Épreuve de mathématiques CRPE 2021 groupe 4.

Lien vers le sujet seul : pdf.

I Première partie (13 points).

Partie A.

1. Justifions l'encadrement.

   $M \in [DC]$ et $DC = 10$ donc $0 \leqslant x \leqslant 10$.
   Enfin $DC = x$, donc

   $$\boxed{0 \leqslant x \leqslant 10.}$$

2. Calculons l'aire $\mathscr{A}(ALCM)$ de $ALCM$ lorsque $x = 2$.

   La partie grisée n'est pas une figure dont l'aire peut être calculée par une formule que nous serions supposés connaître. Nous allons partir de l'aire du carré $ABCD$ et enlever les aires des parties qui ne sont pas grisées.

   * Calculons l'aire du carré $ABCD$.

   $$\begin{aligned}\mathscr{A}(ABCD) &= AB^2\\ &= (10\text{ cm})^2\\ &= 10^2\text{ cm}^2\\ &= 100\text{ cm}^2\end{aligned}$$

   * Calculons l'aire du triangle AMD.
   Puisque AMD est rectangle en D :

   $$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times AD \times DM\\ &= \frac{1}{2} \times (10\text{ cm}) \times (2\text{ cm})\\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 2\text{ cm} \cdot \text{cm}\\ &= 10\text{ cm}^2\end{aligned}$$

* Du fait de la symétrie de la configuration par rapport à (AC) il est clair que $\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ABL)$.
* Des points précédents nous déduisons :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(ALCM) &= \mathscr{A}(ABCD) - \mathscr{A}(AMD) - \mathscr{A}(ABL)\\ &= 100 \text{ cm}^2 - 10 \text{ cm}^2 - 10 \text{ cm}^2\\ &= (100 - 10 - 10) \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Si $x = 2$ alors $\mathscr{A}(ALCM) = 80 \text{ cm}^2$.

3. Calculons $\mathscr{A}(ALCM)$ lorsque $x = \frac{3}{5}$.

Toutes les longueurs étant exprimées en centimètres nous ferons désormais l'économie d'indiquer les unités utilisées.

*

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{3}{5}\\ &= 3\end{aligned}$$

*

$$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 3 - 3$$

Si $x = \frac{3}{5}$ alors $\mathscr{A}(ALCM) = 97 \text{ cm}^2$.

4. Exprimons $\mathscr{A}(ALCM)$ en fonction de x.

procédons comme aux deux questions précédentes

*

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(AMD) &= \frac{1}{2} \times 10 \times x\\ &= 5x\end{aligned}$$

*

$$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 5x - 5x$$

$$\mathscr{A}(ALCM) = 100 - 10x.$$

5. Nous avons déjà remarqué que les parties AMD et ABL ont la même aire. Il reste à avoir, par exemple, AMD et $ALCM$ de même aire.

   Déterminons x de sorte que $\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ALCM)$.

   Dire que

$$\mathscr{A}(AMD) = \mathscr{A}(ALCM)$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
5x &= 100 - 10x \\
5x+10x &= 100 - 10x+10x \\
15x &= 100 \\
\frac{15x}{15} &= \frac{100}{15} \\
x &= \frac{2^2 \times 5^2}{3 \times 5} \\
x &= \frac{2^2 \times 5}{3} \\
x &= \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

   Et comme $\frac{20}{3} = 6{,}666\ldots$ on a bien $0 \leqslant \frac{20}{3} \leqslant 10$.
   Nous pouvons donc conclure :

   les trois parties ont la même aire si et seulement si $x = \frac{20}{3}$.

Partie B.

1. (a) Déterminons l'aire $\mathscr{A}(MCL)$ du triangle MCL lorsque $x = 2$.

   Là encore nous ne préciserons pas les unités, les longueurs étant touts exprimées en centimètre.

   MCL est rectangle en C donc :

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times MC \times CL$$

Du fait de la symétrie de la figure, MCL est isocèle en C et donc :

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times MC^2$$

Puisque $DC = 10$, $DM = x$ et $M \in [DC]$:

$$\mathscr{A}(MCL) = \frac{1}{2} \times (10 - x)^2$$

Comme $x = 2$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(MCL) &= \frac{1}{2} \times (10 - 2)^2 \\ &= 32\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(MCL) = 32 \text{ cm}^2.}$$

(b) En reprenant le raisonnement de la question précédente mais sans substituer à x la valeur 2 nous obtenons :

$$\boxed{\mathscr{A}(MCL) = \tfrac{1}{2}(10 - x)^2 \text{ quelque soit } x \in [0; 10].}$$

(c) Déterminons $\mathscr{A}(AML)$.

