# Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 5.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

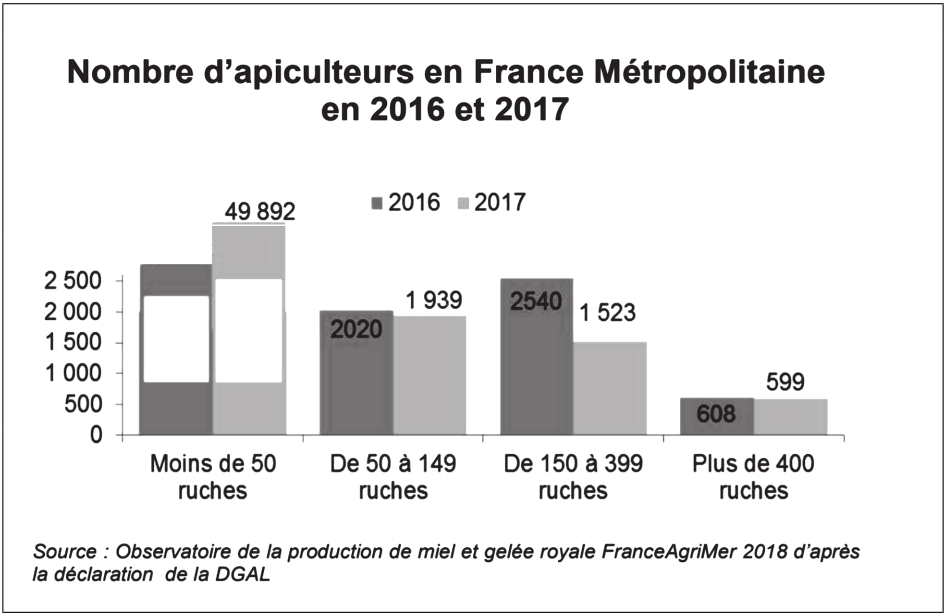
Merci à M. Langlois, Mme Schulz et M. Herminet pour leurs corrections.

*Durée : 4 heures.*
*Épreuve notée sur* 40.

## I Première partie (13 points).

### Partie A.

Voici un graphique présentant le nombre d'apiculteurs en France métropolitaine :




*Extrait de « France-Agricole-FranceAgriMer-MIEL-2018-Observatoire miel et GR 2017 »*

1. (a) Donner le nombre d'apiculteurs qui possédaient entre 150 ruches et 399 ruches en France métropolitaine en 2017.

1 523 apiculteurs possédaient entre 150 et 399 ruches en 2017.

(b) Donner le nombre total d'apiculteurs en 2017 en France métropolitaine.

$49\,892 + 1\,939 + 1\,523 + 599 = 53\,953$.

En 2017 il y avait 53 953 apiculteurs.

(c) Donner le nombre d'apiculteurs qui possédaient entre 50 ruches et 399 ruches en France métropolitaine en 2016.

$2\,020 + 2\,540 = 4\,560$.

En 2016 il y avait 4 560 apiculteurs avaient entre 50 et 399 ruches.

2. (a) Expliquer pourquoi la partie du diagramme concernant les apiculteurs possédant moins de 50 ruches n'est pas représenté de la même façon que les autres parties.

Il y a, approximativement 20 fois plus d'apiculteurs ayant moins de 50 ruches que dans les autres classes.

Le choix de la représentation découle de la disproportion dans le nombre d'apiculteurs dans cette classe.

(b) Pour les apiculteurs ayant moins de 50 ruches, le pourcentage d'augmentation entre 2016 et 2017 a été de 10,4 %.
Calculer le nombre d'apiculteurs en 2016 dans cette catégorie.

Calculons le nombre, $n_{2016}$, d'apiculteurs en 2016.

Nous devons retrouver la valeur initiale, avant évolution. Pour cela nous allons utiliser le coefficient multiplicateur réciproque, qui n'est autre que l'inverse du coefficient multiplicateur de l'évolution.

Le coefficient multiplication correspondant à une augmentation de 10,4 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{10{,}4}{100} \\ &= 1{,}104 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$n_{2016} \times CM = n_{2017}.$$

Donc :

$$n_{2016} = CM_r n_{2017},$$

où $CM_= \frac{1}{CM}$ est le coefficient multiplicateur réciproque.
Enfin :

$$\begin{aligned} n_{2016} &= \frac{1}{1{,}104} \times 49\,892 \\ &\approx 45\,192{,}02 \end{aligned}$$

45 192 apiculteurs avaient moins de 50 ruches en 2016.

3. Calculer le pourcentage d'évolution du nombre d'apiculteurs possédant au moins 150 ruches de 2016 à 2017, on arrondira le résultat au dixième d'unité de pourcentage.

Calculons le taux d'évolution $t_{16 \to 17}$ du nombre d'apiculteurs possédant au moins 150 ruches ente 2016 et 2017.

Le nombre d'apiculteurs ayant au moins 150 ruches en 2016 est

$$\begin{aligned} V_{16} &= 2540 + 608 \\ &= 3148 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{17} &= 1523 + 599 \\ &= 2122 \end{aligned}$$

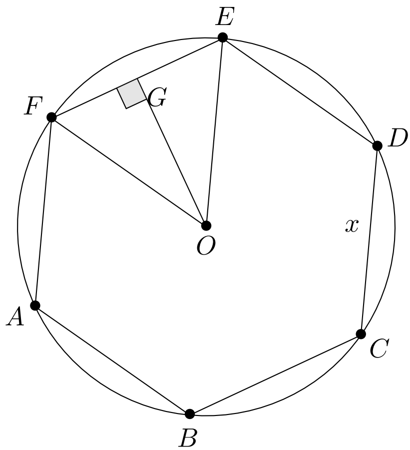
$$\begin{aligned} t_{16\to 17} &= \frac{V_{17} - V_{16}}{V_{16}} \times 100 \\ &= \frac{2122 - 3148}{3148} \times 100 \\ &\approx -3259I1 \end{aligned}$$

$t_{16\to 17} \approx -32{,}6$ %. Autrement dit le nombre d'apiculteurs a diminué de 32,6 %.

