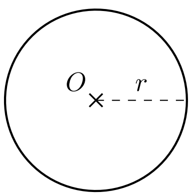


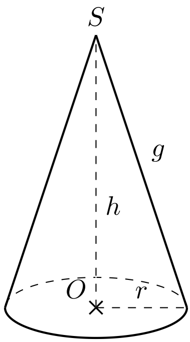
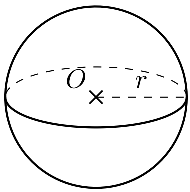
Son enveloppe, composée de matières plastiques et de latex, a la forme, une fois gonflée, d'un cône de révolution surmonté d'une demi-sphère.

Les dimensions données sur la figure ci-dessus sont celles du ballon-sonde au sol, sur le lieu du lâcher situé au niveau de la mer.

La pression atmosphérique diminuant avec l'altitude, le ballon se dilate en prenant de la hauteur et ses dimensions augmentent jusqu'à l'éclatement après une ascension de plus de vingt kilomètres.

On pourra, si nécessaire, utiliser le formulaire ci-dessous.

	Périmètre du disque $2\pi r$	Aire du disque πr^2.

 g est la longueur d'une génératrice du cône.	Volume du cône de révolution $\frac{1}{3}\pi r^2 h.$	Aire de la surface latérale $\pi r g.$
	Volume de la boule $\frac{4}{3}\pi r^3.$	Aire de la sphère $4\pi r^2.$

1. (a) Montrer, en indiquant les étapes du calcul, que le volume exact du ballon-sonde au niveau de la mer, est égal à $45\,000\pi$ cm^3.

Calculons le volume $\mathscr{V}_b$ du ballon.

* Le haut du ballon est formé d'une demi-boule dont le volume est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi\,(30\text{ cm})^3\\ &= \frac{2}{3}\pi \times 30^3\text{ cm}^3\\ &= 18\,000\pi\text{ cm}^3\end{aligned}$$

* Le bas du ballon est formé d'un cône de révolution dont le volume est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \frac{1}{3}\pi r^2 h\\ &= \frac{1}{3}\pi\,(30\text{ cm})^2 \times (90\text{ cm})\\ &= \frac{1}{3}\pi 30^2 \times 90\text{ cm}^2 \cdot \text{cm}\\ &= 27\,000\pi\text{ cm}^3\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_b &= \mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2\\ &= 18\,000\pi\text{ cm}^3 + 27\,000\pi\text{ cm}^3\\ &= (18\,000 + 27\,000)\pi\text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_b = 45\,000\pi\text{ cm}^3.}$$

(b) Donner le volume du ballon sonde en litre, arrondi à l'entier.

Exprimons $\mathscr{V}_b$ en litre.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_b &= 45\,000\pi\text{ cm}^3\\ &= 45\,000\pi \times \frac{1}{1000}\text{ L}\\ &= 45\pi\text{ L}\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\approx 141{,}371\text{ L}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_b \approx 141\text{ L.}}$$

2. Montrer qu'une génératrice du cône mesure $\sqrt{9\,000}$ cm.

Calculons la longueur SN d'une génératrice du cône.

Le cône étant de révolution hauteur, rayon, et génératrice dessinent un triangle SNO rectangle en O, donc, d'après le théorème de Pythagore (toutes les longueurs étant exprimées en centimètre) :

$$SN^2 = ON^2 + OS^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} SN^2 &= 30^2 + 90^2 \\ &= 9\,000 \end{aligned}$$

Puisque SN une longueur donc positive :

$$SN = \sqrt{9\,000}$$

$$\boxed{\text{Nous avons bien } SN = \sqrt{9\,000} \text{ cm}^3.}$$

3. En déduire que l'enveloppe totale du ballon-sonde, au niveau de la mer, a une aire d'environ 1,5 m^2 au dixième près.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_b$ de l'enveloppe du ballon.

* L'aire de la partie demi-sphérique est

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_1 &= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4\pi(30 \text{ cm})^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 30^2 \text{ cm}^2 \\ &= 1\,800\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

* L'aire latérale de la partie conique est

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_2 &= \pi r g \\ &= \pi(30 \text{ cm}) \times (\sqrt{9\,000} \text{ cm}) \\ &= \pi \times 30 \times \sqrt{9\,000} \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 900\sqrt{10}\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_b &= {}_1 + \mathscr{A}_2\\ &= 1\,800\pi\ \text{cm}^2 + 900\sqrt{10}\pi\ \text{cm}^2\\ &= (1\,800 + 900\sqrt{10})\pi\ \text{cm}^2\\ &= 900(2+\sqrt{10})\pi \times \frac{1}{10000}\text{m}^2\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{A}_b \approx 1{,}459\ \text{cm}^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}_b \approx 1{,}5\ \text{m}^2.}$$

4. Entre 0 mètre d'altitude et 4 500 mètres d'altitude, les longueurs du ballon-sonde augmentent de 25 %.

   (a) Par quel nombre les longueurs initiales sont-elles multipliées ?

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 25 % est

$$\begin{aligned}CM &= 1 + \frac{t}{100}\\ &= 1 + \frac{25}{100}\\ &= 1{,}25\end{aligned}$$

   Les longueurs sont multipliées par 1,25.

   (b) Montrer que, à 4 500 mètres d'altitude, l'enveloppe totale du ballon-sonde a une aire d'environ 2,3 m^2 arrondie au dixième près.

   Si les longueurs sont multipliées par 1,25 alors les aires sont multipliées par $1{,}25^2$. la nouvelle aire de l'enveloppe du ballon est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_B &= 1{,}25^2 \times \mathscr{A}_b\\ &= 1{,}25^2 \times 0{,}09(2+\sqrt{10})\pi\text{m}^2\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{A}_B \approx 2{,}280 \text{ m}^2$$

$$\boxed{\mathscr{A}_B \approx 2{,}3 \text{ m}^2.}$$

(c) Donner un arrondi, au litre près, du volume du ballon-sonde à 4 500 mètres d'altitude.

Si les longueurs sont multipliées par 1,25 alors les volumes sont multipliés par $1{,}25^3$. le volume du ballon est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_B &= 1{,}25^3 \times \mathscr{V}_b \\ &= 1{,}25^3 \times 45\pi \text{L}\end{aligned}$$

En tronquant :

$$\mathscr{V}_B \approx 276{,}11 \text{ L}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_B \approx 276 \text{ L.}}$$

5. On lâche le ballon à 0 mètre d'altitude. On relève alors une température de 15°C. À 4 500 mètres d'altitude, la température transmise est de $-12°C$. Entre 0 et 12 000 m d'altitude, la température, en degré Celsius, en fonction de l'altitude x, en mètre, peut être modélisée par une fonction affine notée t. Montrer que pour tout x entre 0 et 12 000, on a $t(x) = -0{,}006x + 15$.

Puisque la température est une fonction affine de l'altitude x, c'est qu'il existe des nombres a et b tels que : $t(x) = ax + b$.

* Puisque $t(0) = 15$:

$$\begin{aligned}a \times 0 + b &= 15 \\ b &= 15\end{aligned}$$

* Puisque $t(4500) = -12$:

$$\begin{aligned}
a \times 4500 + 15 &= -12 \\
4500a + 15 - 15 &= -12 - 15 \\
4500a &= -27 \\
\frac{4500a}{4500} &= \frac{-27}{4500} \\
a &= -0{,}006
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{t : x \mapsto -0{,}006x + 15.}$$

6. À partir de quelle altitude la température devient-elle négative ? Justifier le résultat en résolvant une inéquation.

Nous cherchons pour quelles valeurs de x :

$$t(x) \leqslant 0.$$

Cette inéquation équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
-0{,}006x + 15 &\leqslant 0 \\
-0{,}006x + 15 - 15 &\leqslant 0 - 15 \\
-0{,}006x &\leqslant -15 \\
\frac{-0{,}006x}{-0{,}006} &\geqslant \frac{-15}{-0{,}006} \quad \text{car } -0{,}006 < 0 \\
x &\geqslant 2500
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La température devient négative à partir de } 2\,500 \text{ m.}}$$

7. La professeure des écoles a réalisé, à l'aide d'un tableur, le calcul des températures en fonction de l'altitude du ballon-sonde.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	
1	altitude en mètre	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500	11000	11500	1
2	température en degrés	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	-18	-21	-24	-27	-30	-33	-36	-39	-42	-45	-48	-51	-54	

En observant les données du tableau, sachant que le ballon part de 0 mètre d'altitude, à quelle altitude se trouve-t-il lorsque la température a baissé de $30°C$?

Lorsque la température baisse de 30° elle est de $15° - 30° = -15°$.
D'après le tableur

$$\boxed{\text{la température aura baissé de } 30° \text{ à } 5\,000 \text{ m.}}$$

Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 2.

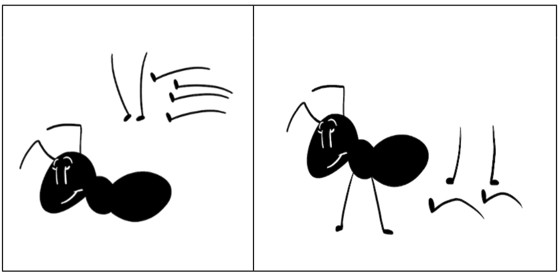
Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

Exercice 1.

Un enseignant de grande section propose à ses élèves un jeu pour travailler la décomposition et la recomposition de nombres. Le jeu se compose de deux dés cubiques équilibrés et de corps de fourmis à compléter avec des pattes comme sur le dessin ci-dessous.



Sur les six faces du premier dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.
Sur les six faces du deuxième dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 5.
On donne à chaque élève un corps de fourmi et 6 pattes à fixer sur le corps.

Au début de la partie, chaque élève choisit un nombre compris entre 2 et 10. Ce nombre reste le même durant toute la partie. À tour de rôle, chaque élève joue. Il lance les deux dés :

- si la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés est égale au nombre choisi par cet élève, alors celui-ci fixe une patte à sa fourmi et relance les dés.
- sinon, c'est au joueur suivant de lancer les dés.

Il donne ensuite les dés au joueur suivant.

La partie se termine lorsqu'un élève a gagné, en fixant les six pattes de sa fourmi.

1. Un élève choisit un nombre et lance les dés.

   (a) Quelles sont les différentes sommes qu'il peut obtenir ?

   Indiquons toutes les sommes possibles avec ces deux dés sous forme d'un tableau (en distinguant les deux faces 1 et 2 :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	5
1	2	3	4	5	6	6
1	2	3	4	5	6	6
2	3	4	5	6	7	7
3	4	5	6	7	8	8
4	5	6	7	8	9	9
5	6	7	8	9	10	10

   L'ensemble des sommes possibles est
   $X(\Omega) = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$.

   (b) Montrer que la probabilité qu'il obtienne 8 est égale à $\dfrac{4}{36}$.

   Notons E : « obtenir une somme de 8 ».

   Calculons $\mathbb{P}(E)$.

   Tous les couples de faces des deux dés (en distinguant les deux faces 1 du premier dé et les deux faces 5 du second).
   Il est donc naturel de modéliser avec une équiprobabilité : toutes les cases du précédent tableau ont la même probabilité d'être obtenus.
   Ainsi E est réalisé par 4 issues sur un total de 36 donc

$$\mathbb{P}(E) = \frac{4}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \frac{1}{9}.}$$

2. Un autre élève choisit le nombre 6 et lance les dés.

   (a) Quelle est la probabilité qu'il gagne une patte pour sa fourmi dès son premier lancer ?

   Notons F : « obtenir une somme de 6 ».

   Calculons $\mathbb{P}(F)$.

   Il y a équiprobabilité entre les couples de faces, F est réalisé par 8 issues (couples de faces) sur un total de 36 donc

   $$\mathbb{P}(F) = \frac{8}{36}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(F) = \frac{4}{9}.}$$

   (b) Quelle est la probabilité qu'il gagne deux pattes pour sa fourmi en 2 lancers ?

   Notons F_1 : « obtenir une somme de 6 au premier lancer » et F_2 : « obtenir une somme de 6 au second lancer ».

   Calculons $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)$.

   Il est raisonnable d'estimer que le résultat du second lancer est indépendant de celui du premier donc

   $$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2)$$

   D'après la question précédente :

   $$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$$

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \frac{16}{81}.$$

3. Eden et Axelle commencent une partie. Eden choisit le nombre 6 et Axelle choisit un autre nombre.

   (a) Qui a le plus de chance de gagner la partie ? Justifier.

   En raisonnant comme dans les questions précédentes nous pouvons déterminer les probabilités de toutes les sommes possibles :

Sommes	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilité	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$

   Puisque 6 est la somme qui a la plus grande probabilité

   Eden a le plus de chance de gagner la partie.

   (b) Eden est-il sûr de gagner la partie ? Justifier.

   Il est possible que la somme choisir par Axelle soit obtenue 6 fois d'affilée (constitution de la fourmi entière) sans que Eden ne gagne une seule fois.

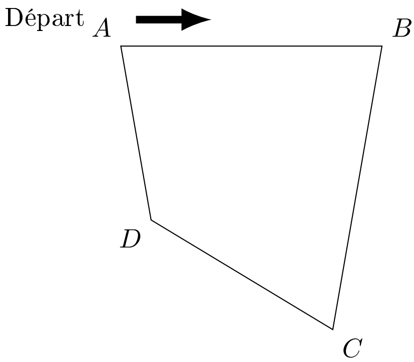
   Eden n'est pas sûr de gagner la partie.

Exercice 2.

Dans le cadre d'une liaison écoles-collège, une professeure d'EPS et une professeure des écoles organisent une course à vélo dont le parcours est composé de quatre tronçons en ligne droite.

La figure ci-dessous représente le parcours et n'est pas à l'échelle. Les élèves partent du point A et tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. Les dimensions sont les suivantes :

$$AB = 960 \text{ m},\ BC = 1{,}05 \text{ km},\ CD = 780 \text{ m et } AD = 660 \text{ m}.$$



1. Montrer que le parcours a pour longueur 3 450 m.

   Déterminons la longueur $\mathscr{L}_P$ du parcours.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_p &= AB + ABC + CD + DA \\ &= 960 \text{ m} + 1{,}05 \text{ km} + 780 \text{ m} + 660 \text{ m} \\ &= 960 \text{ m} + 1{,}05 \times 1000 \text{ m} + 780 \text{ m} + 660 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{L}_P = 3\,450 \text{ m.}}$$

2. Durant l'épreuve, Léo a réalisé, en 48 minutes, 2 tours complets et un tiers de tour du parcours.

   (a) Déterminer la distance parcourue par Léo.

   Déterminons la distance totale, $\mathscr{D}_L$, parcourue par Léo.