Remarquons que

$$\mathscr{A}(AML) = \mathscr{A}(AMCL) - \mathscr{A}(MCL)$$

Compte tenu des expressions obtenues pour $\mathscr{A}(AMCL)$ (question A.4) et $\mathscr{A}(MCL)$ (question précédente), nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(AML) &= [100 - 10x] - \left[\frac{1}{2}(10-x)^2\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}\left(10^2 - 2\times 10\times x + x^2\right)\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - 20x + 100\right)\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}\times x^2 - \frac{1}{2}\times 20x + \frac{1}{2}\times 100\right] \\
&= 100 - 10x - \left[\frac{1}{2}x^2 - 10x + 50\right] \\
&= 100 - 10x - \frac{1}{2}x^2 + 10x - 50 \\
&= 50 - \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0;10]$, $\mathscr{A}(MCL) = 50 - \frac{x^2}{2}$.

2. (a) Comme nous l'avons établi en résolvant la question A.4 :

f est l'aire de AMD.

D'après la question A.4 :

g est l'aire de $AMCL$.

D'après la question B.1.c :

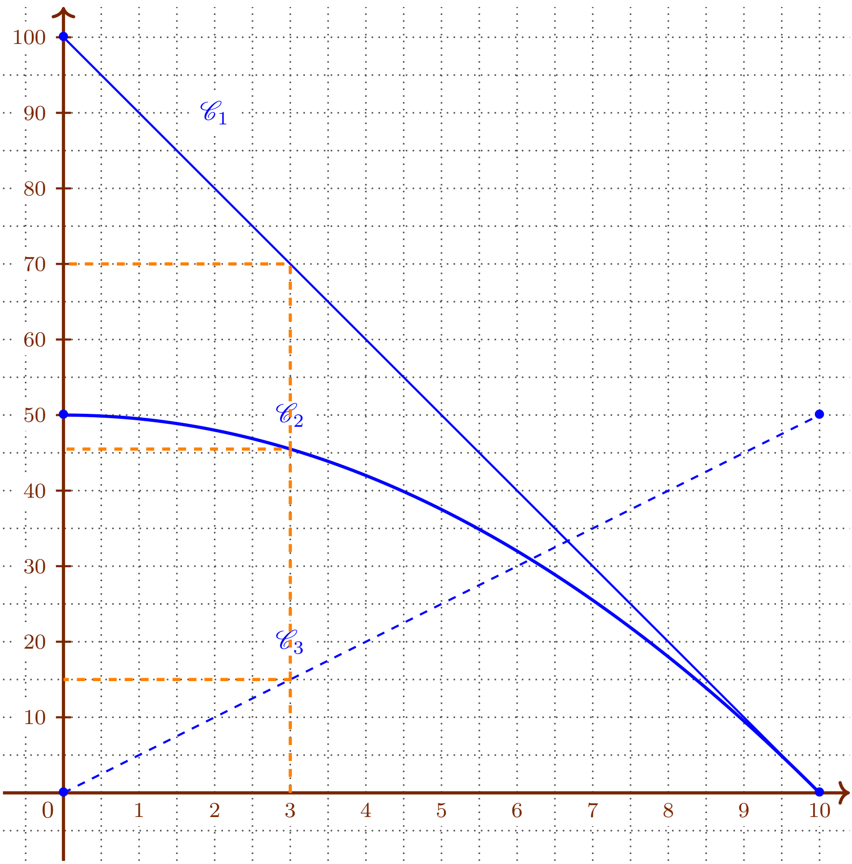
h est l'aire de AML.

(b) Identifions la courbe représentative de chaque fonction.

* Première méthode : en reconnaissant la nature de la fonction à partir de son expression algébrique.