**Partie B.**

Dans une ruche, le miel est stocké par les abeilles dans des alvéoles. On considère que l'entrée de ces alvéoles a la forme d'un hexagone régulier, c'est-à-dire d'un hexagone non croisé, ayant tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure.

1. Soit l'hexagone régulier $ABCDEF$. On note $x$ la longueur d'un de ses côtés. Cet hexagone est inscrit dans un cercle de centre $O$.




(a) Montrer que le triangle $FOE$ est un triangle équilatéral.

Démontrons que $FOE$ est équilatéral.

$FOE$ est équilatéral si et seulement si $FOE$ est isocèle en $O$ et $\widehat{EOF} = 60°$.

* $[OF]$ et $[OE]$ sont des rayons du cercle donc $FOE$ est isocèle en $O$.

* Puisque l'hexagone est régulier $\widehat{EOF} = \frac{1}{6} \times 360° = 60°$.

$FOE$ est équilatéral.

On admet que l'aire d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur $x$ est $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

(b) Déterminer l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ en fonction de $x$.

Déterminons l'aire $\mathscr{A}_1$ de l'hexagone.

L'hexagone est constitué de 6 triangles équilatéraux tous isométriques à $FOE$. Donc

$$\mathscr{A}_1 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\mathscr{A}_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3}x^2.$$

(c) La périmètre de l'hexagone régulier vaut 18 mm. Montrer que l'aire de cet hexagone, arrondie au millième près, vaut 0,234 cm$^2$.

Calculons $\mathscr{A}_1$.

Le périmètre de l'hexagone est 18 mm, autrement dit

$$6x = 18 \text{ mm}$$

ce qui équivaut successivement à :

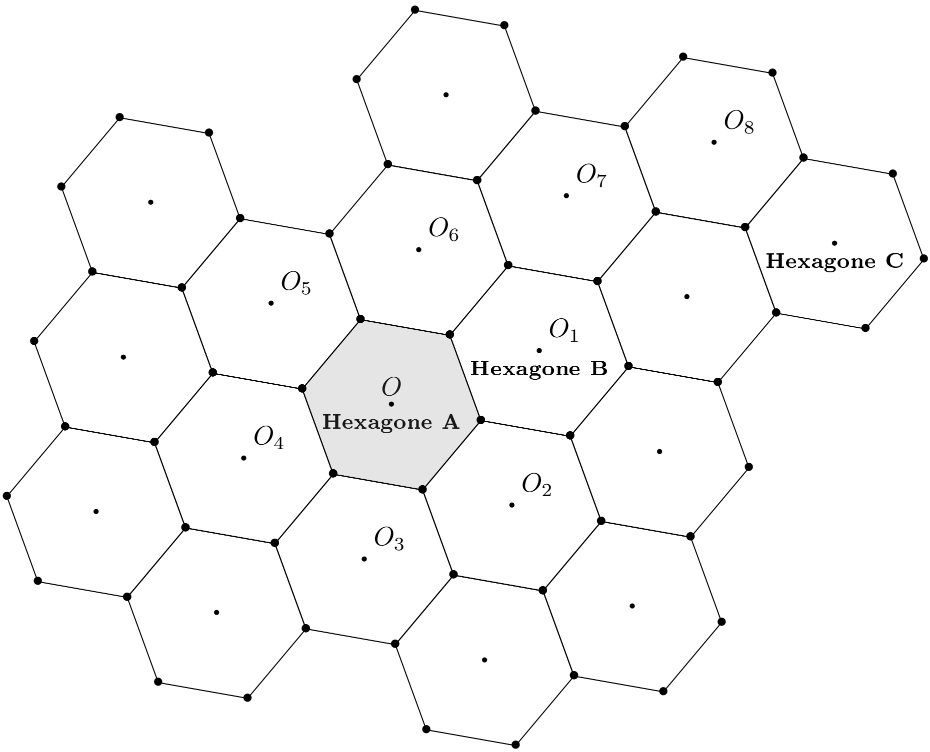
$$\frac{6x}{6} = \frac{18 \text{ mm}}{6}$$
$$x = \frac{18}{6} \text{ mm}$$
$$x = 3 \text{ mm}$$

Avec la formule de la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,(3\text{ mm})^2\\ &= \frac{3}{2}\sqrt{3}\times 3^2\ \text{mm}^2\\ &= \frac{27}{2}\sqrt{3}\times\frac{1}{100}\ \text{cm}^2\\ &\approx 0{,}2338\ \text{cm}^2 \quad \text{en tronquant}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_1 \approx 0{,}234\ \text{cm}^2.}$$

2. Les abeilles utilisent cette forme hexagonale régulière pour paver le plan :




(a) Caractériser trois transformations qui permettent de passer de l'**Hexagone A** à l'**Hexagone B**.

On peut passer de l'hexagone **A** à l'hexagone **B** par

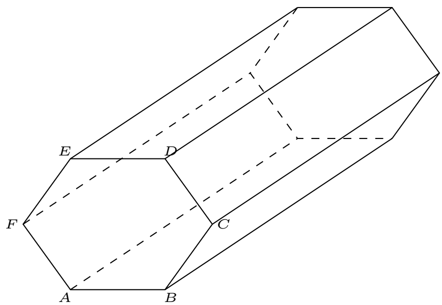
- la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$,
- La symétrie centrale de centre le milieu de $[OO_1]$,
- la symétrie axiale d'axe $[O_2O_6]$.

(b) Caractériser une transformation qui permet de passer de l'**Hexagone A** à l'**Hexagone C**.

On peut passer de l'hexagone **A** à l'hexagone **C** par

la translation de vecteur $3\overrightarrow{OO_1}$.