   D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_L &= 2 \times \mathscr{L}_P + \frac{1}{3} \times \mathscr{L}_P \\ &= 2 \times 3\,450 \text{ m} + \frac{1}{3} \times 3\,450 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{D}_L = 8\,050 \text{ m.}}$$

(b) Donner la vitesse moyenne de Léo en km/h.

Calculons la vitesse moyenne, v_L, de Léo.

$$\begin{aligned}
v_L &= \frac{\mathscr{D}_L}{48 \text{ min}} \\
&= \frac{8050 \text{ m}}{48 \times \frac{1}{60} \text{ h}} \\
&= \frac{8050 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{\frac{48}{60} \text{ h}} \\
&= \frac{\frac{8050}{1000}}{\frac{48}{60}} \frac{\text{km}}{\text{m}} \\
&= \frac{161}{16} \text{ km/h}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v_L = 10{,}0625 \text{ km/h.}}$$

(c) En gardant la même vitesse moyenne, Léo aura-t-il parcouru 15 km en moins d'une heure et demie ? Justifier.

Déterminons le temps t_L qu'aurait mis Léo à parcourir 15 km.

$$\begin{aligned}
v_L &= \frac{15 \text{ km}}{t_L} \\
v_L \times t_L &= \frac{15 \text{ km}}{t_L} \times t_L \\
v_L \times t_L &= 15 \text{ km} \\
\frac{v_L \times t_L}{v_L} &= \frac{15 \text{ km}}{v_L} \\
t_L &= \frac{15 \text{ km}}{10{,}0625 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} \\
t_L &= \frac{15}{10{,}0625} \text{ km} \cdot \text{km}^{-1} \cdot \text{h} \\
t_L &\approx 1{,}49068 \text{ h}
\end{aligned}$$

Donc $t_L < 1{,}5$ h.

Léo aurait effectivement parcouru 15 km en moins d'une heure et demie.

3. Une épreuve en relais est ensuite proposée. Tara parcourt les distances AB et BC à une vitesse moyenne de 10 km/h et Kevin parcourt les distances CD et DA à une vitesse moyenne de 6 km/h.

   Quelle est la vitesse moyenne de ce binôme sur l'ensemble du parcours ? Justifier.

   Déterminons leur vitesse moyenne v_m.

   Commençons par déterminer le temps mis pour faire le parcours.

   * $AB + BC = 960 \text{ m} + 1050 \text{ m} = 2010 \text{ m} = 2{,}01 \text{ km}$.
     Le temps mis par Tara pour parcourir cette distance est :

$$\begin{aligned} t_T &= \frac{2{,}01 \text{ km}}{10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &= \frac{2{,}01}{10} \text{ h} \\ &= 0{,}201 \text{ h} \end{aligned}$$

   * $CD + DA = 780 \text{ m} + 660 \text{ m} = 1440 \text{ m} = 1{,}44 \text{ km}$
     Le temps mis par Kevin pour parcourir cette distance est :

$$\begin{aligned} it_K &= \frac{1{,}44 \text{ km}}{6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} \\ &= \frac{1{,}44}{6} \text{ h} \\ &= 0{,}24 \text{ h} \end{aligned}$$

   * Ainsi le temps de parcours total est $t_P = 0{,}201 \text{ h} + 0{,}24 \text{ h} = 0{,}441 \text{ h}$.

   Nous en déduisons la vitesse moyenne

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{3{,}45 \text{ km}}{0{,}441 \text{ h}} \\ &\approx 7{,}823129252 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

$$v_m \approx 7{,}823 \text{ km/h.}$$

4. (a) La diagonale $[BD]$ mesure 1,05 km. Représenter le parcours à l'échelle $\dfrac{1}{20\,000}$.

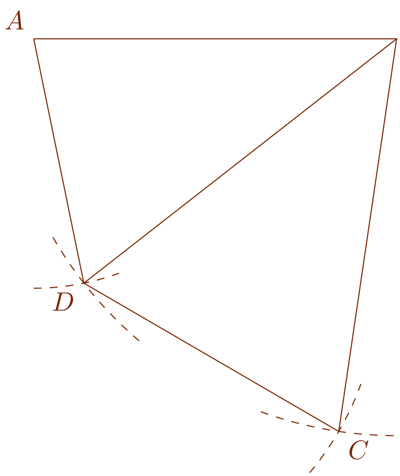
La longueur BD sera représentée par une longueur de

$$\begin{aligned}\ell_{BD} &= BD \times \frac{1}{20000} \\ &= 1050 \times \frac{1}{20000} \text{ m} \\ &= 0{,}0525 \text{ m} \\ &= 0{,}0525 \times 100 \text{ cm} \\ &= 5{,}25 \text{ cm}\end{aligned}$$

En procédant de même pour les autres longueurs :

Nom	AB	BC, BD	CD	AD
Distances réelles (en m)	960	1050	780	660
À l'échelle (en cm)	4,8	5,25	3,9	3,3

Il n'y a plus qu'à dessiner $[AB]$, puis D (comme troisième sommet de ABD avec un compas), et enfin C (comme troisième sommet de BCD avec un compas).



(b) Amina a roulé à vélo pendant 25 minutes à une vitesse moyenne de 11,5 km/h.
Placer sur la figure tracée à la question 4.a. le point S à l'endroit où se trouve Amina au bout de sa course. Justifier.

Déterminons la distance, d_A, parcourue par Amina.

$$\begin{aligned}
d_A &= v \times t \\
&= \left(11{,}5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}\right) \times (25 \text{ min}) \\
&= \left(11500 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}\right) \times \left(\frac{25}{60} \text{ h}\right) \\
&= 11500 \times \frac{25}{60} \text{ m} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{h} \\
&= \frac{14375}{3} \text{ m} \\
&= 4791{,}666\ldots \text{ m}
\end{aligned}$$

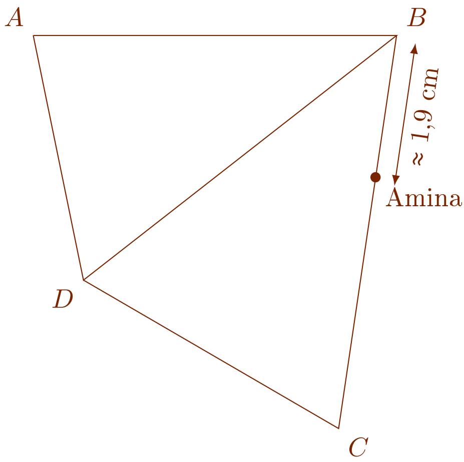
Nous remarquons que :

$$d_A = 3450 \text{ m} + 960 \text{ m} + 381{,}666\ldots \text{ m}$$

Ainsi Amina a parcourue un tour complet, la distance AB et sur le trajet de B à C elle a encore parcourue 381,666... m.
Or

$$\begin{aligned}
381{,}666\ldots \text{ m} \times \frac{1}{20000} &= 0{,}01908333\ldots \text{ m} \\
&= 1{,}908333\ldots \text{ cm}
\end{aligned}$$

donc

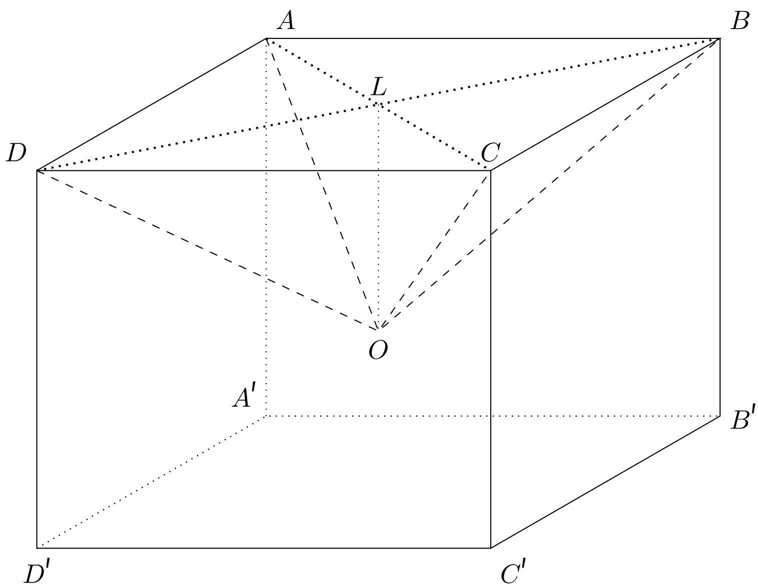


Exercice 3.

On considère un pavé droit $ABCDA'B'C'D'$ avec $DD' = 5$ cm ; $DC = 6$ cm et $DA = 7$ cm.

On note L le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

On souhaite creuser ce pavé, en retirant une pyramide $OABCD$ de hauteur $[OL]$.



Partie A.

Dans cette partie, on suppose que $OL = 4$ cm.

1. Montrer que $AL \approx 4{,}6$ cm.

   Déterminons AL.

   * Déterminons d'abord AC.
   Puisque le solide est un pavé droit, ADC est rectangle en D. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore :

   $$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

   Nous en déduisons (toutes les longueurs étant exprimées en centimètre) :

   $$\begin{aligned} AC^2 &= 7^2 + 6^2 \\ &= 85 \end{aligned}$$

   Puisque AC est une longueur, c'est un nombre positif et donc

   $$AC = \sqrt{85}$$

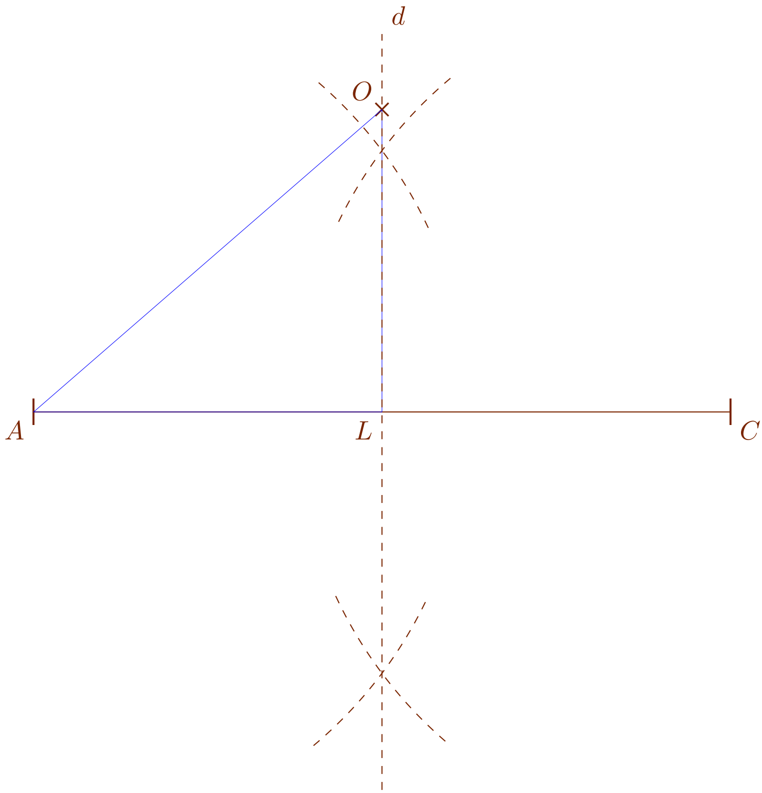
* Puisque le solide est un pavé droit $ABCD$ est un parallélogramme. Donc ses diagonales se coupent en leu milieu. Autrement dit L est le milieu de $[AC]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} AL &= \frac{1}{2}AC \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{85}\text{ cm} \\ &\approx 4{,}60977\text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{AL \approx 4{,}6\text{ cm. i}}$$

2. Construire le triangle ALO en vraie grandeur.

Traçons le segment $[AC]$ tel que $AC \approx 9{,}2$ cm, puis sa médiatrice d (passant par L) avec le compas, enfin plaçons sur cette médiatrice O tel que $OL = 4$ cm.



3. (a) Calculer le volume de la pyramide $OABCD$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Calculons le volume $\mathscr{V}_p$ de la pyramide $OABCD$.

Puisque OL est la hauteur de cette pyramide :

$$\mathscr{V}_p = \frac{1}{3} \times OL \times \mathscr{A}(ABCD),$$

où $\mathscr{A}(ABCD)$ désigne l'aire délimitée par le quadrilatère $ABCD$.
Or $ABCD$ est un rectangle donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= DA \times DC \\ &= (7 \text{ cm}) \times (6 \text{ cm}) \\ &= 7 \times 6 \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 42 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_p &= \frac{1}{3} \times 4 \text{ cm} \times 42 \text{ cm}^2 \\ &= \frac{1}{3} \times 4 \times 42 \text{ cm} \cdot \text{cm}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_p = 56 \text{ cm}^3.}$$

(b) Calculer le volume du pavé creusé.

Calculons le volume $\mathscr{V}_{pc}$ du pavé creusé.

En notant $\mathscr{V}_{\text{pavé}}$ le volume du pavé droit nous avons

$$\mathscr{V}_{pc} = \mathscr{V}_{\text{pavé}} - \mathscr{V}_p$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{\text{pavé}} &= DD' \times DC \times DA\\ &= 5\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 7\text{ cm}\\ &= 5 \times 6 \times 7\text{ cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}\\ &= 210\text{ cm}^3\end{aligned}$$

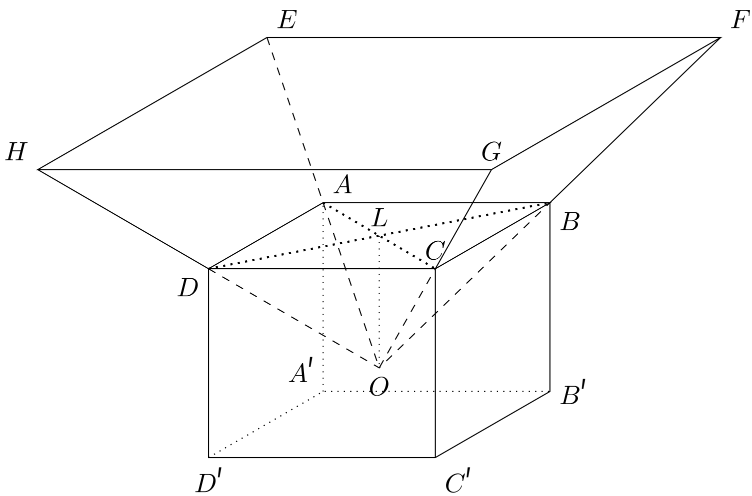
donc

$$\mathscr{V}_{pc} = 210\text{ cm}^3 - 56\text{ cm}^3$$

$$\boxed{\mathscr{V}_{pc} = 154\text{ cm}^3.}$$

Partie B.