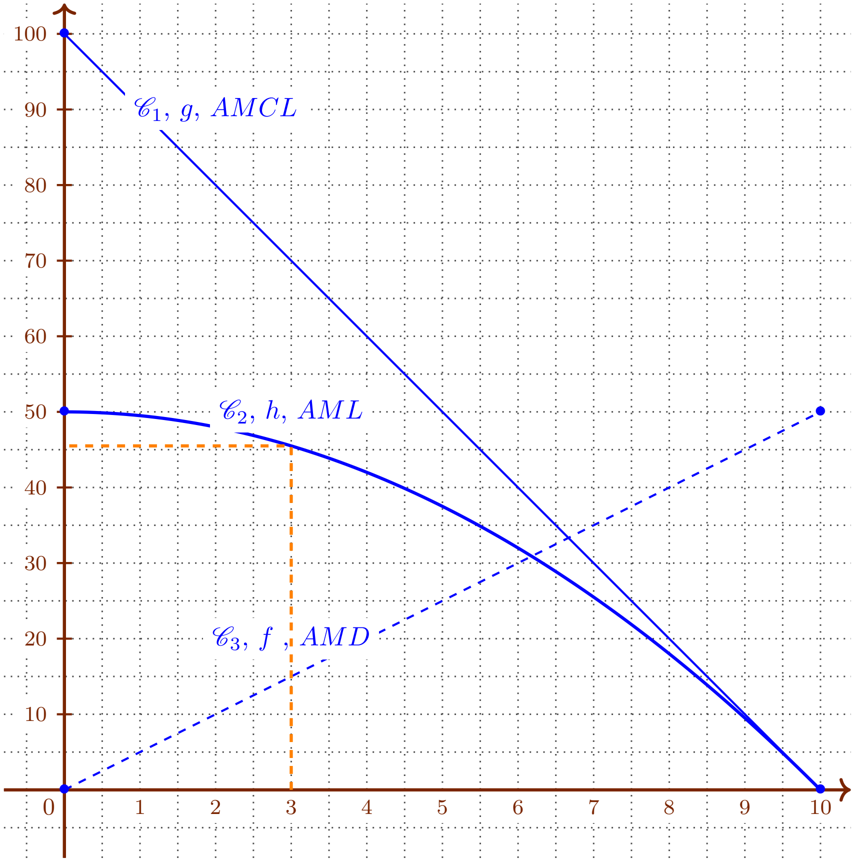
Nous pouvons reconnaître les courbe représentatives à partir des natures des fonctions.
h est une fonction polynomiale de degré deux donc sa courbe représentative est une parabole. Il ne peut s'agir que de $\mathscr{C}_2$.
f et g sont des fonctions affines donc leurs courbes représentatives sont des droites : $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}$. De plus le coefficient directeur de f est positif (5) alors que celui de g est négatif -10) donc la courbe représentative de f monte et celle de g descend.

* Tester un calcul d'image.
En calculant nous obtenons : $f(3) = 5\times3 = 15$, $g(3) = 100-10\times3 = 70$ et $h(3) = 50 - \frac{3^2}{2} = 45{,}5$.
Par lecture graphique nous pouvons identifier les courbes correspondant à ces calculs d'images.



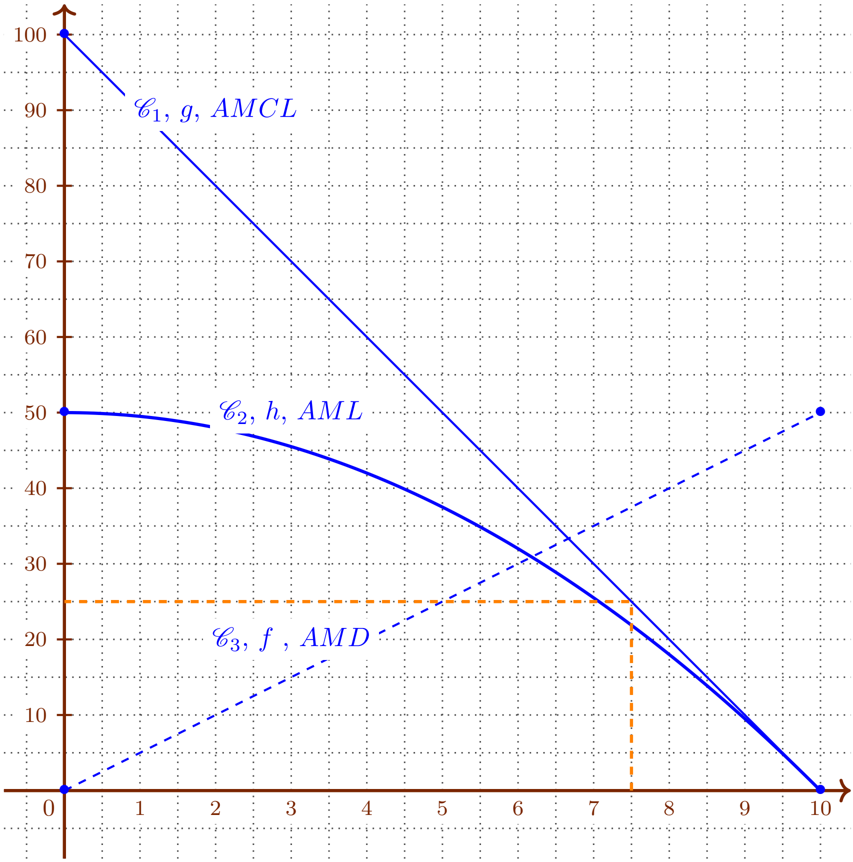
Les courbes représentatives des fonctions f, g et h sont respectivement $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