3. On admet qu'une alvéole a la forme d'un prisme régulier à base hexagonale, et est ouverte sur une face pour permettre le passage de l'abeille.
   On admet que la partie visible de chacune des alvéoles est un hexagone régulier dont le côté mesure 3 mm et que la profondeur des alvéoles, notée $h$, mesure 11,5 mm.




(a) Montrer que la contenance d'une alvéole est environ 270 mm$^3$.

Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ d'une alvéole.

Puisque l'alvéole à une forme de prisme son volume est

$$\mathscr{V}_1 = \mathscr{B} \times h, \quad \text{ou } \mathscr{B} \text{ est l'aire de la base.}$$

Or la base est ici hexagonale, donc, d'après la quesion B.1.(b) :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,(3\text{ mm})^2 \times 11{,}5\text{ mm}\\ &= \frac{3}{2}\sqrt{3} \times 3^2 \times 11{,}5\text{ mm}^3\\ &\approx 268{,}90089\text{ mm}^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 270\text{ mm}^3.}$$

(b) En déduire la contenance d'une alvéole en millilitre.

$$\begin{aligned}1\text{ mm}^3 &= 1 \times \left(\frac{1}{100}\text{ dm}\right)^3\\ &= 1 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3\text{ dm}^3\\ &= 10^{-6}\text{ L}\\ &= 10^{-6} \times 1000\text{ mL}\\ &= 10^{-3}\text{ mL}\end{aligned}$$

Par conséquent la contenance d'une alvéole est de

$$\mathscr{V}_1 \approx 270 \times 10^{-3}\text{ mL}$$

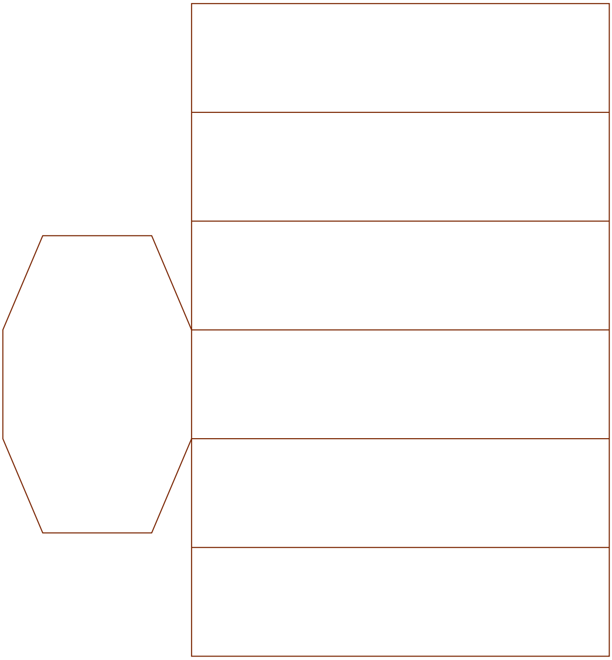
$$\boxed{\mathscr{V}_1 \approx 0{,}27\text{ mL}.}$$

(c) Construire un patron d'une alvéole à l'échelle 6 : 1.

Dessinons un patron d'une alvéole à l'échelle imposée.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Taille réelle | 1 | 3 mm | 11,5 mm |
| Taille à l'échelle | 6 | 18 mm | 69 mm |

La figure n'est pas à l'échelle demandée car ça ne rentrait pas. Elle est à 80 % de la taille demandée.



**Partie C.**

Une ruche Dadant est un modèle de ruche à cadres. Elle porte le nom de son inventeur, Charles Dadant (1817-1902). Un cadre de ruche Dadant est un rectangle de dimensions 41 cm × 26,5 cm ; dans ce qui suit, on négligera l'épaisseur du cadre. Une ruche contient 10 ou 12 cadres rectangulaires qui vont accueillir les alvéoles sur les faces avant et arrière de chaque cadre.

Dans cette partie on considère uniquement des ruches Dadant à 12 cadres.

1. En assimilant chaque alvéole à un carré dont les côtés mesurent 5 mm, montrer que l'on peut estimer qu'une telle ruche peut héberger 100 000 alvéoles.

   Déterminons le nombre $n_r$ d'alvéole hébergés dans une ruche.

   Une alvéole occupe une surface de $(5\text{ mm})^2 = 5^2\text{ mm}^2 = 25\text{ mm}^2$.
   Or la surface d'un cadre est de

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_2 &= (41 \text{ cm}) \times (26{,}5 \text{ cm})\\ &= (410 \text{ mm}) \times (265 \text{ mm})\\ &= 410 \times 265 \text{ mm} \cdot \text{mm}\\ &= 108\,650 \text{ mm}^2\end{aligned}$$

donc le nombre d'alvéole hébergées par les deux côtés du cadre est :

$$\begin{aligned}n_c &= 2 \times \frac{108\,650 \text{ mm}^2}{25 \text{ mm}^2}\\ &= 8\,692\end{aligned}$$

Nous en déduisons pour 12 cadres :

$$\begin{aligned}n_r &= 12 \times n_c\\ &= 12 \times 8\,692\\ &= 104\,304\end{aligned}$$

Une ruche héberge approximativement 100 000 alvéoles.

2. Montrer que le volume de miel, arrondi au litre, que peuvent contenir l'ensemble des 100 000 alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres est 27 L.

Déterminons le volume de miel $\mathscr{V}_2$ dans une ruche.

D'après la question B.3.(b) le volume de miel dans les 100 000 alvéoles est :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= 100\,000 \times 0{,}27 \text{ mL}\\ &= 100\,000 \times 0{,}27 \, \frac{1}{1000} \text{ L}\end{aligned}$$

$\mathscr{V}_2 = 27$ L.

3. On dispose des deux documents ci-dessous.

| **Une sortie d'une abeille butineuse.** |
| --- |
| Nombre de fleurs butinées : 20 à 300.<br>Durée de la sortie : 20 minutes.<br>Distance parcourue : 1 km.<br>Vitesse de l'abeille en vol : 27 km/h.<br>Masse de nectar récolté : $6 \times 10^{-5}$ kg. |

| **Miel.** |
| --- |
| Masse volumique : 1,4 kg/L.<br>Quantité de nectar nécessaire pour fabriquer 1 kg de miel : 4 kg. |

Répondre aux questions suivantes en utilisant les documents ci-dessus et les questions précédentes.