Dans cette partie, on pose $OL = x$, où x est un nombre compris entre 0 et 5. Le pavé creusé que l'on obtient est le socle en bois d'un trophée. Sur ce socle, on pose une pyramide en verre $OEFGH$ qui est un agrandissement de la pyramide $OABCD$ de rapport 2.



1. Exprimer le volume de la pyramide $OABCD$ en fonction de x.

   En reprenant le raisonnement de A.3.(a), avec $OL = x$, nous obtenons que

   le volume, exprimé en cm^3, est $\mathscr{V}_p = 14x$.

2. Montrer que le volume du socle en bois est $210 - 14x$.

   En reprenant le raisonnement de A.3.(b) nous obtenons que :

   le volume, exprimé en cm^3, est $\mathscr{V}_{pc} = 210 - 14x$.

3. Montrer que le volume de la pyramide en verre $OEFGH$ est $112x$.

   Puisque $OEFGH$ est un agrandissement de $OABCD$ de rapport 2, le volume, $\mathscr{V}_P$, de $OEFGH$ est, en centimètre cube :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_P &= 2^3 \times \mathscr{V}_p\\ &= 2^3 \times 14x\end{aligned}$$

$$\mathscr{V}_P = 112x.$$

4. Quelle valeur choisir pour x, pour que le volume de la pyramide en verre soit égal au double du volume du socle en bois ?

   On souhaite x tel que : $\mathscr{V}_P = 2\mathscr{V}_{pc}$.
   Cette égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned}112x &= 2 \times (210 - 14x)\\ 112x &= 2 \times 210 - 2 \times 14x\\ 112x &= 420 - 28x\\ 112x+28x &= 410 - 28x+28x\\ 140x &= 410\\ \frac{140x}{140} &= \frac{410}{140}\\ x &= \frac{41}{14}\end{aligned}$$

Il faut choisir $x = \frac{41}{14}$.

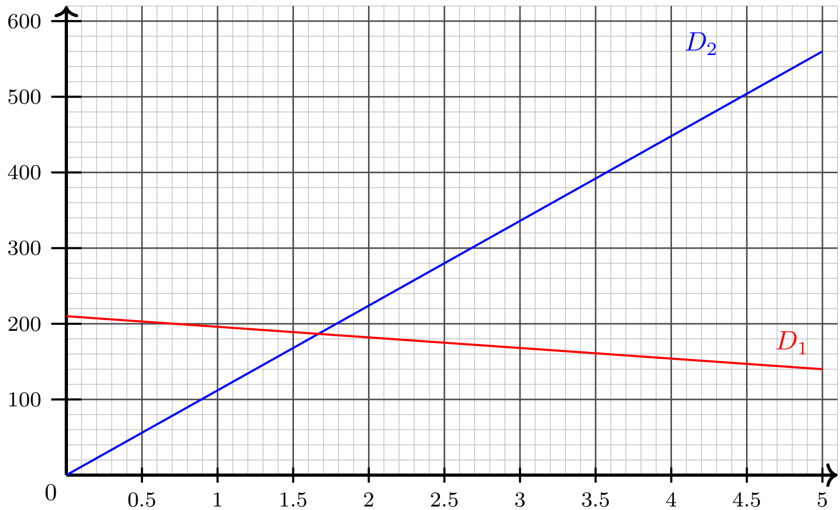
5. On considère les fonctions f et g définies pour tout x compris entre 0 et 5 par :

$$f(x) = 210 - 14x$$

et

$$g(x) = 112x.$$

On a représenté dans un repère orthogonal ces deux fonctions.

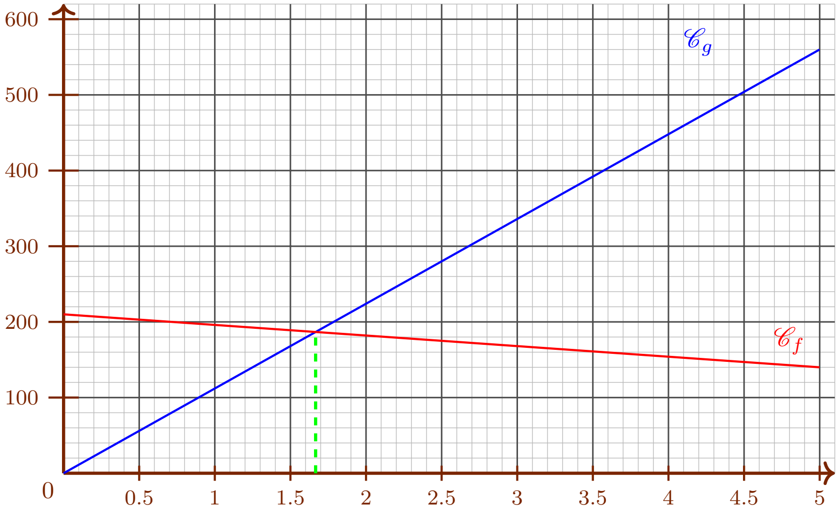


(a) Déterminer quelle fonction (f ou g) est représentée par chacune des droites D_1 et D_2 ? Justifier.

f et g sont des fonctions affines. Cependant g est linéaire donc sa courbe représentative passe par l'origine du repère. Nécessairement

D_2 est la courbe représentative de g et donc D_1 est celle de f.

(b) Déterminer avec la précision permise par le graphique les valeurs de x pour lesquelles le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre.



Le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre pour $x \geqslant 1{,}65$.

(c) Retrouver le résultat précédent en posant puis en résolvant une inéquation.

$$g(x) \geqslant f(x)$$

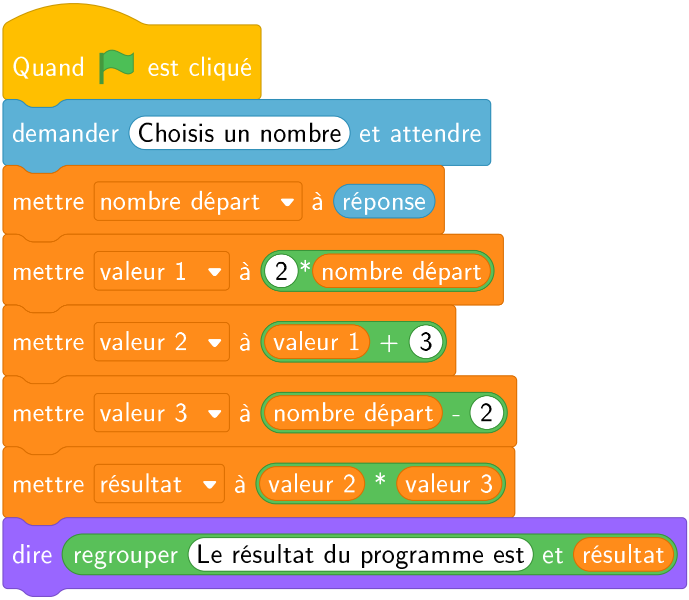
équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 112x &\geqslant 210 - 14x \\ 112x + 14x &\geqslant 210 - 14x + 14x \\ 126x &\geqslant 210 \\ \frac{126x}{126} &\geqslant \frac{210}{126} \\ x &\geqslant \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$x \in \left[\frac{5}{3}; 5\right]$.

Exercice 4.

1. Adam a réalisé le programme ci-dessous à l'aide du logiciel Scratch.



Cliquez sur ce lien pour télécharger le programme.

(a) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat est égal à 9.

Considérons un tableau d'état des variables du programme.

Lignes de codes.	demander Choisis un nombre et attendre	mettre nombre départ à réponse	mettre valeur 1 à 2 * nombre départ	mettre valeur 2 à valeur 1 + 3	mettre valeur 3 à nombre départ - 2	mettre résultat à valeur 2 * valeur 3
réponse	3	3	3	3	3	3
nombre départ		3	3	3	3	3
valeur 1			$2 \times 3 = 6$	6	6	6
valeur 2				$6 + 3 = 9$	9	9
valeur 3					$3 - 2 = 1$	1
résultat						$9 \times 1 = 9$

Si le nombre de départ est 3 alors le résultat est 9.

(b) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est 2,4 ?

Lignes de codes.	demander Choisis un nombre et attendre	mettre nombre départ ▾ à réponse	mettre valeur 1 ▾ à 2 * nombre départ	mettre valeur 2 ▾ à valeur 1 + 3	mettre valeur 3 ▾ à nombre départ - 2	mettre résultat ▾ à valeur 2 * valeur 3
réponse	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4
nombre départ			2,4	2,4	2,4	2,4
valeur 1			$2 \times 2{,}4 = 4{,}8$	4,8	4,8	4,8
valeur 2				$4{,}8 + 3 = 7{,}8$	7,8	7,8
valeur 3					$2{,}4 - 2 = 0{,}4$	0,4
résultat						$7{,}8 \times 0{,}4 = 3{,}12$

Si le nombre de départ est 2,4 alors le résultat est 3,12.

(c) Soit x le nombre de départ.
Montrer que le programme d'Adam retourne le nombre $2x^2 - x - 6$.

Lignes de codes.	demander Choisis un nombre et attendre	mettre nombre départ à réponse	mettre valeur 1 à 2 * nombre départ	mettre valeur 2 à valeur 1 + 3	mettre valeur 3 à nombre départ - 2	mettre résultat à valeur 2 * valeur 3
réponse	x	x	x	x	x	x
nombre départ			x	x	x	x
valeur 1			$2 \times x = 2x$	$2x$	$2x$	$2x$
valeur 2				$2x+3$	$2x+3$	$2x+3$
valeur 3					$x-2$	$x-2$
résultat						$(2x+3)(x-2)$

Or en développant, simplifiant puis réduisant :

$$\begin{aligned}(2x+3)(x-2) &= 2x \times x + 2x \times (-2) + 3 \times x + 3 \times (-2)\\ &= 2x^2 - 4x + 3x - 6\\ &= 2x^2 - x - 6\end{aligned}$$

donc

> si le nombre de départ est x alors le résultat est $2x^2 - x - 6$.

2. Pauline propose le programme de calcul suivant.

> Choisis un nombre.
> Élève-le au carré.
> Soustrais 3.
> Multiplie par 2.
> Soustrais le nombre de départ.

(a) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat obtenu est égal à 9.

Appliquons le programme en prenant 3 pour nombre de départ.

Choisis un nombre.	3
Élève-le au carré	$3^2 = 9$
Soustrais 3.	$9 - 3 = 6$
Multiplie par 2.	$6 \times 2 = 12.$
Soustrais le nombre de départ.	$12 - 3 = 9.$

Si le nombre de départ est 3 alors le résultat est 9.

(b) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est $\dfrac{7}{3}$.

Appliquons le programme en prenant $\frac{7}{3}$ pour nombre de départ.

Choisis un nombre.	$\frac{7}{3}$
Élève-le au carré	$\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$
Soustrais 3.	$\frac{49}{9} - 3 = \frac{22}{9}$
Multiplie par 2.	$\frac{22}{9} \times 2 = \frac{44}{9}.$
Soustrais le nombre de départ.	$\frac{44}{9} - \frac{7}{3} = \frac{23}{9}.$

Si le nombre de départ est $\frac{7}{3}$ alors le résultat est $\frac{23}{9}$.

3. Montrer que, pour un même nombre de départ, les programmes de calcul d'Adam et Pauline donnent le même résultat.

Appliquons le programme en prenant x pour nombre de départ.

Choisis un nombre.	x
Élève-le au carré	x^2
Soustrais 3.	$x^2 - 3$
Multiplie par 2.	$(x^2 - 3) \times 2.$
Soustrais le nombre de départ.	$2(x^2 - 3) - x$

Or en développant, simplifiant puis réduisant :

$$\begin{aligned}2(x^2-3)-x &= 2\times x^2-2\times 3-x\\ &= 2x^2-6-x\\ &= 2x^2-x-6\end{aligned}$$

donc on obtient bien le même résultat que pour le programme de la question 1.

Les deux programmes donnent le même résultat.

4. Déterminer le ou les nombres de départ possibles pour que les résultats des programmes de calcul soient nuls. Justifier.

Au cours des questions précédentes nous avons obtenu diverses expressions littérales du résultat des programmes : $(2x+3)(x-2)$, $2x^2-x-6$, $2(x^2-3)-x$. Nous préférons l'expression qui fait apparaître une équation produit nul.

Résolvons l'équation : $(2x+3)(x-2)=0$.

$$(2x+3)(x-2)=0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}2x+3 &= 0 \quad \text{et} \quad x-2=0\\ 2x+3-3 &= 0-3 \quad \text{et} \quad x-2+2=0+2\\ 2x &= -3 \quad \text{et} \quad x=2\\ \frac{2x}{2} &= \frac{-3}{2} \quad \text{et} \quad x=2\\ x &= -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x=2\end{aligned}$$

Le résultat sera zéro si et seulement si le nombre de départ est choisi dans l'ensemble $\left\{-\frac{3}{2};\ 2\right\}$.

5. Adam souhaite automatiser les calculs de son programme pour les entiers naturels. Il utilise un tableur dont la copie d'écran est donnée ci-dessous.
   Quelle formule doit-il saisir dans la case B2 pour qu'il puisse l'étirer vers le bas sur l'ensemble de la colonne ?

	A	B
1	Nombre de départ	Résultat du programme
2	1	-5
3	2	0
4	3	9
5	4	22
6	5	39

Utilisons la formule donnée dans l'énoncé :

$$= 2 * \texttt{A2} \wedge 2 - \texttt{A2} - 6.$$

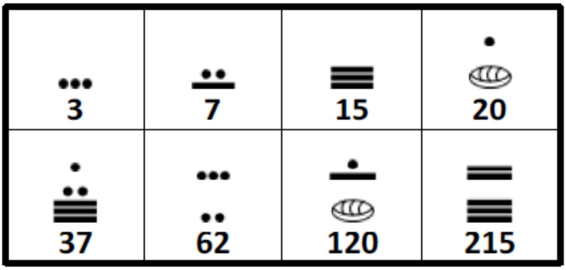
Exercice 5.

En Amérique centrale, les Mayas utilisaient un système de numération comprenant trois signes.

Le point	•
Le trait	—
La coquille	

Le signe « coquille » indique l'absence de quantité.

Quelques correspondances entre écriture Maya et écriture décimale sont données dans le tableau ci-dessous :

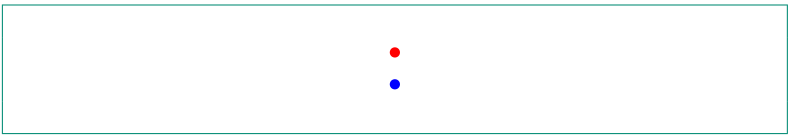


1. Donner la valeur du signe « point » et celle du signe « trait » dans l'écriture de 7 ?

   Le point signifie 1 et le trait signifie 5.