(c) En reprenant les résultats des deux questions précédentes nous pouvons annoter le graphique.



L'aire de AML égale 45 cm^2 lorsque $x = 3$.

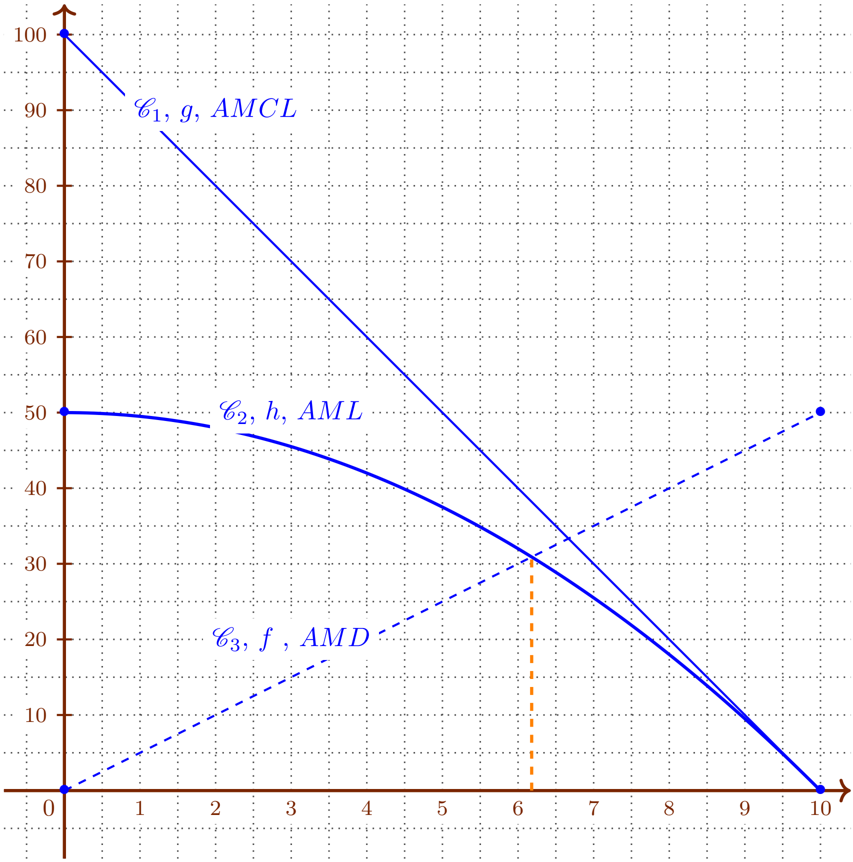
(d)



L'aire de $AMCL$ égale 25 cm^2 lorsque $x = 7{,}5$.

(e) ABL et ADM ont la même aire donc la question pourrait être : déterminer x pour que les aires de AMD et AML soient égales.

Or ces aires sont égales lorsque les fonctions les représentant ont la même image ce qui correspond aux points d'intersections de leur courbes représentatives :



et donc :

les aires de ABL, ADM et AML sont égales lorsque $x = 6{,}2$.

Partie C.

1. Le plus grand diamètre possible pour le cercle est la longueur du côté du carré, c'est-à-dire 10 cm, par conséquent

$$0 \leqslant r \leqslant 5.$$

2. Notons $\mathscr{A}_1$ l'aire du carré et $\mathscr{A}_2$ celle du cercle.

Déterminons r tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{4}\mathscr{A}_1$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{4}\mathscr{A}_1$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \frac{1}{4} \times 10^2 \\ \pi r^2 &= 25 \\ \frac{\pi r^2}{\pi} &= \frac{25}{\pi} \\ r^2 &= \frac{25}{\pi} \end{aligned}$$

Puisque r est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{25}{\pi}} \\ r &= \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Pour que l'aire du cercle soit le quart de l'aire du carré il faut que $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$r \approx 2{,}82$ cm.