(a) Quelle masse de nectar doivent récolter les abeilles pour obtenir 25 g de miel ?

Il s'agit d'une situation de proportionnalité. Schématisons la par un tableau.

| | |
| --- | --- |
| 1 kg = 1 000 g | 25 g |
| 4 kg = 4 000 g | $x$ g |

Les changements d'unités ne sont pas indispensables ici puisque les proportions sont des nombres sans unités. Cependant cela peut faciliter un raisonnement consistant à se ramener à l'unité.

Donc $x = 25 \times \frac{4000}{1000}$.

Pour obtenir 25 g il faut récolter 100 g de nectar.

(b) Quelle masse de nectar doivent récolter les abeilles pour obtenir 100 mL de miel ?

Raisonnons là encore par proportionnalité. Nous savons que la masse volumique du miel est de 1,4 kg/L. Autrement dit chaque litre à une masse de 1,4 kg.

| | |
| --- | --- |
| 1,4 kg | $x$ kg |
| 1 L = 1 000 mL | 100 mL |

Donc : $x = \frac{1{,}4 \text{ kg}}{1\,000 \text{ mL}} \times 100$ mL.

Pour obtenir 100 mL de miel les abeilles doivent récolter 0,14 kg de nectar.

(c) Estimer la masse de miel que peuvent contenir l'ensemble des alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres.

D'après la question C.2. la ruche contient 27 L or chaque litre a une masse de 1,4 kg donc la masse de miel est

$$\begin{aligned} m_1 &= 27 \text{ L} \times 1{,}4 \text{ kg/L} \\ &= 27 \times 1{,}4 \text{ L} \cdot \text{kg/L} \\ &= 37{,}8 \text{ kg} \end{aligned}$$

la masse contenue dans une ruche est 37,8 kg.

(d) Montrer qu'une estimation de la distance parcourue par l'ensemble des abeilles pour obtenir 1 kilogramme de miel est de 67 000 km.

* Déterminons le nombre, $n_s$, de sorties nécessaires pour obtenir 1 kg de miel.

  Pour obtenir un 1 kg de miel il faut récolter 4 kg de nectar.
  Chaque sortie permet de récolter $6 \times 10^{-5}$ kg de nectar, donc (encore de la proportionnalité) pour obtenir 4 kg de miel le nombre de sorties nécessaires est :

$$\begin{aligned} n_s &= \frac{4 \text{ kg}}{6 \times 10^{-5} \text{ kg}} \\ &= \frac{4}{6 \times 10^{-5}} \\ &\approx 66\,667 \end{aligned}$$

* Déterminons la distance parcourue pour récolter 4 kg de nectar.

  À chaque sortie la distance parcourue est de 1 km donc la distance parcourue lors de 66 667 sorties est $66\,667 \times 1$ kg.

Pour obtenir 1 kg de miel les abeilles doivent parcourir approximativement 67 000 km.

(e) Estimer la distance parcourue par l'ensemble des abeilles pour remplir de miel l'ensemble des alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres (sans compter le miel consommé par les abeilles elles-mêmes).

D'après la question C.3.(c) la ruche contient 37,8 kg et, d'après la question précédente, chaque kilogramme nécessite un parcours de 67 000 km donc la distance parcouru, en kilomètre, pour remplir la ruche est :

$$37{,}8 \times 67\,000 = 2\,532\,600$$

Pour remplir une ruche les abeilles doivent parcourir 2 532 600 km.

# II Deuxième partie (13 points).

**Exercice 1.**

Une urne contient des boules rouges, bleues, noires et vertes. On suppose que ces boules sont indiscernables au toucher.

La probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{1}{4}$.
La probabilité de tirer une boule verte est de 0,3.
La probabilité de tirer une boule noire est de 20 %.

1. On tire au hasard une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue ?

Ici l'univers n'est pas descriptible par ses issues puisque nous ne connaissons pas le nombre de boules. Nous allons travailler avec le système complet d'événements correspondant aux différentes couleurs.

Notons $B$ l'événement « obtenir une boule bleue » et de même $R$, $N$ et $V$. Considérons l'univers $\Omega = \{N,R,B,V\}$ muni de la loi de probabilité décrite par l'énoncé.

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Puisque, par définition de la loi de probabilité :

$$\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V) = 1$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{20}{100} + \frac{1}{4} + \mathbb{P}(B) + 0{,}3 &= 1 \\ \mathbb{P}(B) + \frac{3}{4} &= 1 \\ \mathbb{P}(B) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} &= 1 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \tfrac{1}{4}.}$$

2. Il y a 140 boules dans l'urne. Donner le nombre de boules de chaque couleur.

Le contexte de l'exercice laisse entendre que chaque boule à la même probabilité d'être tirée qu'une autre. Autrement dit il y a équiprobabilité entre les diverses boules. Par conséquent les probabilités se confondent avec les proportions.

Déterminons le nombre, $n_R$, de boules rouges.