2. Le système maya est un système vigésimal (système qui a pour base 20). Donner l'écriture maya du nombre 21.

   $21 = 1 \times 20 + 1 \times 1$ donc :

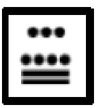
3. Justifier l'écriture maya du nombre 37.

   $37 = 1 \times 20 + 3 \times 5 + 2 \times 1$ donc

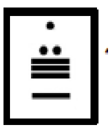
   

4. Donner l'écriture des deux nombres suivants dans notre système de numération.

   a)

   b)

a) $3 \times 20 + 2 \times 5 + 4 \times 1 = 74.$

b) $1 \times 400 + 3 \times 100 + 2 \times 20 + 1 \times 5 = 745.$

5. (a) Donner l'écriture maya du nombre 25.

$25 = 1 \times 20 + 1 \times 5.$

(b) Donner l'écriture maya du nombre 101.

$101 = 1 \times 100 + 1 \times 1.$

(c) Le système de numération maya est qualifié, tout comme le système de numération que nous utilisons, de système positionnel. Expliquer pourquoi.

Suivant l'endroit où sont placés les points ou les traits (haut ou bas) ils représentent des unités ou des vingtaines. On retrouve également l'utilisation d'un zéro de position sous la forme du coquillage.

Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 3.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.
Merci à Mme Jacquot pour toutes les corrections apportées.

Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Donner la bonne réponse en la justifiant.

Une réponse erronée n'enlève pas de point. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

1. Quel est le volume d'un cylindre d'une hauteur de 6 cm et de base un disque d'un diamètre de 8 cm ?
   On rappelle que le volume d'un cylindre se calcule avec la formule suivante :
   $$\textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}.$$
   a) 48π cm^3. b) 96π cm^3. c) 144π cm^3. d) 384π cm^3.

   En utilisant la formule rappelée par l'énoncé (et puisque la base est u cercle de rayon $\frac{8 \text{ cm}}{2}$) nous avons le volume :
   $$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \left[\pi\left(\frac{8 \text{ cm}}{2}\right)^2\right] \times (6 \text{ cm}) \\ &= \pi \times \left(\frac{8}{2}\right)^2 \times 6 \text{ cm}^2 \cdot \text{cm} \\ &= 96\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Réponse b.}}$

2. Le 1er juin, Nicolas lance une rumeur en la partageant avec trois personnes. Chaque jour, une personne prévenue la veille prévient trois nouvelles personnes qui ne sont pas encore informées.
   Combien de personnes apprennent la rumeur le 10 juin ?
   a) 30. b) 1 000. c) 59 049. d) 177 147.

   En itérant :
   — le premier juin 3 personnes sont prévenues,
   — le deux juin $3 \times 3 = 3^2 = 9$ personnes sont prévenues,
   — les trois juin $3 \times 9 = 3^3 = 27$ personnes sont prévenues,

— ...
On remarque qu'au jour n ce sont 3^n personnes qui sont prévenues.
Donc le 10 juin : $3^{10} = 59049$ personnes sont prévenues.

Réponse c.

3. Le prix d'un article subit une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 % quelques semaines plus tard. Au final :
   a) le prix de l'article a baissé de 1 %.
   b) l'article a retrouvé son prix initial.
   c) le prix de l'article a augmenté de 1 %.
   d) le prix de l'article a augmenté de 5 %.

Calculons le taux dévolution global t_g décrivant ces deux évolutions successives.

Pour modéliser des augmentations ou diminutions successives le plus simple consiste à travailler avec des coefficients multiplicateurs.

Une hausse de 10 % correspond au coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10}{100} \\ &= 1{,}10 \end{aligned}$$

De même une même une baisse de 10 % correspond au coefficient multiplicateur

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{-10}{100} \\ &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Le coefficient multiplicateur global correspondant aux deux évolutions successives est donc :

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_1 \times CM_2 \\ &= 1{,}1 \times 0{,}9 \\ &= 0{,}99 \end{aligned}$$

On peut maintenant traduire ce taux d'évolution en un coefficient multiplicateur :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM - 1) \\ &= 100 \times (0{,}99 - 1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Autrement dit le prix a, globalement baissé de 1 %.

Réponse a.

4. $\dfrac{4}{25}$ est ...

   a) un nombre réel mais n'est pas un nombre rationnel.
   b) un nombre rationnel mais n'est pas un nombre décimal.
   c) un nombre décimal mais n'est pas un nombre entier.
   d) un nombre entier.

   $\frac{4}{25} = 0{,}16$ donc c'est un nombre décimal (il admet une écriture décimale finie) mais ce n'est pas un entier (puisqu'il est strictement compris entre 0 et 1).

   Réponse c.

5. Le quart de $\dfrac{4}{12}$ est ...

   a) $\dfrac{1}{3}$. b) $\dfrac{4}{3}$. c) $\dfrac{16}{48}$. d) $\dfrac{4}{48}$.

   Un quart de x est $\frac{1}{4} \times x$. Donc un quart de $\frac{4}{12}$ est

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \times \frac{4}{12} &= \frac{1 \times 4}{4 \times 12} \\ &= \frac{4}{48} \end{aligned}$$

   Réponse d.

6. $\frac{2}{3} \times 5 + 5 \times \frac{1}{3}$ est égale à

a) 5. b) $\frac{20}{9}$. c) $\frac{15}{15}$. d) $\frac{20}{90}$.

Un calcul à la calculatrice permet de trouver la réponse. pour le justifier remarquons une factorisation :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \times 5 + 5 \times \frac{1}{3} &= 5\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\\ &= 5 \times 1\\ &= 5\end{aligned}$$

Réponse a.

7. Le triangle ABC est rectangle en B.
De plus, $AB = 8$ cm et $AC = 10$ cm.
L'aire du triangle ABC est ...

a) 24 cm^2. b) 40 cm^2. c) 48 cm^2. d) 80 cm^2.

Calculons l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC.

* Le triangle est rectangle en B donc la façon la plus simple de calculer son aire est de faire $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times AB \times BC$ puisque les hauteurs de l'angle droit se confondent à les hauteurs.
* Déterminons BC.
ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}8^2 + BC^2 &= 10^2\\ 64 + BC^2 &= 100\\ BC^2 &= 36\end{aligned}$$

BC étant une longueur donc un nombre positif :

$$BC = \sqrt{36}$$
$$BC = 6$$

Ainsi $BC = 6$ cm.

* Nous pouvons maintenant déterminer $\mathscr{A}$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times BC \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \text{ cm} \cdot \text{cm} \\ &= 24 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Réponse a.

Exercice 2.

Célia s'entraîne à courir tous les jours de la semaine sur le même parcours.

1. Elle aimerait comparer ses résultats d'entraînement sur une semaine à ceux de sa sœur qui s'entraîne également sur le même parcours.

Résultats obtenus par Célia cette semaine :

Lundi : 33 min et 12 secondes.
Mardi : 32 min et 4 secondes.
Mercredi : 40 min et 25 secondes.
Jeudi : 27 min et 11 secondes.
Vendredi : 30 min.
Samedi : 26 min et 38 secondes.
Dimanche : 29 min et 1 secondes.

Résultats obtenus par sa sœur cette semaine :

Moyenne : 31 min et 13 secondes.
Médiane : 30 min.
Étendue : 3 min.

(a) Comparer les durées moyennes de course.

Calculons la durée moyenne, x_c, de course de Célia.

Puisqu'elle a couru 7 jours :

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{33 \text{ min} + 12 \text{ s} + 32 \text{ min} + 4 \text{ s} + \cdots + 29 \text{ min} + 1 \text{ s}}{7} \\ &= \frac{217 \text{ min} + 91 \text{ s}}{7} \\ &= \frac{217}{7} \text{ min} + \frac{91}{7} \text{ s} \\ &= 31 \text{ min} + 13 \text{ s} \end{aligned}$$

Et puisque la moyenne de la sœur est de 31 min et 13 secondes

> les durées moyennes des sœurs sont les mêmes.

(b) Comparer les durées médianes de course.

Déterminons la médiane des temps de course de Célia.

* Ordonnons les temps de course.
  - Samedi : 26 min et 38 secondes.
  - Jeudi : 27 min et 11 secondes.
  - Dimanche : 29 min et 1 secondes.
  - Vendredi : 30 min.
  - Mardi : 32 min et 4 secondes.
  - Lundi : 33 min et 12 secondes.
  - Mercredi : 40 min et 25 secondes.
* $\frac{7}{2} = 3{,}5$ donc la médiane est la quatrième valeur de la série ordonnée.
* Le temps médian de Célia est 30 min.

Puisque la médiane de sa sœur est 30 min :

> les deux sœurs ont le même temps médian.

(c) Avec les informations ci-dessus, Célia affirme « Je suis la seule de nous deux à avoir réussi à effectuer ce parcours en moins de 28 minutes cette semaine ». Cette affirmation est-elle vraie ?

Un raisonnement par l'absurde.

Si le minimum de la série de la sœur était de 28 min alors, l'étendue étant de 3 min le maximum serait de 31 min.
La moyenne étant inférieure ou égale au maximum ceci serait contradictoire. Nécessairement le minimum est strictement supérieur à 28 min.

L'affirmation est vraie.

(d) Avec les informations ci-dessus, sa sœur lui répond « Moi, j'ai été la plus régulière de nous deux sur la semaine ». Expliquer ce commentaire.

Pour juger de la régularité il faut regarder si les valeurs sont très éloignées les unes des autres. Il faut donc utiliser un indicateur de dispersion. le seul dont nous disposions est l'étendue.

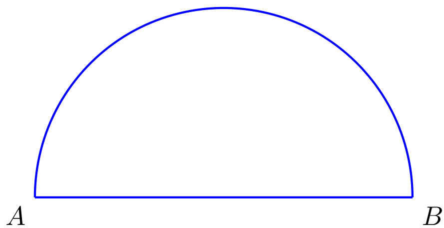
L'étendue de la série des durées de Célia est :

$$\begin{aligned} e &= 40\text{ min} + 25\text{ s} - (26\text{ min} + 38\text{ s}) \\ &= (40-26)\text{ min} + (25-38)\text{ s} \\ &= 14\text{ min} - 13\text{ s} \\ &= 13\text{ min} + (60-13)\text{ s} \\ &= 13\text{ min} + 47\text{ s} \end{aligned}$$

L'étendue de Célia est (beaucoup) plus importante donc

la sœur a été plus régulière.

2. Le parcours d'entraînement de Célia est représenté ci-dessous.



Le diamètre [AB] du demi-cercle reliant le point A au point B a pour longueur 2 300 m.

(a) Représenter le parcours à l'échelle $\dfrac{1}{20000}$. Justifier les mesures retenues pour réaliser la construction à l'échelle.

La mise à l'échelle consiste à appliquer de la proportionnalité sur les longueurs. Il faut trouver le bon coefficient (multiplicateur ou de proportionnalité).

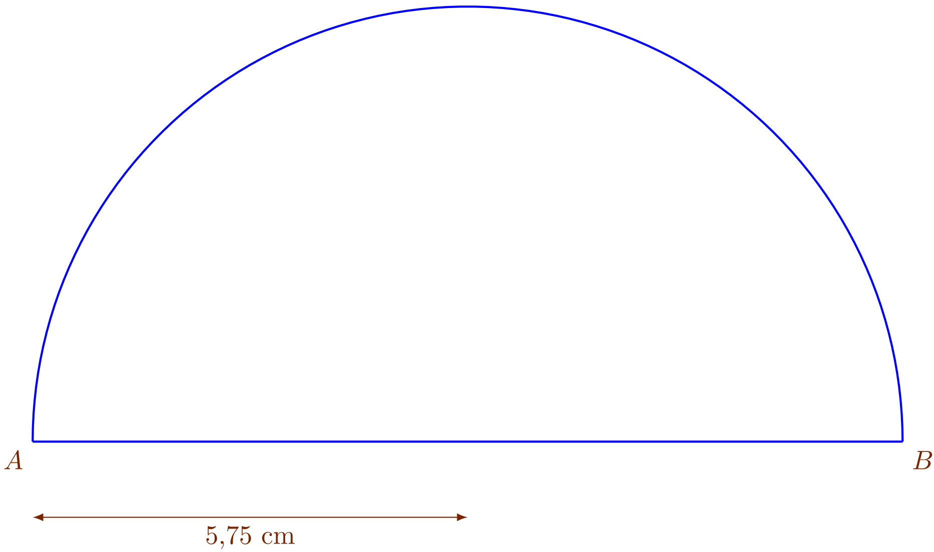
Déterminons la longueur $A'B'$ correspondant à AB après la mise à l'échelle.

$$\begin{aligned} A'B' &= \frac{1}{20\,000} \times AB \\ &= \frac{1}{20\,000} \times 2\,300 \text{ m} \\ &= \frac{2\,300}{20\,000} \times 100 \text{ cm} \\ &= 11{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ainsi le rayon du cercle que nous devons dessine est :

$$\begin{aligned} \frac{A'B'}{2} &= \frac{11{,}5 \text{ cm}}{2} \\ &= 5{,}75 \text{ cm} \end{aligned}$$

Finalement :



(b) Montrer que la distance du parcours, arrondie à l'unité, est d'environ 5 913 m.

Calculons la distance d_p du parcours.

Le parcours ayant une forme de demi-cercle fermé :

$$\begin{aligned} d_p &= 2\,300 \text{ m} + \frac{1}{2} \times \left(2\pi \frac{2\,300 \text{ m}}{2}\right) \\ &\approx 5912{,}83 \text{ m, en tronquant.} \end{aligned}$$

$$\boxed{d_p \approx 5913 \text{ m.}}$$

(c) Aujourd'hui, Célia a bouclé le parcours sur une durée de 33 minutes et 36 secondes.
Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h, arrondie au dixième près ?

Calculons la vitesse moyenne v_p.

$$v_p = \frac{d_p}{t_p}$$

où t_p désigne le temps mis pour faire le parcours.
Or

$$\begin{aligned} t_p &= 33 \text{ min} + 36 \text{ s} \\ &= 33\times\frac{1}{60} \text{ h} + 36\times\frac{1}{3600} \text{ h} \\ &= \left(\frac{33}{60} + \frac{36}{3600}\right) \text{ h} \\ &= \frac{14}{25} \text{ h} \\ &= 0{,}56 \text{ h} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_p &\approx 5913 \text{ m} \\ &\approx 5913\times\frac{1}{1000} \text{ km} \\ &\approx 5{,}913 \text{ km} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} v_p &\approx \frac{5{,}913 \text{ km}}{0{,}56 \text{ h}} \\ &= 10{,}5589 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}, \text{ en tronquant.} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_p \approx 10{,}6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.}$$

(d) Célia a l'habitude d'effectuer le parcours dans le sens des aiguilles d'une montre en partant du point A. Sur la représentation de la question 2.a., placer les points L, M et N correspondants respectivement au quart, à la moitié et aux trois quarts du parcours.