3. (a) `= PI() * A2 ^ 2.`

(b) Déterminons un encadrement de r_0.

Dire que l'aire du disque égale l'aire du carré signifie qu'elle doit être égale à $\frac{10^2}{2} = 50$.
En considérant cette partie :

9	3,5	38,48451
10	4	50,2654825

nous voyons que :

$$3{,}5 \leqslant r_0 \leqslant 4.$$

(c) Déterminons r_0 tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_1$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_1$$

équivaut successivement à

$$\pi r_0^2 = \frac{1}{2} \times 10^2$$
$$\pi r_0^2 = 50$$
$$\frac{\pi r_0^2}{\pi} = \frac{50}{\pi}$$
$$r_0^2 = \frac{50}{\pi}$$

Puisque r est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$r_0 = \sqrt{\frac{50}{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{2 \times 5^2}}{\sqrt{\pi}}$$
$$r_0 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Pour que l'aire du cercle soit le quart de l'aire du carré il faut que $r_0 = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$$r_0 \approx 3{,}99 \text{ cm.}$$

(d) Déterminons r_1 tel que : $\mathscr{A}_2 = \frac{1}{3}\mathscr{A}_1$.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{3}\mathscr{A}_1$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\pi r_1^2 &= \frac{1}{3} \times 10^2 \\
\pi r_1^2 &= \frac{100}{3} \\
\frac{\pi r_1^2}{\pi} &= \frac{\frac{100}{3}}{\pi} \\
r_1^2 &= \frac{100}{3} \times \frac{1}{\pi} \\
r_1^2 &= \frac{100}{3\pi}
\end{aligned}$$

Puisque r est une longueur c'est un nombre positif donc :

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{\frac{100}{3\pi}} \\
r_1 &= \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{3\pi}} \\
r_1 &= \frac{10}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Pour que l'aire du cercle soit le tiers de l'aire du carré il faut que $r_1 = \frac{10}{\sqrt{3\pi}}$.

En arrondissant au centième :

$r_1 \approx 3{,}26$ cm.

II Deuxième partie (13 points).

Exercice 1.

1. Un angle droit est visible sur la figure et on nous demande de vérifier qu'un triangle est rectangle. Il semble naturel de penser au théorème de Pythagore. Une rapide tentative nous montre que nous manquons de données pour ce théorème.
   La figure évoque par contre une configuration de Thalès et même la configuration classique d'un agrandissement de figure.

   * Configuration de Thalès. Les points A, D, B et A, E, C sont alignés dans cet ordre.
   * Hypothèses pour la réciproque du théorème de Thalès.
     Nous avons d'une part

$$\begin{aligned}\frac{AE}{AC} &= \frac{AC - AE}{AC}\\ &= \frac{10-4}{10}\\ &= \frac{6}{10}\\ &= \frac{2\times 3}{2\times 5}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

     et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB} &= \frac{AD}{AD + DB}\\ &= \frac{9}{9+6}\\ &= \frac{9}{15}\\ &= \frac{3\times 3}{3\times 5}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

     donc $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$.

   Nous déduisons des deux points précédents, d'après la réciproque du théorème de Thalès que $(DE) \parallel (BC)$.

   Comme de plus $(DE) \perp (AC)$ nous en déduisons $(BD) \perp (AC)$.

L'affirmation 1 est vraie.

2. Un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Quelques essais permettent de remarquer que la somme de deux nombres impaires consécutifs est toujours divisible par 2.

   Soient m et n deux nombres entiers impairs consécutifs.
   nous avons alors :

$$\begin{aligned} m + n &= m + (m+2) \\ &= 2m + 2 \\ &= 2 \times m + 2 \times 1 \\ &= 2(m+1) \end{aligned}$$

   Donc $m + n$ est divisible par 2. Par conséquent $m + n$ n'est pas premier.

L'affirmation 2 est vraie.

3. Pour déterminer l'évolution globale correspondant à des évolutions successives nous allons utiliser les coefficients multiplicateurs.

   Déterminons le taux d'évolution globale t_g en cinq ans.

   Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_a &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{-20}{100} \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

   Donc le coefficient multiplicateur global correspondant à 5 baisses de 20 % est

$$\begin{aligned} CM_g &= CM_a \times CM_a \times CM_a \times CM_a \times CM_a \\ &= CM_a^5 \\ &= 0{,}8^5 \\ &= 0{,}32768 \end{aligned}$$

Nous en déduisons le taux d'évolution global :

$$\begin{aligned} t_g &= 100 \times (CM_g - 1) \\ &= 100 \times (0{,}32768 - 1) \\ &= -67{,}232 \end{aligned}$$

La valeur de la voiture a diminuée de 67,232 %. Plus que 66,666... % car, en effet $\frac{1}{3} = 0{,}666\ldots$

L'affirmation 3 est fausse.

4. Un quart des joueurs sont majeurs et deux tiers de ce quart à moins de 25 ans donc la proportion de personnes ayant entre 18 et 25 ans est :

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 2.

1. Déterminons l'écart, $\overline{e}$, entre la taille moyenne des filles, $\overline{x}_f$, et la taille moyenne des garçons, $\overline{x}_g$.

Par définition de la moyenne :

$$\begin{aligned} \overline{x}_f &= \frac{149 + 155 + 161 + \cdots + 160}{13} \\ &= 157 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \overline{e} &= \overline{x}_g - \overline{x}_f \\ &= 159 - 157 \end{aligned}$$

$\overline{e} = 2$ cm.

2. Déterminons le max de la classe.

   Puisque la plus petite fille mesure 142 cm c'est donc un garçon qui mesure 140 cm.
   L'étendue chez les garçons étant de 29 cm, le plus grand garçon mesure 140 cm + 29 cm = 169 cm.
   Comme la plus grande fille mesure 167 cm nous pouvons conclure.

max = 169 cm.

3. Remarquons que 3 filles mesurent 162 cm ou plus.
   Il y a $28 - 13 = 15$ garçons.
   De plus la médiane est de 161 cm ce qui signifie que $\frac{15}{2} + 0{,}5 = 8$ garçons ont une taille supérieure ou égale à 161 cm.
   Or tous les garçons ont des tailles distinctes donc il y a 7 garçons dont la taille est supérieure ou égale à 162 cm.

   En regroupant filles (3) et garçons (7) :

il y a 10 élèves qui mesurent plus de 10 cm.

4. Déterminons la moyenne $\overline{x}$.

   Il s'agit d'un calcul de moyenne de moyennes. Il faut être prudent et ne pas oublier de prendre en compte l'effectif correspondant à la moyenne.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{13 \times \overline{x}_f + 15 \times \overline{x}_g}{28} \\ &= \frac{13 \times 157 + 15 \times 159}{28} \\ &= \frac{2213}{14} && \approx 158{,}07142\end{aligned}$$

$\overline{x} \approx 158{,}1$ cm.

Exercice 3.

Pour télécharger le programme Scratch il suffit de cliquer dessus.

1. 

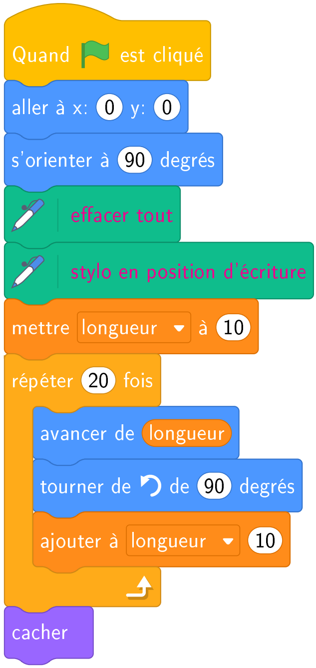
2. La longueur suit une progression arithmétique (on parle de suite arithmétique) de raison 10 : à chaque étape la longueur variable est augmentée de 10.

   La valeur initiale de la *longueur* est 10 puis dans la boucle elle est augmentée 15 fois de 10. Autrement dit la *longueur* du dernier segment tracé est :

$$longueur = 10 + 15 \times 10$$

   La longueur du dernier segment est 160 pixels.

3. Voici une modification possible :



III Troisième partie (14 points).

Situation 1.

1.
2.
3.
4.

Situation 2.

1.
2.
3.

Situation 3.

1. (a)
   (b)

2. (a)
   (b)
   (c)