Puisque $\frac{1}{4}$ des 140 boules sont rouges :

$$\begin{aligned} n_R &= \frac{1}{4} \times 140 \\ &= 35 \end{aligned}$$

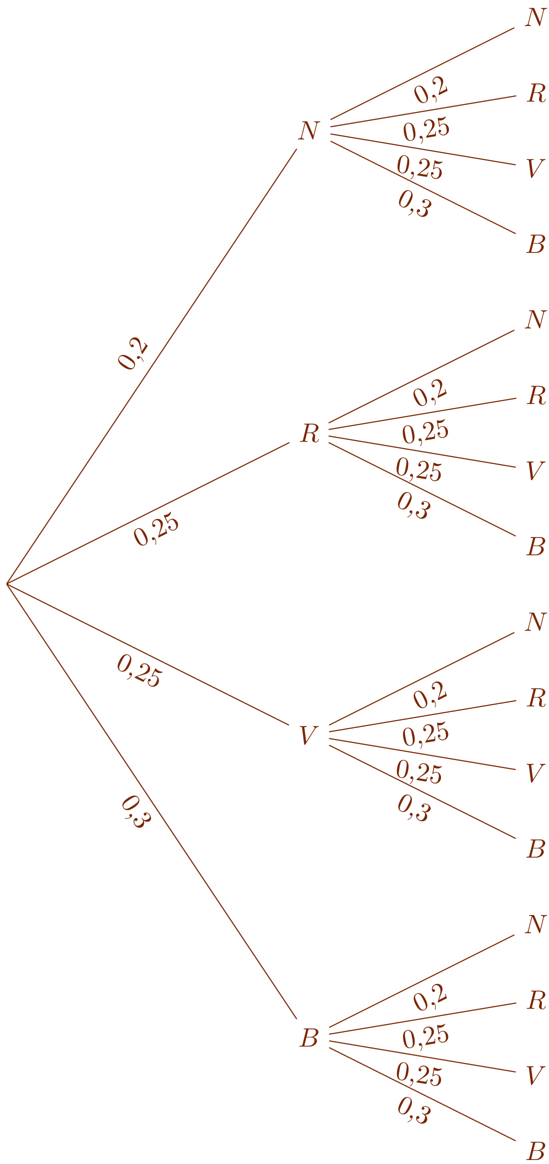
En procédant de même pour les différentes couleurs :

| Couleur | $N$ | $R$ | $B$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|
| Nombre | 28 | 35 | 35 | 42 |

3. On effectue maintenant deux tirages successifs avec remise.

   (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge puis une boule verte ?

   Schématisons l'expérience aléatoire par un arbre pondéré. Il y a 2 tirages donc notre arbre aura deux niveaux. De plus comme le tirage se fait avec remise nous retrouverons les mêmes embranchements sur chaque niveau avec les mêmes probabilités : $\frac{28}{140} = 0{,}2$, $\frac{35}{140} = 0{,}25$ et $\frac{42}{140} = 0{,}3$.




Calculons $\mathbb{P}(RV)$.

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(RV) = 0{,}25 \times 0{,}25$$

$$\boxed{\mathbb{P}(RV) = 0{,}0625.}$$

(b) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge et une boule verte ?

Calculons $\mathbb{P}(R \cap V)$.

$R \cap V = \{RV ; VR\}$ donc

$$\mathbb{P}(R \cap V) = \mathbb{P}(RV) + \mathbb{P}(VR)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(R \cap V) = 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}25$$

$$\boxed{\mathbb{P}(R \cap V) = 0{,}125.}$$

(c) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de la même couleur ?

Notons $E$ l'événement « obtenir deux boules de la même couleur ».

Calculons $\mathbb{P}(E)$.

$E = \{NN, RR, VV, BB\}$.
Donc :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(NN) + \mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(VV) + \mathbb{P}(BB)$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(E) = 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}25 + 0{,}3 \times 0{,}3$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = 0{,}255.}$$

**Exercice 2.**

On donne la copie d'écran de deux algorithmes réalisés à l'aide du logiciel Scratch.

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Saisir un nombre) et attendre
mettre [Résultat ▾] à (réponse)
ajouter à [Résultat ▾] (3)
mettre [Résultat ▾] à ((Résultat) * (Résultat))
mettre [Résultat ▾] à ((Résultat) - (9))
dire (Résultat) pendant (2) secondes
```

**Algorithme 1**