Plutôt que de travailler avec les longueurs réelles pour ensuite les convertir en longueur nous travaillerons avec les longueurs de la figure mise à l'échelle.

* La longueur P de la représentation du parcours est en centimètre, d'après la question 2.(a) :

$$\begin{aligned} P &= 2 \times 5{,}75 + \frac{1}{2} \times 2\pi 5{,}75 \\ &= (2+\pi)5{,}75 \\ &\approx 29{,}6 \end{aligned}$$

* $\frac{1}{4} \times 29{,}6 = 7{,}4$.
* Ainsi on doit avoir l'arc de cercle $\overset{\frown}{AL} \approx 7{,}4$ cm.
  Par rapport au demi-cercle d'extrémités A et B cela représente une proportion de

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{7{,}4}{\frac{1}{2} \times 2\pi 5{,}75} \\ &\approx 0{,}41 \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'angle correspondant :

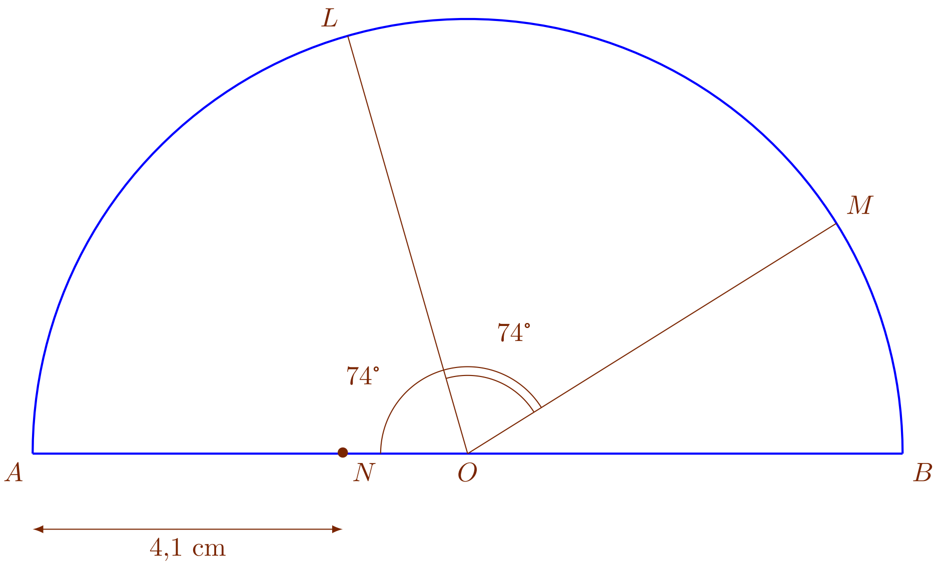
$$\begin{aligned} \theta &\approx \alpha \times 180 \\ &\approx 73{,}74 \end{aligned}$$

En notant O le centre du demi-cercle, nous avons obtenu que $\widehat{AOL} \approx 74°$.

* Donc : $\widehat{AOM} \approx 148°$.
* Le point N n'est a priori pas sur le demi-cercle.

$$\begin{aligned} AN &\approx 11{,}5 - 7{,}4 \\ &\approx 4{,}1 \end{aligned}$$

Enfin :



Morale : pensez à apporter un rapporteur.

Exercice 3.

Dans ce problème, les figures qui sont dessinées ne sont pas représentées à l'échelle.

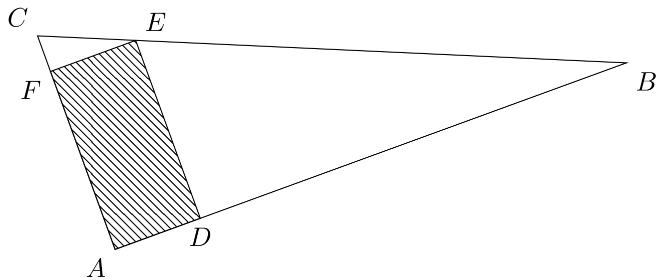
Partie A : installation du potager.

Une enseignante a le projet d'installer un potager rectangulaire $ADEF$ sur une parcelle de forme triangulaire ABC dans l'enceinte de l'école.

Les points A, B, C, D, E et F sont tels que :

- $AB = 24$ m, $AC = 10$ m et $BC = 26$ m ;

- $D \in [AB]$, $E \in [BC]$ et $F \in [AC]$.



La figure ci-dessus n'est pas à l'échelle.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   Nous connaissons les longueurs des trois côtés de ce triangle donc, pour vérifier qu'il est rectangle, il suffit d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

   Démontrons que ABC est rectangle en A.

   D'une part (toutes les grandeurs étant exprimées en mètres) :

$$CA^2 + AB^2 = 10^2 + 24^2$$
$$CA^2 = 676 \quad (1)$$

   et d'autre part :

$$CB^2 = 26^2$$
$$CB^2 = 676 \quad (2)$$

   donc, de (1) et (2), on déduit l'égalité qui nous permet d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore) :

$$CA^2 + AB^2 = CB^2.$$

   Donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\boxed{ABC \text{ est rectangle en } A.}$$

Dans la suite de cette partie, on souhaite déterminer où positionner le point D sur $[AB]$ pour que l'aire du rectangle hachuré $ADEF$ soit la plus grande possible.

2. Dans cette partie on considère que $AD = 4{,}8$ m.

   (a) Montrer que la longueur DE est égale 8 m.

   Pour calculer cette longueur et au su des angles droits nous pouvons penser à de la trigonométrie, au théorème de Thalès, au théorème de Pythagore.
   Nous n'avons pas d'information sur les angles non droits donc pas de trigonométrie.
   Nous ne connaissons pas BE donc pas de Pythagore.

   Déterminons DE en utilisant le théorème de Thalès.

   * Configuration de Thalès.
     Les points B, D, A d'une part et B, C, E d'autre part sont alignés dans cet ordre.
   * Parallélisme. Puisque, par construction , $ADEF$ est un rectangle, $(AF) \parallel (DE)$. Autrement dit $(AC) \parallel (DE)$.

   Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{CA}.$$

   En ne conservant que ce qui nous intéresse :

$$\begin{aligned}
\frac{BD}{AB} &= \frac{ED}{CA} \\
\frac{AB - AD}{24} &= \frac{ED}{10} \\
\frac{24 - 4{,}8}{24}\times 10 &= \frac{ED}{10}\times 10 \\
8 &= ED
\end{aligned}$$

$$\boxed{ED = 8 \text{ m.}}$$

(b) En déduire l'aire du rectangle $ADEF$ en m^2.

Calculons l'aire $\mathscr{A}(4{,}8)$ de $ADEF$.

Puisque $ADEF$ est un rectangle :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(4{,}8) &= AD \times DE \\ &= 4{,}8 \text{ m} \times 8 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(4{,}8) = 38{,}4 \text{ m}.}$$

On note x la longueur, exprimée en mètre, du segment $[AD]$.

3. (a) Montrer que $DE = 10 - \dfrac{5}{12}x$.

En procédant comme à la question 2.(a) :

$$\begin{aligned}DE &= 10 \times \frac{24 - x}{24} \\ &= 10\left(\frac{24}{24} - \frac{x}{24}\right) \\ &= 10\left(1 - \frac{1}{24}x\right) \\ &= 10 \times 1 - 10 \times \frac{1}{24}x \\ &= 10 - \frac{10}{24}x\end{aligned}$$

$$\boxed{DE = 10 - \tfrac{5}{12}x.}$$

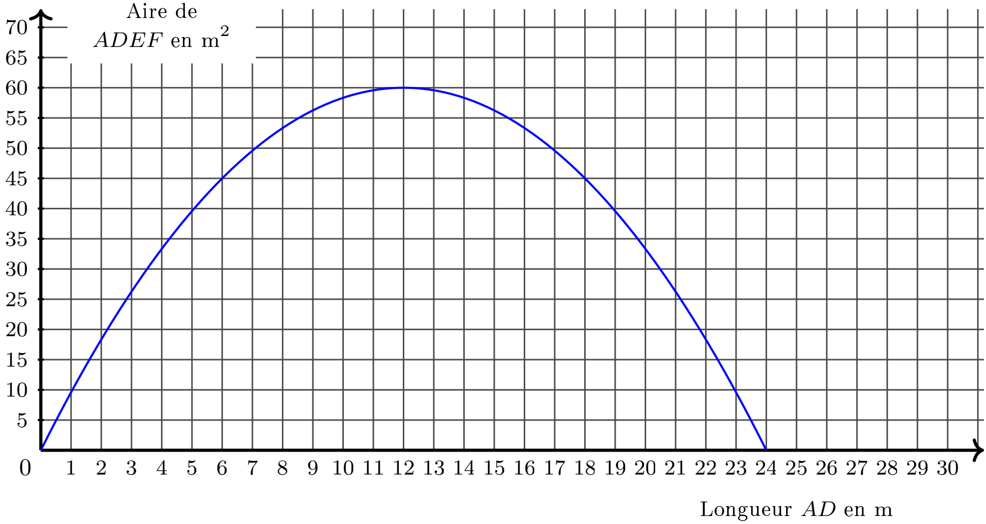
(b) En déduire l'aire du rectangle $ADEF$ en fonction de x.

En procédant comme dans la question 2.(b) :

$$\mathscr{A}(x) = AD \times DE$$

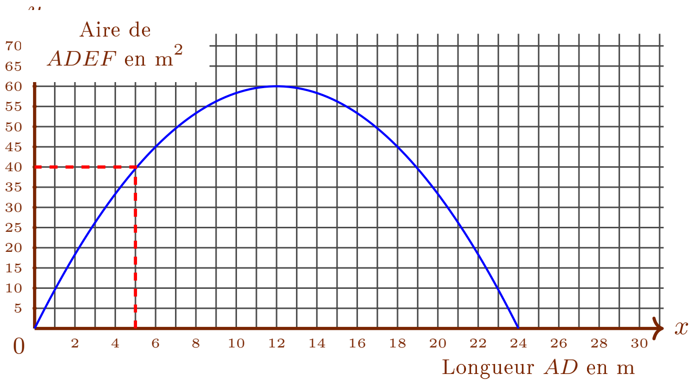
$$\boxed{\mathscr{A}(x) = x \times \left(10 - \tfrac{5}{12}x\right).}$$

4. Le graphique ci-dessous représente l'aire, exprimée en mètre carré, du rectangle $ADEF$ en fonction de la longueur x en mètre.



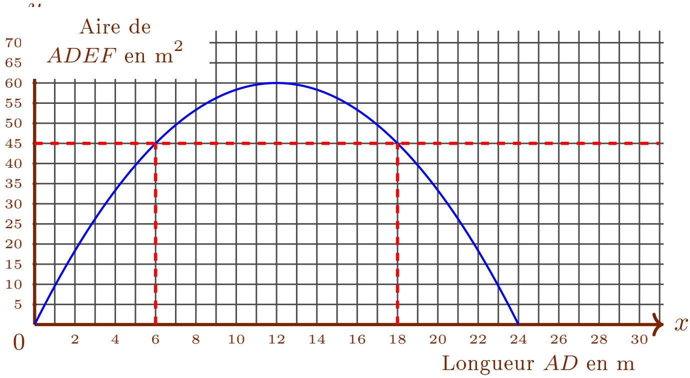
À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

(a) Quelle est l'aire du potager si la longueur AD vaut 5 m ?



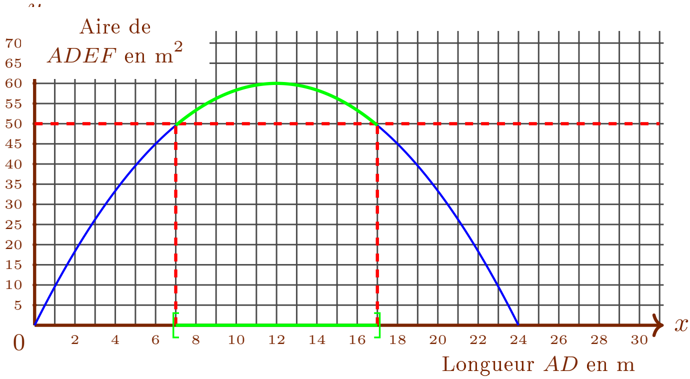
Si AD = 5 m le potager a une aire de 40 m^2.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur AD l'aire du potager est-elle égale à 45 m^2 ?



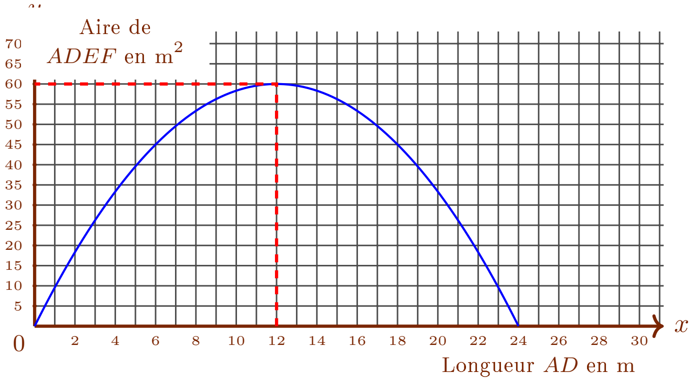
L'aire égalera 45 m^2 si l'on choisi AD = 6 m ou AD = 18 m.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur AD l'aire du potager est-elle supérieure ou égale à 50 m^2 ?



L'aire sera supérieure ou égale à 50 m^2 si $7 \leqslant AD \leqslant 17$.

(d) Quelle est l'aire maximale du potager ? Donner la longueur et la largeur du rectangle $ADEF$ correspondant.

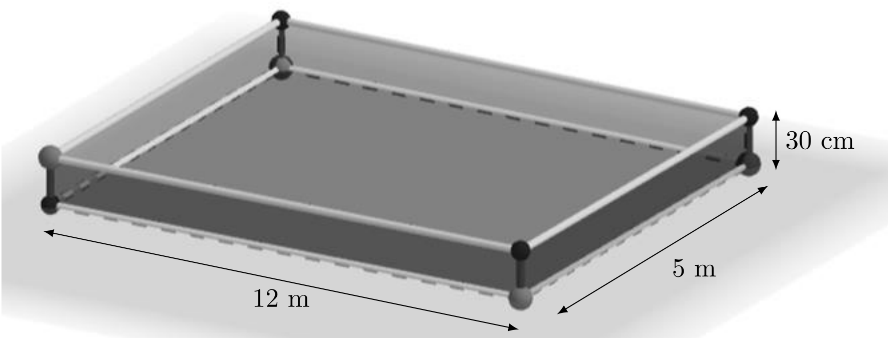


L'aire maximale est de 60 m^2 et cela advient lorsque $AD = 12$ m.

Partie B : choix du terreau.

Dans cette partie, le jardin est assimilé à un rectangle qui a pour longueur 12 m et pour largeur 5 m. On souhaite entourer le jardin d'une bordure de 30 cm de hauteur afin de remplir le pavé droit obtenu d'un mélange de terre et de terreau. On négligera, dans cette partie, l'épaisseur de la bordure du jardin.

Le mélange est composé d'un tiers de terreau et de deux tiers de terre.



1. Montrer que le volume de terreau nécessaire pour le potager est de 6 m^3.

   Calculons le volume $\mathscr{V}$ de terreau.

Puisqu'il s'agit d'un pavé droit le volume à remplir est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_r &= \left(12\ \mathrm{m}^2\right) \times (5\ \mathrm{m}) \times (30\ \mathrm{cm})\\ &= 12 \times 5 \times 30 \times \frac{1}{100}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}\\ &= 18\ \mathrm{m}^3\end{aligned}$$

Seul un tiers est à remplir donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \frac{1}{3}\mathscr{V}_r\\ &= \frac{1}{3} \times 18\ \mathrm{m}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V} = 6\ \mathrm{m}^3.}$$

2. Trois magasins proposent les offres suivantes :

Magasin 1

Livraison : 20 €.

0,10 € le litre de terreau

Magasin 3

Livraison offerte pour tout achat supérieur à 50 €.

5,37 € le sac de 50 litres de terreau

Magasin 2

Livraison offerte.

2,35 € le sac de 20 litres de terreau.

20 % de remise immédiate après l'achat d'une carte de fidélité au prix de 10 €.

Quel magasin choisir pour avoir le tarif, livraison comprise, le plus économique possible pour les 6 m^3 nécessaires ?

Comparons les trois offres.

Convertissons le volume de terreau en ℓ.

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= 6\ \mathrm{m}^3\\ &= 6 \times 1000\ \mathrm{dm}^3\\ &= 6000\ \ell\end{aligned}$$

* Pour le magasin 1 le coût est de

$$\begin{aligned} C_1 &= 20 + 6000 \times 0{,}10 \\ &= 620 \end{aligned}$$

* Magasin 2.
Une remise de 20 % correspond à un coefficient multiplicateur de

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= i1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

$6000 = 300 \times 20$ il faudra donc 300 sacs de 20 ℓ.
Nous en déduisons le coût :

$$\begin{aligned} C_3 &= 10 + 0{,}8 \times (300 \times 2{,}35) \\ &= 574 \end{aligned}$$

* Pour le magasin 3 : $6000 = 120 \times 50$. Il faudra donc 120 sacs. Nous en déduisons le coût :

$$\begin{aligned} C_2 &= 120 \times 5{,}37 \\ &= 644{,}4 \end{aligned}$$

Le magasin 2 est le plus économique pour 6 m^3.

Partie C : plantation des fleurs.

Dans la perspective d'offrir des bouquets de fleurs pour la fête de l'école, l'enseignante souhaite planter des graines dans le potager. Dans la classe il y a 26 élèves et chaque élève reçoit 20 graines à semer.

On a reporté ci-dessous ce que l'on peut lire sur le paquet de graines choisi.

Taux de germination des graines : 90 %.
Prix du paquet de graines : 4,53 €.
Ce paquet contient 50 graines.
Période de semis : d'avril à juin.
Hauteur adulte : 50 cm.

On rappelle que le taux de germination d'un paquet de graines indique le pourcentage de graines qui devraient germer et donc produire une fleur.

1. Combien de fleurs un élève peut-il espérer voir pousser ?

   Chaque élève reçoit 20 graines et le taux de germination est de 90 % donc le nombre de graines que l'on peut espérer voir pousser est

$$n_g = \frac{90}{100} \times 20$$

$$\boxed{n_g = 18.}$$

2. Quel sera le budget à prévoir pour l'achat des graines ?

   (a) Chacun des 26 élèves recevra 20 graines il faut donc un total de $26 \times 20 = 520$ graines.

   (b) Il y a 50 graines par paquet et $520 = 10 \times 50 + 20$ donc il faudra acheter 11 paquet.

   (c) Chaque paquet valant 4,53 € il faudra payer : $11 \times 4{,}53$ €.

   Il faut prévoir un budget de 49,83 €.

3. En plus des graines, des bulbes de tulipes et de jonquilles sont plantés.

   (a) L'enseignante en plante sur un sixième du potager puis un peu plus loin sur un huitième de ce même potager.
   Un élève affirme que les bulbes représentent plus de 25 % du potager. A-t-il raison ?

Justifier votre réponse.

$\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$ représentent donc $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{14}{48} = \frac{7}{24}$.
Comparons cette fraction à $\frac{25}{100}$:

$$\frac{25}{100} - \frac{7}{24} = -\frac{1}{24}$$

Puisque $\frac{25}{100} - \frac{7}{24} < 0$ il y a plus de 25 % du potager.

L'élève a raison.

(b) Elle met dans un panier 30 bulbes de jonquilles et des bulbes de tulipes.
La proportion de bulbes de jonquilles dans le panier est de $\frac{5}{6}$.
Calculer le nombre de bulbes de tulipes dans ce panier.

Notons x le nombre de bulbes dans le panier. Puisque $\frac{1}{6}$ des bulbes sont des tulipes.
Nous avons
$$30 + \frac{1}{6}x = x.$$

Cette équation (du premier degré) équivaut successivement à

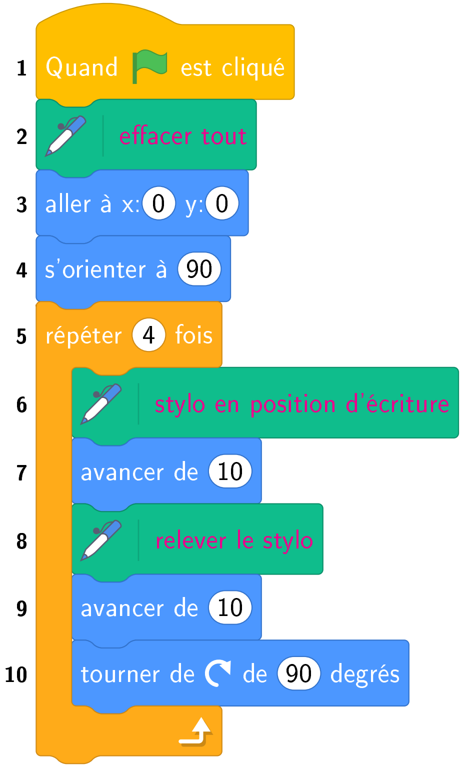
$$\begin{aligned} 30 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x &= x\frac{1}{6}x \\ 30 &= \frac{5}{6}x \\ \frac{6}{5}\times 30 &= \frac{6}{5}\times\frac{1}{6}x \\ 36 &= x \end{aligned}$$

Enfin $36 - 30 = 6$.

Il y a 6 bulbes de tulipes.

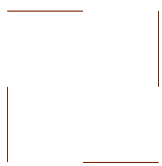
Exercice 4.

Voici un programme écrit avec le logiciel Scratch.



Cliquez sur ce lien pour télécharger le programme.

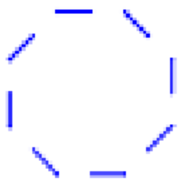
1. Représenter la figure obtenue lorsque le programme est exécuté. On prendra 1 mm pour 1 pixel.

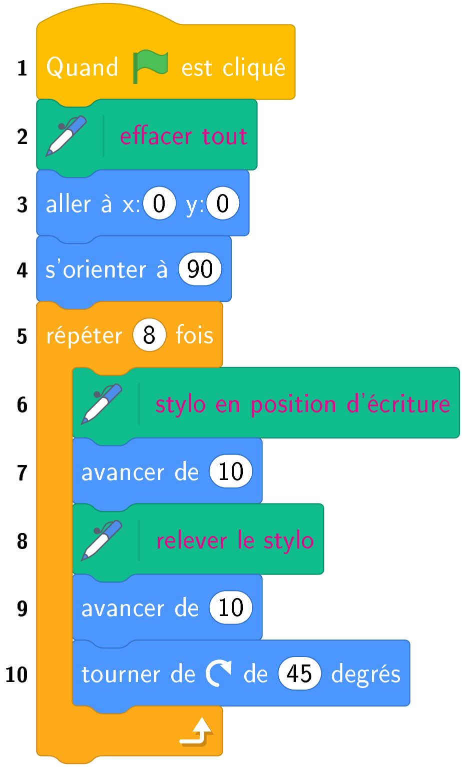


2. Marie souhaite obtenir la figure ci-dessous où chaque tiret mesure 10 pixels et est séparé du précédent de 10 pixels. Quelle(s) modification(s) doit-elle apporter au programme ?

Cliquez sur le programme pour le télécharger.

3. (a) Léo souhaite modifier le programme donné pour que l'on obtienne la figure ci-dessous.
   Quelle(s) modification(s) doit-il apporter au programme de départ ?





(b) Quel type de transformation géométrique permet de passer d'un tiret à un autre ?

> Il s'agit d'une rotation de 45 °.

Épreuve de mathématiques CRPE 2022 groupe 4.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 3 heures.
Épreuve notée sur 20.
Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1.

Une enseignante construit pour ses élèves un jeu de 80 cartes, avec 20 cartes de chacune des quatre couleurs : rouge, bleu, jaune et vert. Pour chaque couleur, les cartes sont numérotées de 0 à 9 et chaque numéro apparaît sur deux cartes. L'enseignante donne une carte du jeu au hasard à Déborah.

1. Quelle est la probabilité :

   (a) que la carte de Déborah soit bleue ?

   Modélisation : l'univers Ω est formé des 80 cartes et, chaque carte ayant la même probabilité qu'une autre d'être obtenue, nous munissons Ω de l'équiprobabilité.
   Notons B : « obtenir une carte bleue ».

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   Il y a équiprobabilité, B est réalisé par 20 issues et l'univers en contient 80 donc

   $$\mathbb{P}(B) = \frac{20}{80}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(B) = \tfrac{1}{4}.}$$

   (b) que la carte de Déborah porte le numéro 2 ?

   Notons N : « obtenir une carte numéro 2 ».

   Calculons $\mathbb{P}(N)$.

   Il y a équiprobabilité, N est réalisé par 8 issues et l'univers en contient 80 donc

   $$\mathbb{P}(N) = \frac{8}{80}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(N) = \tfrac{1}{10}.}$$

(c) que la carte de Déborah soit bleue et porte le numéro 2 ?

Calculons $\mathbb{P}(B \cap N)$.

Il y a équiprobabilité, $B \cap N$ est réalisé par 2 issues et l'univers en contient 80 donc

$$\mathbb{P}(B \cap N) = \frac{2}{80}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B \cap N) = \tfrac{1}{40}.}$$

(d) que la carte de Déborah soit bleue ou porte le numéro 2 ?

Calculons $\mathbb{P}(B \cup N)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cup N) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(N) - \mathbb{P}(B \cap N) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{40}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B \cup N) = \tfrac{13}{40}.}$$

2. L'enseignante décide d'ajouter des cartes *Joker* à son jeu. Combien doit-elle ajouter de cartes *Joker* pour que la probabilité que Déborah reçoive une carte *Joker* soit de $\dfrac{1}{6}$?

Notons x le nombre de cartes rajoutées et J :« obtenir un joker. ».

Déterminons x.

Il y a équiprobabilité, J est réalisé par x issues et l'univers en contient $80 + x$ donc

$$\mathbb{P}(J) = \frac{x}{80 + x}$$

Nous devons avoir :

$$\mathbb{P}(J) = \frac{1}{6}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{x}{80+x} = \frac{1}{6}$$

en procédant à un produit en croix et puisque $80 + x \neq 0$:

$$6x = 80 + x$$

nous reconnaissons une équation du premier degré, il suufit d'isoler l'inconnue :

$$\begin{aligned} 6x - x &= 80 + x - x \\ 5x &= 80 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{80}{5} \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Elle doit ajouter 16 cartes.

Exercice 2.

Partie A.

Une enquête réalisée dans le secteur des confitures (ensemble des produits de type confitures à base de fruits) a permis d'étudier l'évolution de l'offre entre 2009 et 2017.

Le tableau ci-dessous présente la répartition par année des différentes familles de produits. Les effectifs indiqués correspondent au nombre de marques. Par exemple, en 2009, il y avait sur le marché 227 marques différentes proposant des produits du type « confitures, gelées ou marmelades ».

FAMILLES DE PRODUITS	2009	2017
Confitures, gelées ou marmelades	227	452
Préparations à base de fruits	12	103
Confitures, gelées ou marmelades allégées	58	121
Préparations à base de purée de fruits	29	73
Crèmes de marrons ou pruneaux	11	32
TOTAL	337	781

Source:https://www.oqali.fr/content/download/3607/34342/version/1/file/OQALI_2019_Rapport_evolution_Confitures.pdf

1. (a) On sait qu'entre 2009 et 2010 le nombre de marques de la famille « Confitures, gelées ou marmelades allégées » a augmenté de 58,6 %. Calculer le nombre de marques dans cette catégorie en 2010 ; on arrondira à l'entier.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 58,6 % est

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{58{,}6}{100} \\ &= 1{,}586 \end{aligned}$$

   Donc le nombre de marques en 2010 est :

$$\begin{aligned} V_{2010/1} &= CM_1 \times V_{2009/1} \\ &= 1{,}586 \times 58 \\ &= 91{,}988 \end{aligned}$$

   En 2010 on compte 92 marques dans la catégorie allégées.

   (b) On sait qu'entre 2010 et 2017 le nombre de marques de la famille « Confitures, gelées ou marmelades » a augmenté de 52,7 %. Quel était le nombre de marques dans cette catégorie en 2010 ? On arrondira le résultat à l'entier.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 52,7 % est

$$\begin{aligned} CM_2 &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{52{,}7}{100} \\ &= 1{,}527 \end{aligned}$$

   Donc le nombre de marques en 2017 est :

$$V_{2017/2} = CM_2 \times V_{2010/2}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}452 &= 1{,}527 \times V_{2010/2}\\ \frac{452}{1{,}527} &= \frac{1{,}527 \times V_{2010/2}}{1{,}527}\\ V_{2010/2} &\approx 296{,}0052\end{aligned}$$

En 2010 on compte 296 marques dans la catégorie confitures.