```
Quand [drapeau] est cliqué
demander (Saisir un nombre) et attendre
mettre [Résultat ▾] à (réponse)
ajouter à [Résultat ▾] (3)
mettre [Résultat ▾] à ((Résultat) * (Réponse))
dire (Résultat) pendant (2) secondes
```

**Algorithme 2**

Cliquez sur les programmes ci-dessus pour les télécharger.

1. Montrer que si le nombre de départ est 2, on obtient 16 avec chacun des deux algorithmes.

   Pour le premier algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

| Ligne de code. | Réponse. | Résultat. |
|---|---|---|
| demander (Saisir un nombre) et attendre | 2 | |
| mettre [Résultat ▾] à (réponse) | 2 | 2 |
| ajouter à [Résultat ▾] (3) | 2 | $2+3=5$ |
| mettre [Résultat ▾] à ((Résultat) * (Résultat)) | 2 | $5\times 5=25$ |
| mettre [Résultat ▾] à ((Résultat) - (9)) | 2 | $25-9=16$ |

   Pour le second algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

| Ligne de code. | Réponse. | Résultat. |
|---|---|---|
| demander Saisir un nombre et attendre | 2 | |
| mettre Résultat à réponse | 2 | 2 |
| ajouter à Résultat 6 | 2 | $2 + 6 = 8$ |
| mettre Résultat à Résultat * Réponse | 2 | $8 \times 2 = 16$ |

Si le nombre choisi en entrée est 2 alors les deux algorithmes renvoient 16.

2. Le nombre de départ est 1,2. Quel(s) nombre(s) obtient-on avec chacun des deux algorithmes ?

   Pour le premier algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

| Ligne de code. | Réponse. | Résultat. |
|---|---|---|
| demander Saisir un nombre et attendre | 1,2 | |
| mettre Résultat à réponse | 1,2 | 2 |
| ajouter à Résultat 3 | 1,2 | $1{,}2 + 3 = 4{,}2$ |
| mettre Résultat à Résultat * Résultat | 1,2 | $4{,}2 \times 4{,}2 = 17{,}64$ |
| mettre Résultat à Résultat - 9 | 1,2 | $17{,}64 - 9 = 8{,}64$ |

   Pour le second algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

| Ligne de code. | Réponse. | Résultat. |
|---|---|---|
| demander Saisir un nombre et attendre | 1,2 | |
| mettre Résultat à réponse | 1,2 | 1,2 |
| ajouter à Résultat 6 | 1,2 | $1{,}2 + 6 = 7{,}2$ |
| mettre Résultat à Résultat * Réponse | 1,2 | $7{,}2 \times 1{,}2 = 8{,}64$ |

Si le nombre choisi en entrée est 1,2 alors les deux algorithmes renvoient 8,64.

3. Quelle conjecture peut-on émettre ? Démontrer cette conjecture.

Nous conjecturons :

Il semble que les deux algorithme renvoie la même valeur.

Recherchons ce que renvoient les deux algorithmes pour une valeur en entrée égale à $x$.

Pour le premier algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

| Ligne de code. | Réponse. | Résultat. |
|---|---|---|
| demander (Saisir un nombre) et attendre | $x$ | |
| mettre Résultat à (réponse) | $x$ | $x$ |
| ajouter à Résultat (3) | $x$ | $x + 3$ |
| mettre Résultat à ((Résultat) * (Résultat)) | $x$ | $(x+3)\times(x+3)$ |
| mettre Résultat à ((Résultat) - (9)) | $x$ | $(x+3)^2 - 9$ |

Pour le second algorithme nous obtenons le tableau d'état des variables suivant.

| Ligne de code. | Réponse. | Résultat. |
|---|---|---|
| demander (Saisir un nombre) et attendre | $x$ | |
| mettre Résultat à (réponse) | $x$ | $x$ |
| ajouter à Résultat (6) | $x$ | $x + 6$ |
| mettre Résultat à ((Résultat) * (Réponse)) | $x$ | $(x+6)\times x$ |

Démontrons que $(x+3)^2 - 9 = (x+6)\times x$.

La méthode consiste ici à développer, réduire et ordonner autant que possible les deux expressions ci-dessus pour s'assurer qu'elles sont égales.

D'une part :

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 9 &= x^2 + 2 \times x \times 3^2 - 9 \\ &= x^2 - 3x + 9 - 9 \\ &= x^2 - 6x\end{aligned}$$

d'autre part :

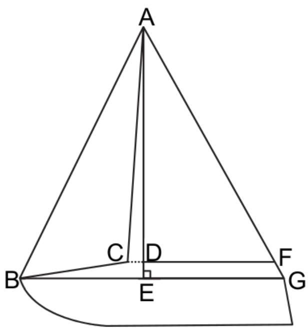
$$\begin{aligned}(x+6) \times x &= x \times x + 6 \times x \\ &= x^2 + 6x\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(x+3)^2 - 9 = x^2 + 6x.}$$

**Exercice 3.**

Les dimensions du voilier de madame Guidel sont données ci-dessous.




**Vue en coupe du bateau**

La figure n'est pas à l'échelle.

$AE = 12$ m, $BG = 11$ m, $DE = CD = 1$ m, $BE = 5$ m.

Les points $A$, $F$ et $G$ ainsi que les points $C$, $D$ et $F$ et les points $B$, $E$ et $G$ sont alignés.

Les droites $(DF)$ et $(EG)$ sont parallèles.

Les droites $(AE)$ et $(BG)$ sont perpendiculaires.

La voile de l'avant, appelée foc, est représentée par le triangle $ABC$.

La grand-voile est représentée par le triangle $ADF$.

1. En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle $AEG$, déterminer la longueur de la bôme $[DF]$.

   Calculons $DF$.

   - Configuration de Thalès. $A$, $D$ et $E$ d'une part, $A$, $F$ et $G$ d'autre part sont alignés dans le même ordre.
   - Hypothèse pour la forme directe du théorème. $(DF) \parallel (EG)$.

   Des points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

   $$\frac{AD}{AE} = \frac{DF}{EG}.$$

   Puisque $E \in [BG]$

   $$EG = BG - BE = 11 \text{ m} - 5 \text{ m} = 6 \text{ m}$$

   et puisque $D \in [AE]$,

   $$AD = AE - DE = 12 \text{ m} - 1 \text{ m} = 11 \text{ m}$$

   nous avons donc

   $$\frac{11}{12} = \frac{DF}{6}.$$

   Nous en déduisons successivement

   $$\begin{aligned} \frac{11}{12}\times 6 &= \frac{DF}{6}\times 6 \\ 5{,}5 &= DF \end{aligned}$$

   $$\boxed{DF = 5{,}5 \text{ m.}}$$

2. Calculer l'aire de la grand-voile.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}_g$ de la grand-voile.