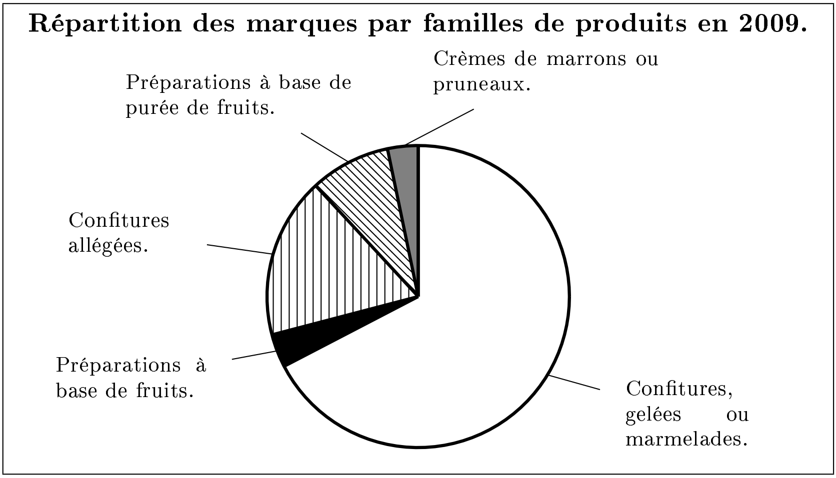
2. Calculer l'augmentation, en pourcentage, du nombre de marques des « Crèmes de marrons ou pruneaux » entre 2009 et 2017. On donnera le résultat arrondi au dixième d'unité de pourcentage.

   Le taux d'évolution est donné en pourcentage par

$$\begin{aligned}t_3 &= \frac{V_{2017/3} - V_{2009/3}}{V_{2033/3}} \times 100\\ &= \frac{32 - 11}{11} \times 100\\ &= 190{,}909090\ldots\end{aligned}$$

Le nombre de marques crèmes et marrons a augmenté de 191,0 % entre 2009 et 2017.

3. Le diagramme circulaire ci-dessous représente la répartition des marques par familles de produits en 2009. Calculer la mesure, au degré près, de l'angle correspondant aux « Confitures, gelées ou marmelades ».



Les angles sont proportionnels au nombre de marques il suffit de compléter le tableau :

	Marques	Angle en degré
Total	337	360
Confitures	227	x

Par un produit en croix :

$$337x = 227 \times 360$$
$$\frac{337x}{337} = \frac{227 \times 360}{337}$$
$$x \approx 242{,}49$$

L'angle pour les confitures est de 242°.

Partie B.

Un micro-entrepreneur se lance dans la fabrication artisanale de confitures de fruits. On appelle **préparation** le mélange avant cuisson de fruits et de sucre ajouté. La masse des autres ingrédients pouvant intervenir dans la recette sera négligée.

1. Il souhaite choisir une recette dont la préparation a une proportion de sucre ajouté comprise entre 20 % et 30 % pour obtenir une consistance satisfaisante après cuisson.

Préparation 1 : 240 g de sucre ajouté pour 1 kg de fruits.
Préparation 2 : $\dfrac{3}{4}$ de fruits et $\dfrac{1}{4}$ de sucre ajouté.
Préparation 3 : 330 g de sucre ajouté pour 1,5 kg de préparation.

Parmi ces trois préparations, laquelle ou lesquelles peut-il choisir pour respecter son choix ? Justifier.

Calculons la proportion de sucre dans les trois préparations.

* Préparation 1.
La proportion de sucre est

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{240 \text{ g}}{240 \text{ g} + 1 \text{ kg}} \\ &= \frac{240 \text{ g}}{240 \text{ g} + 1000 \text{ g}} \\ &= \frac{240}{1240} \\ &\approx 0{,}19354 \end{aligned}$$

Donc $p_1 \approx 19{,}35$ %.
D'où $p_1 \notin [20\ \%, 30\ \%]$.

La préparation 1 ne convient pas.

* Préparation 2.
$p_2 = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25$ %.
Comme $p_2 \in [20\ \%, 30\ \%]$

la préparation 2 convient.

* Préparation 3.
La proportion de sucre est

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{330 \text{ g}}{1{,}5 \text{ kg}} \\ &= \frac{330 \text{ g}}{1500 \text{ g}} \\ &= \frac{330}{1500} \\ &= 0{,}22 \end{aligned}$$

Donc $p_3 = 22~\%$. Et comme $p_3 \in [20~\%, 30~\%]$

la préparation 3 convient.

2. Le micro-entrepreneur choisit la préparation 2.

   (a) Pour 1 kg de fruits quelle masse de sucre, arrondie au gramme, devra-t-il ajouter ?

   Déterminons la masse x de sucre qu'il faut rajouter exprimée en gramme.

   Puisque la proportion de fruit doit être de $\frac{3}{4}$ et qu'il y a 1000 g de sucre :

$$\frac{1000}{x + 1000} = \frac{3}{4}$$

   ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 1000 \times 4 &= (x + 1000) \times 3, \text{ car } x + 1000 \neq 0 \\ 4000 &= x \times 3 + 1000 \times 3 \\ 4000 &= 3x + 3000 \\ 4000 - 3000 &= 3x + 3000 - 3000 \\ 1000 &= 3x \\ \frac{1000}{3} &= \frac{3x}{3} \\ x &= \frac{1000}{3} \\ x &\approx 333{,}33\ldots \end{aligned}$$

Il faut ajouter 333 g.

(b) Il doit indiquer sur les étiquettes des pots de confitures : « préparé avec ... g de fruits pour 100 g de produit fini », le produit fini étant la confiture après cuisson. Le micro-entrepreneur estime que 100 g de préparation donneront 83 g de produit fini.
Que devra-t-il inscrire sur son étiquette ? Justifier. On arrondira la masse au gramme.

* Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 100 g à 83 g est

$$\begin{aligned} CM_3 &= \frac{V_A}{V_D} \\ &= \frac{83 \text{ g}}{100 \text{ g}} \\ &= 0{,}83 \end{aligned}$$

* Nous avons, les grandeurs étant exprimées en gramme,

$$V_A = CM_3 \times V_D$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} 100 &= 0{,}83 \times V_D \\ \frac{100}{0{,}83} &= V_D \\ V_D &\approx 120{,}4819 \end{aligned}$$

Il devra écrire : 120 g.

(c) Pour connaître la proportion exacte de sucre avant cuisson, il faut tenir compte aussi du sucre naturellement présent dans les fruits. En considérant que les fruits utilisés contiennent naturellement 10 % de sucre, montrer qu'avec la recette retenue, le pourcentage de sucre dans la préparation est égal à 32,5 %.

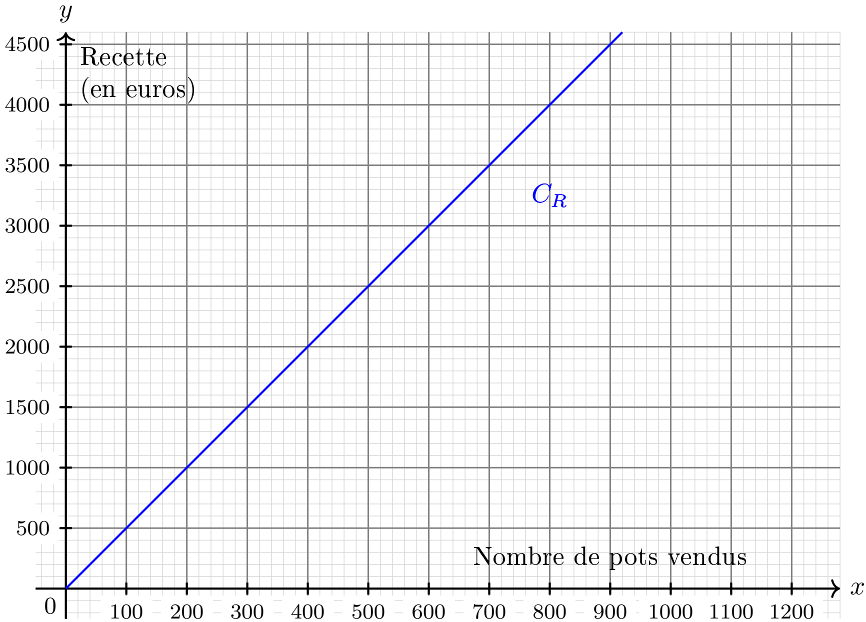
La proportion de sucre d'origine naturelle dans le mélange correspond à 10 % des trois quart du mélange : $\frac{10}{100} \times \frac{3}{4} = 0{,}075 = 7{,}5$ %.
En tenant compte de 25 % de sucre dans le mélange : 25 + 7,5 = 32,5.

Il y a 32,5 % de sucre dans le mélange.

Partie C.

Le micro-entrepreneur s'intéresse dans cette partie à la rentabilité de son entreprise.

1. La courbe ci-dessous est la représentation graphique C_R de la fonction R qui modélise la recette obtenue (en euros) en fonction du nombre de pots vendus.



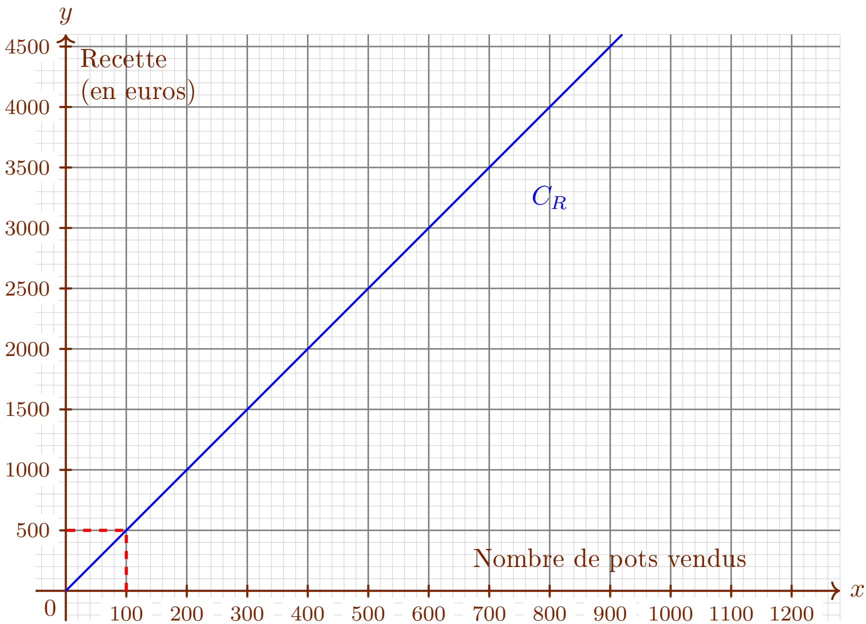
(a) Quelle est la nature de cette fonction ? Justifier.

La courbe représentative de la fonction est une droite donc il s'agit d'une fonction affine.

Comme de plus cette droite passe par l'origine du repère nous pouvons préciser que

R est une fonction linéaire.

(b) En utilisant le graphique, estimer le prix auquel le micro-entrepreneur a décidé de vendre un pot de confiture.



100 génèrent une recette de 500 € donc, par proportionnalité la recette correspondant à un pot est

$$R(1) = \frac{500}{100}.$$

Le micro-entrepreneur a décidé de vendre chaque pot 5 €.

2. On considère que tous les pots fabriqués sont vendus.
   Les coûts de fabrication sont estimés par le micro-entrepreneur à 3,25 € par pot de confiture, auxquels s'ajoute une charge fixe mensuelle de 500 €.
   On note x le nombre de pots vendus et $F(x)$ le coût mensuel de production (intégrant les coûts de fabrication et les charges fixes) en fonction de x.

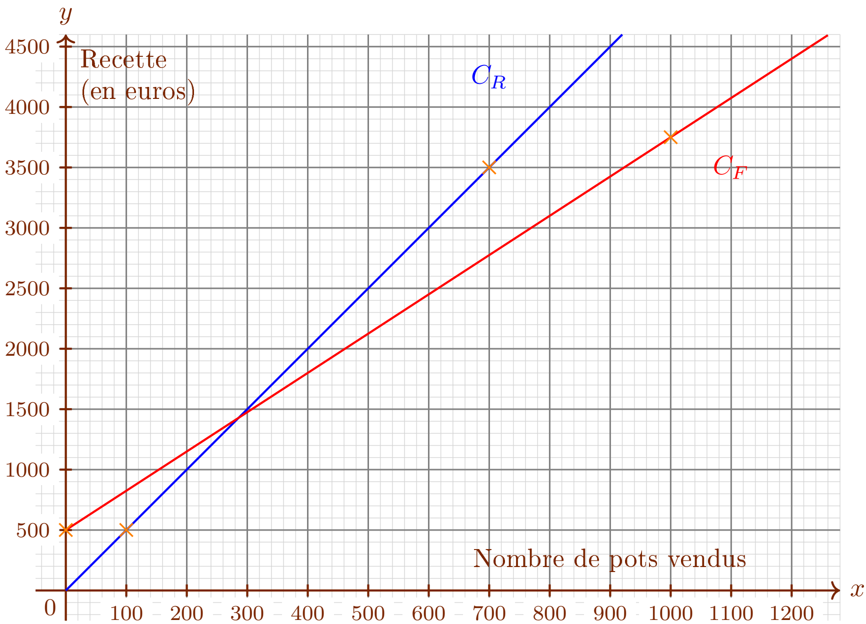
   (a) Exprimer $F(x)$ en fonction de x.

   Le coût de fabrication pour x pots est, par proportionnalité, $x \times 3{,}25$ €. Et comme l faut ajouter 500 € de frais fixes

   $F(x) = 3{,}25x + 500$ pour tout nombre entier naturel x.

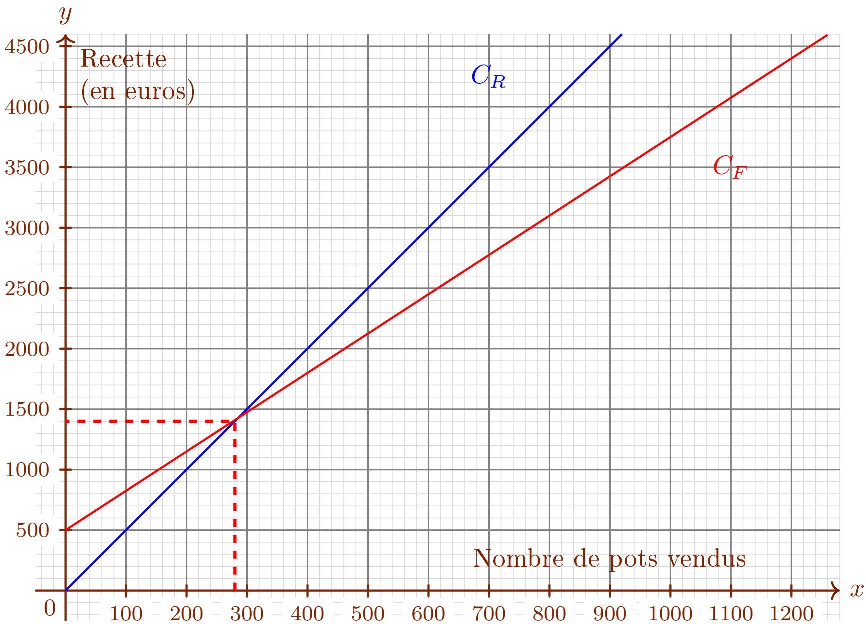
(b) Reproduire sur la copie la courbe C_R et représenter graphiquement dans le même repère la fonction F.