   La grand-voile a une forme triangulaire nous devrions donc chercher une hauteur pour calculer son aire mais il s'agit en fait d'un triangle rectangle donc nous choisirons l'un des côtés de l'angle droit comme hauteur.

   Puisque $(EG) \perp (AE)$ et $(EG) \parallel (DF)$, nécessairement $(DF) \perp (AE)$.

Puisque $ADF$ est un triangle rectangle en $D$ :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_g &= \frac{1}{2} \times AD \times DF \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \text{ m} \times 5{,}5 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \times 5{,}5 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_g = 30{,}25 \text{ m}^2.}$$

3. Lorsque le vent forcit, on remplace le foc par une voile plus petite appelée trinquette. La trinquette est une réduction du foc de coefficient $\frac{4}{5}$ (appliquée aux longueurs).

   (a) Calculer l'aire du triangle $ADC$ et du quadrilatère $BCDE$.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}(ADC)$ de $ADC$.

   $ADC$ est rectangle en $D$ donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ADC) &= \frac{1}{2} \times AD \times DC \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \text{ m} \times 1 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 11 \times 1 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ADC) = 5{,}5 \text{ m}^2.}$$

   Calculons l'aire $\mathscr{A}(BCDE)$ de $BCDE$.

   $BCDE$ est un trapèze rectangle en $E$ de bases $[BE]$ et $[CD]$ donc son aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(BCDE) &= \frac{1}{2} \times (BE + CD) \times DE \\ &= \frac{1}{2} \times (5 \text{ m} + 1 \text{ m}) \times 1 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \text{ m} \times 1 \text{ m} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 1 \text{ m} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(BCDE) = 3 \text{ m}^2.}$$

(b) En déduire que l'aire du foc $(ABC)$ est de 21,5 m$^2$.

Calculons l'aire $\mathscr{A}(ABC)$ de $ABC$.

$ABE$ est rectangle en $E$ donc son aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{E} &= \frac{1}{2} \times AE \times EB \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \text{ m} \times 5 \text{ m} \\ &= 30 \text{ m}^2\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABC) &= \mathscr{A}(ABE) - \mathscr{A}(ADC) - \mathscr{A}(BCDE) \\ &= 30 \text{ m}^2 - 5{,}5 \text{ m}^2 - 3\text{m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = 21{,}5 \text{ m}^2.}$$

(c) En déduire l'aire de la trinquette.

Calculons l'aire $\mathscr{A}_t$ de la trinquette.

Si les longueurs, exprimées en m, sont multipliées par $\frac{4}{5}$ alors les aires, exprimées en m$^2$ sont multipliées par $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_t &= \frac{16}{25} \times \mathscr{A}(ABC)\\ &= \frac{16}{25} \times 21{,}5 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_t = 13{,}76 \text{ m}^2.}$$

4. Pour cette question, on admet que l'aire de la surface totale des voiles (grand-voile, foc et trinquette) est égale à 65,51 m$^2$. La propriétaire hésite entre deux voileries pour la fabrication de ses voiles.

| **Maître voilier local** | **Usine en Asie** |
|---|---|
| • Tarif : 86 €/m$^2$.<br>• Qualité du tissu : 340 g/m$^2$.<br>• Livraison offerte. | • Tarif de base : 64 euro/m$^2$.<br>• Qualité du tissu : 340 g/m$^2$.<br>• Taxes d'importation : 32 % du prix de base de la marchandise.<br>• Frais de port à la charge du client |

**Frais de port de l'Asie vers la France**

| Masse (en kg, arrondie à l'unité) | Prix à payer |
|---|---|
| Entre 5 et 10 | 100 € |
| Entre 11 et 18 | 150 € |
| Entre 19 et 25 | 250 € |
| Au-delà de 26 kg | Contacter le service client. |

Déterminer la solution la plus économique en justifiant la réponse.

Calculons les deux tarifs.

* En local.
Par proportionnalité, le prix des voiles sera de

$$\begin{aligned}86 \text{ €/m}^2 \times 65{,}51 \text{ m}^2 &= 86 \times 65{,}51 \text{ €}\\ &= 5633{,}86 \text{ €}\end{aligned}$$

* En Asie.
  Par proportionnalité, le prix des voiles sera de

$$\begin{aligned} 64\ €/\text{m}^2 \times 65{,}51\ \text{m}^2 &= 64 \times 65{,}51\ € \\ &= 4192{,}64\ € \end{aligned}$$

Les taxes induisent une augmentation de 32 %, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{32}{100} = 1{,}32$.
Donc après taxation le prix sera de

$$1{,}32 \times 4192{,}64\ € = 5534{,}2848\ €$$

La qualité du tissu étant de 0,34 kg/m², la masse des voiles commandées est de

$$\begin{aligned} 0{,}34\ \text{kg}/\text{m}^2 \times 65{,}51\ \text{m}^2 &= 0{,}34 \times 65{,}51\ \text{kg} \\ &= 22{,}2734\ \text{kg} \end{aligned}$$

Il faudra donc payer 250 € de frais de port.
Finalement l'achat des voileries reviendra à

$$5534{,}2848\ € + 250\ € = 5784{,}2848$$

| |
|---|
| L'achat en local est plus économique. |

# III Troisième partie (14 points).

**Situation 1.**

Après avoir introduit les nombres décimaux et l'addition des nombres décimaux, un enseignant de CM1 propose à ses élèves le problème ci-dessous.

| |
|---|
| Chez le fromager, Madame Costa a dépensé 41 €.<br>Elle a acheté une part de comté à 18,28 euro, une part de beaufort à 15,72 € et un reblochon.<br>Combien a coûté le reblochon ? |

On a retranscrit ci-dessous les réponses de quatre élèves.

$$\begin{array}{r} {}^{1\ 1\ \ 1} \\ 41 \\ +\ 18,28 \\ +\ 15,72 \\ \hline 34,41 \end{array}$$

La réponse est 34,41 €.

**ÉLÈVE A**

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ +\ 18 \\ +\ 15 \\ \hline 33 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1} \\ 28 \\ +\ 72 \\ \hline 100 \end{array} \qquad 33 + 100 = 34$$

41 – 34 = 11 – 4 = 7

Il coûte 7 euros.

**ÉLÈVE B**

$$\begin{array}{r} {}^{1\ \ 1} \\ +\ 18,28 \\ +\ 15,72 \\ \hline 33,100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\ {}_{1}1 \\ -\ 3_{1}\ 3,100 \\ \hline 8,100 \end{array}$$

41 € – 33,100 € = 8,100 €.

Le reblochon coûte 8,10 €

**ÉLÈVE C**

$$\begin{array}{r} {}^{1\ 1\ \ 1} \\ 18,28 \\ +\ 15,72 \\ \hline 34,00 \end{array}$$

41 + 34 = 70 + 5 = 75

Le reblochon a coûté 75 €.

**ÉLÈVE D**

1. Justifier qu'il est possible de proposer un tel problème alors que la soustraction des nombres décimaux n'a pas encore été étudiée.

2. En s'appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessous, analyser les productions des quatre élèves en termes de réussites et d'erreurs pour chacune des compétences « Modéliser » et « Calculer ».

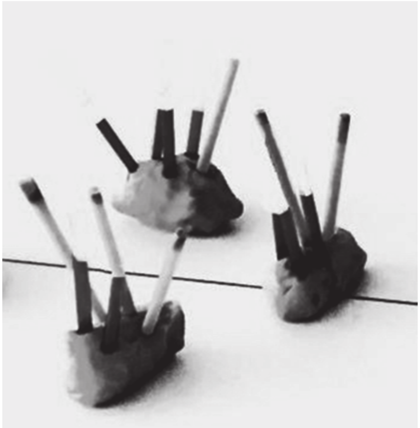
*Extrait de la note de service n°2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».*

> ***« Modéliser » et « Calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire*** *qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :*
> — *difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;*
> — *difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calculs utilisés.*

3. Proposer une remédiation ou un accompagnement que l'enseignant pourrait mettre en place pour aider l' **ÉLÈVE A** à résoudre ce type de problème.

**Situation 2.**

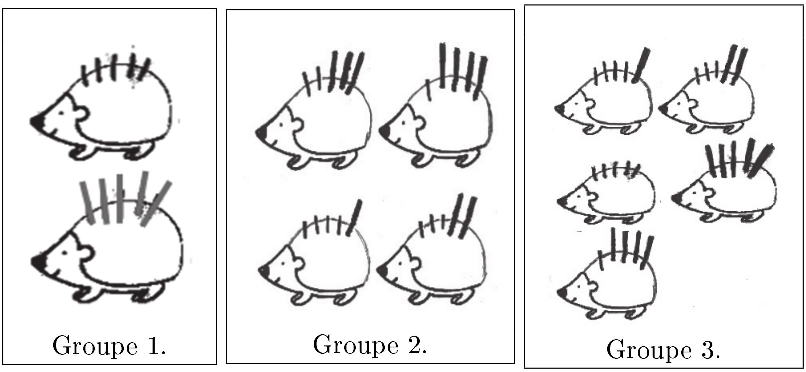
Dans une classe de Moyenne Section de maternelle, un enseignant propose le jeu « ***Les piquants des hérissons*** ». L'enseignant propose à ses élèves de fabriquer, par groupes de 4 élèves, des hérissons en pâte à modeler, chaque hérisson devant avoir cinq piquants. Il donne la consigne suivante : « *Vous allez composer des hérissons à 5 piquants, pas plus, pas moins, en choisissant des petits piquants rouges ou des grands piquants verts. Un mélange des couleurs est possible. Vous devez faire le plus de hérissons possible, mais les hérissons doivent être différents, ils ne doivent pas avoir autant de piquants de la même couleur.* »



**Matériel utilisé** :
— Pâte à modeler (corps du hérisson) ;
— Petites pailles rouges et grandes pailles vertes.

1. Est-ce l'« ordinal » ou l'usage « cardinal » du nombre qui est mobilisé dans cette séance ? Justifier la réponse.

2. Après la manipulation, les élèves représentent leurs solutions sur des hérissons dessinés.
   L'enseignant récupère les quatre productions ci-dessous.



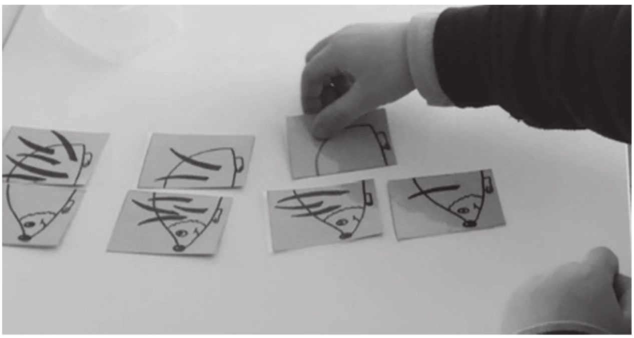
Groupe 1. Groupe 2. Groupe 3.

Groupe 4.

| **Légende :** | |
|---|---|
| Petit piquant rouge | Grand piquant vert |

Analyser les productions de chacun des groupes d'élèves en termes de réussites et d'erreurs.

3. Après avoir demandé aux élèves de trouver tous les hérissons différents possibles à 5 piquants, l'enseignant propose aux élèves une nouvelle activité : les élèves doivent reconstituer des hérissons à 5 piquants, à partir de cartes représentant des demi-hérissons.



Expliquer le lien, concernant les premiers apprentissages numériques, entre cette activité et la précédente.

4. Proposer une nouvelle activité sans lien avec la précédente permettant de travailler les différentes décompositions du nombre 5.

**Situation 3.**

1. Dans les programmes en vigueur pour le cycle 3, (programmes consolidés à partir du BOEN n°31 du 30 juillet 2020), il est inscrit dans les attendus du domaine Nombres et calculs : « *Comprendre et appliquer aux nombres décimaux les règles de la numération décimale de position* ».

   (a) Rappeler ce que sont « les règles de la numération décimale de position », en précisant ce que sont l'aspect décimal et l'aspect positionnel dont il est fait mention. Les explications pourront s'appuyer sur des exemples.

   (b) Proposer un exercice permettant de contribuer à l'évaluation de l'aptitude des élèves à « comprendre et appliquer aux nombres décimaux les règles de la numération décimale de position ».

2. Un enseignant de CM1 souhaite interroger ses élèves, il hésite entre les trois questions suivantes :

   **Question** 1 : « Donner un nombre décimal plus grand que 3,7 et plus petit que 3,9. »

   **Question** 2 : « Donner un nombre décimal plus grand que 3,7 et plus petit que 3,8. »

   **Question** 3 : « Donner un nombre décimal plus grand que 3,9 et plus petit que 4,1. »

   Donner les éventuels intérêts et inconvénients de chacune de ces trois questions pour évaluer la compréhension des élèves de ce que sont les décimaux et de l'écriture à virgule.

3. Un enseignant de CM2 pose la question suivante à ses élèves : « Comparer 12,76 et 12,745. ». Ceux-ci sont en difficulté.

   Proposer une méthode en plusieurs étapes permettant aux élèves de comparer ces deux nombres pour déterminer lequel est le plus grand.