Pour dessiner la courbe représentative de R qui est une demi-droite, il suffit de reporter deux points à partir de leurs coordonnées.



Traçons C_F.
F est une fonction affine avec $a = 3{,}25$ et $b = 500$. Donc C_F est une droite (ou une partie de droite).
Puisque l'ordonnée à l'origine est $b = 500$, C_F passe par le point de coordonnées $(0; 3{,}25)$.
De plus pour, par exemple, $x = 1000$ alors $F(100) = 3{,}25 \times 1000 + 500 = 3750$. Donc C_F passe par le point de coordonnées $(1000; 3750)$.

(c) Par lecture graphique, estimer le nombre de pots vendus à partir duquel le micro-entrepreneur dégage un bénéfice.



Le micro-entrepreneur dégage un bénéfice à partir de 280 pots vendus.

(d) Trouver le résultat exact par un calcul.

Résolvons l'équation $F(x) \leqslant R(x)$.

R est une fonction linéaire, ce qui correspond à une situation de proportionnalité, or nous savons que la vente d'un pot donne une recette de 5 € donc : $R(x) = 5x$.

$$\begin{aligned}
F(x) &\leqslant R(x)\\
3{,}25x + 500 &\leqslant 5x\\
3{,}25x + 550 - 5x &\leqslant 5x - 5x\\
-1{,}75x + 550 &\leqslant 0\\
-1{,}75x + 500 - 500 &\leqslant 0 - 500\\
-1{,}75x &\leqslant -500\\
\frac{-1{,}75x}{-1{,}75} &\geqslant \frac{-500}{-1{,}75} \text{ car } -1{,}75 < 0\\
x &\geqslant \frac{500}{1{,}75}
\end{aligned}$$

Or $\frac{500}{1{,}75} \approx 285{,}714$ en tronquant donc

il dégagera un bénéfice à partir de 286 pots vendus.

Partie D.

On rappelle la formule suivante :

Volume d'un prisme ou d'un cylindre : $V = B \times h$.
où B désigne l'aire de la base du prisme ou du cylindre et h sa hauteur.

Les confitures produites sont conditionnées dans des pots. Les pots sont remplis au maximum à 90 % de leur volume.

1. Le pot n°1 est un cylindre, de hauteur 8 cm et de diamètre 7 cm.

   (a) Déterminer le volume du pot n°1, en centimètre cube, arrondi à l'entier.

   Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ du pot.

   Toutes les longueurs étant exprimées en centimètres :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_1 &= B \times h\\
&= \left(\pi R^2\right) \times 8\\
&= \left(\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2\right) \times 8\\
&= 98\pi\\
&\approx 307{,}876
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 308 \text{ cm}^3.}$$

(b) Quel volume maximum de confiture, en centimètre cube, arrondi à l'entier, peut-il contenir ?

Puisque 90 % du pot peut être rempli, le volume maximum de confiture est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{1m} &= \frac{90}{100} \times \mathscr{V}_1\\ &\approx \frac{90}{100} \times 308\\ &\approx 277{,}2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_{1m} \approx 277 \text{ cm}^3.}$$

2. Le pot n°2 est un prisme (figure A) dont la base (figure B) est un hexagone régulier de centre O. Sa hauteur est de 8 cm et les côtés de l'hexagone régulier mesurent 4 cm.

Figure A : pot n°2

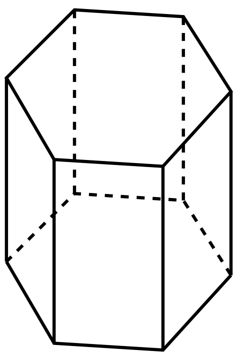
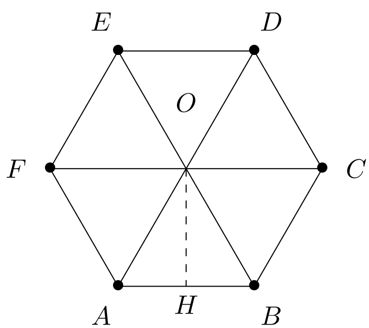


Figure B : base du pot.



On admet que les six triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA sont des triangles équilatéraux. On admet également que l'aire d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur x est $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

(a) Montrer que l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ est égale à $24\sqrt{3}$ cm^2.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_{hex}$ de l'hexagone.

L'hexagone est formé de 6 triangles équilatéraux dont l'aire est $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ où x est la longueur d'un côté *i.e.* 4 cm.
Nous en déduisons l'aire exprimée en centimètre carré :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{hex} &= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2\\ &= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2\\ &= 24\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_{hex} = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2.}$$

(b) En déduire le volume du pot n°2, en centimètre cube, arrondi à l'entier.

Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ du pot n°2.

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{2m} &= 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \times 8\ \text{cm}\\ &= 24 \times 8\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \times \text{cm}\\ &= 192\sqrt{3}\ \text{cm}^3\\ &\approx 332{,}5537\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_{2m} \approx 333\ \text{cm}^3.}$$

(c) Quel volume maximum de confiture, en centimètre cube, arrondi à l'entier, peut-il contenir ?

Puisque 90 % du pot peut être rempli, le volume maximum de confiture est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{2m} &= \frac{90}{100} \times \mathscr{V}_2\\ &\approx \frac{90}{100} \times 333\\ &\approx 299{,}7\end{aligned}$$

i

$$\mathscr{V}_{2m} \approx 300 \text{ cm}^3.$$

Exercice 3.

Le problème suivant est proposé en classe de cycle 3 :

> Vincent achète 24 cartes à jouer pour compléter sa collection. Certaines coûtent 1,25 € pièce et d'autres le double. Sa dépense totale s'élève à 48,75 €.
>
> Combien de cartes de chaque type a-t-il achetées ?

1. Un enseignant souhaite utiliser un tableur pour effectuer les calculs. Il propose la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E
1					
2	**Nombre de cartes à 1,25 €**	**Coût des cartes à 1,25 €**	**Nombre de cartes à 2,50 €**	**Coût des cartes à 2,50 €**	**Somme totale dépensée (€)**
3	0	0,00	24	60,00	60,00
4	1	1,25	23	57,50	58,75
5	2	2,50	22	55,00	57,50
6	3	3,75	21	52,50	56,25
7	4	5,00	20	50,00	55,00
8	5	6,25	19	47,50	53,75
9	6	7,50	18	45,00	52,50
10	7	8,75	17	42,50	51,25
11	8	10,00	16	40,00	50,00
12	9	11,25	15	37,50	48,75
13	10	12,50	14	35,00	47,50
14	11	13,75	13	32,50	46,25
15	12	15,00	12	30,00	45,00
16	13				
17	14	17,50	10	25,00	42,50
18	15	18,75	9	22,50	41,25
19	16	20,00	8	20,00	40,00
20	17	21,25	7	17,50	38,75
21	18	22,50	6	15,00	37,50
22	19	23,75	5	12,50	36,25
23	20	25,00	4	10,00	35,00
24	21	26,25	3	7,50	33,75
25	22	27,50	2	5,00	32,50
26	23	28,75	1	2,50	31,25
27	24	30,00	0	0,00	30,00

(a) En observant la feuille de calcul ci-dessus, donner la solution du problème.

Nous observons que le total désiré est atteint dans la cellule `E12`. Nous pouvons lire le nombre de cartes à 1,25 € correspondant en `A12` et celui de cartes à 2,50 € en `C12` :

il faut 9 cartes à 1,25 € et 15 cartes à 2,50 €.

(b) Recopier et compléter la ligne 16 de la feuille de calcul.

* On descend dans la colonne B en ajoutant 1,25 à chaque ligne.
* Sur une ligne, la somme des valeurs en A et C doit être de 24.
* On descend dans la colonne D en soustrayant 2,50.
* Sur une ligne, la valeur en E est la somme des valeurs en B et en D.

Finalement :

16	13	16,25	11	27,5	43,75

(c) Quelles formules ont pu être écrites dans les cellules B3, C3, D3 et E3, pour être ensuite recopiées dans les autres lignes ?

* En B3 :

$= \texttt{A3} * 1{,}25$

* En C3 :

$= 14 - \texttt{A3}$

* En D3 :

$= \texttt{C3} * 2{,}50$

* En E3 :

$= \texttt{B3} + \texttt{D3}$

2. Une élève de CM2 propose la résolution suivante :

$$24 \times 2{,}5 \text{ €} = 60 \text{ €}$$

$$60 \text{ €} - 48{,}75 \text{ €} = 11{,}25 \text{ €}$$

1 carte à 2,50 € = 2 cartes à 1,25 €

$$1125 \div 125 = 9$$

$$24 - 9 = 15$$

Vincent achète donc 9 cartes à 1,25 € et 15 cartes à 2,50 €.

Expliquer le raisonnement de cette élève.

Déchiffrons ligne par ligne :
— Si toutes les cartes coûtaient 2,5 € cela ferait un total de 60 €.
— Cela signifie 11,25 € de trop par rapport au total désiré.
— Or ces 11,25 € correspondent à 9 cartes à 1,25 €.
— Il s'agit d'enlever les 9 cartes qui correspondent aux 11,25 € de trop, il y aura donc 15 cartes à 2,50 €.

3. Répondre au problème en résolvant un système de deux équations à deux inconnues, en notant x le nombre de cartes à 1,25 euros et y le nombre de cartes à 2,50 euros.

Puisque le nombre total de carte est 24 et que la somme totale dépensée est de 48,75, x et y sont solution du système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & = & 24 & (1) \\ 1{,}25x & + & 2{,}50y & = & 48{,}75 & (2) \end{array} \right.$$

Résolvons le système (S) par substitution.

* D'après (1) :

$$x = 24 - y. \quad (3)$$

* En substituant x par cette expression dans (2) :

$$1{,}25(24 - y) + 2{,}50y = 48{,}75.$$

Cette équation du premier degré d'inconnue y équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
1{,}25 \times 24 - 1{,}25 \times y + 2{,}50y &= 48{,}75\\
30 - 1{,}25y + 2{,}5y &= 48{,}75\\
30 + 1{,}25y &= 48{,}75\\
30 + 1{,}25y - 30 &= 48{,}75 - 30\\
1{,}25y &= 18{,}75\\
\frac{1{,}25y}{1{,}25} &= \frac{18{,}75}{1{,}25}\\
y &= 15
\end{aligned}$$

* En substituant y par cette valeur dans (3) :

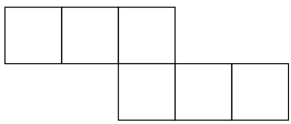
$$x = 24 - 15 = 9.$$

Il faut acheter 9 cartes à 1,25 € et 15 cartes à2,50 €.

Exercice 4.

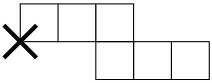
Une enseignante travaille la notion de patron de solides avec ses élèves. Elle souhaite leur faire construire des dés cubiques, de 3 cm de côté.

1. Un élève propose d'utiliser ce patron du cube :



À l'aide du logiciel *Scratch*, on souhaite écrire un algorithme permettant de construire ce patron. Le *Lutin* est initialement orienté vers la droite et 1 pas de *Lutin* mesurera 0,05 cm.

(a) Recopier et compléter, avec les trois nombres manquants, le bloc « carré » ci-dessous, permettant de construire le premier carré de gauche, en partant du sommet inférieur gauche.



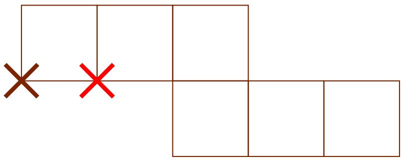
Position initiale du lutin

Cliquez sur ce lien pour télécharger le programme.

Un pas mesure 0,005 cm donc, pour obtenir un segment de 3 cm, il faut avancer de : $\frac{3}{0{,}05} = 60$ pas.
De plus pour obtenir un carré il faut évidemment tourner à angle droit.

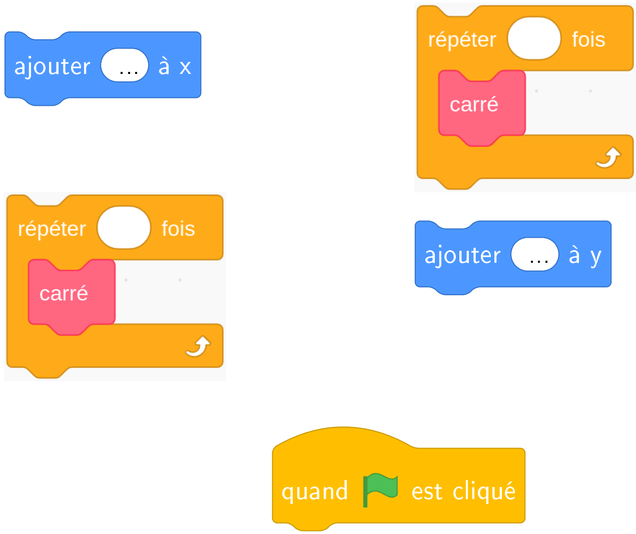
(b) Reproduire le patron et indiquer la position du stylo, à la fin de ce bloc « carré ».

Position finale du lutin

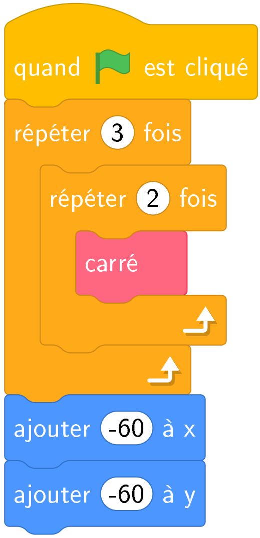


Position initiale du lutin

(c) Le bloc « carré » étant défini, ordonner, recopier et compléter les instructions ci-dessous pour que l'algorithme permette de construire ce patron de cube.



2. L'algorithme ci-dessous permet de représenter un nouveau patron de cube. Dessiner ce patron à main levée.


quand est cliqué
répéter 3 fois
répéter 2 fois
carré
ajouter -60 à x
ajouter -60 à y